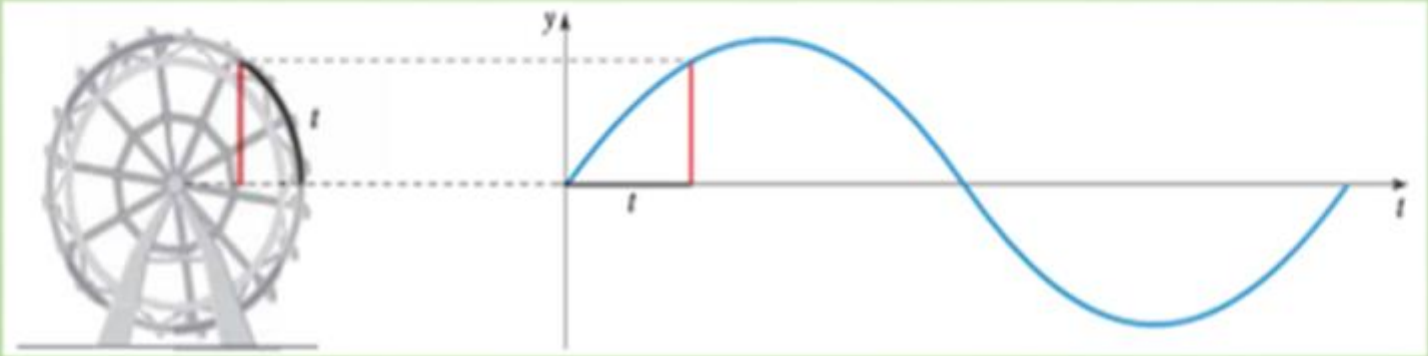
FCEN
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES

Ingreso 2019
Matemática

UNIDAD N°6

TRIGONOMETRÍA- IDENTIDADES Y ECUACIONES

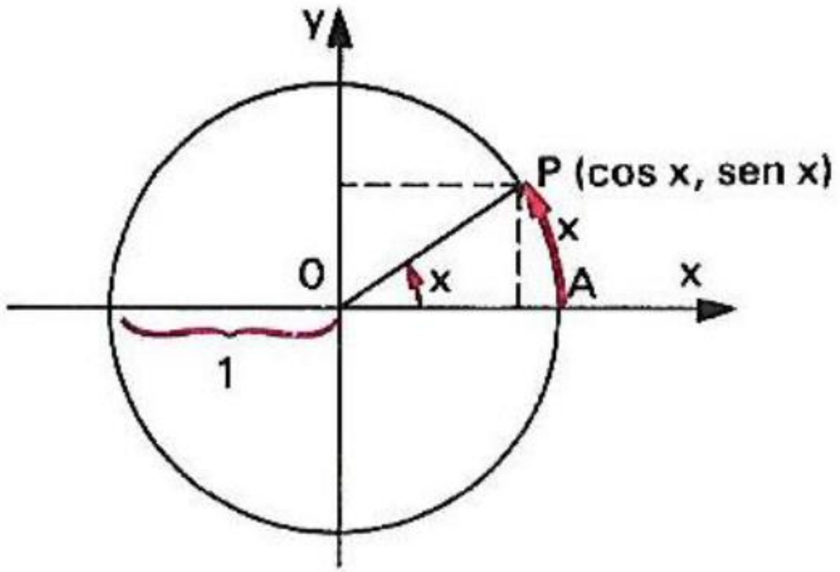


Segundo Semestre

IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS

Ecuaciones que producen sentencias numéricas verdaderas para cualquier valor de x (siempre que x pertenezca al dominio de las funciones involucradas) son llamadas **IDENTIDADES**.

Veamos un ejemplo:



Sabemos que, siendo x un número real, P es el punto terminal cuando x se mueve por la circunferencia trigonométrica, por lo que:

$$cos^2x + sen^2x = 1$$ relación fundamental

A partir de esta relación podemos obtener diferentes relaciones conocidas como "identidades pitagóricas"

Si dividimos todos los términos por cos^2x obtenemos:

$$\frac{cos^2x}{cos^2x}+\frac{sen^2x}{cos^2x}=\frac{1}{cos^2x}$$

$$1+tan^2x=\frac{1}{cos^2x}=sec^2x$$

Si dividimos todos los términos por sen^2x obtenemos:

$$\frac{cos^2x}{sen^2x}+\frac{sen^2x}{sen^2x}=\frac{1}{sen^2x}$$

$$cotan^2x+1=\frac{1}{sen^2x}=cosec^2x$$

Identidades Pitagóricas		
$cos^2x+sen^2x=1$	$1+tan^2x=sec^2x$	$cotan^2x+1=cosec^2x$

OTRAS IDENTIDADES IMPORTANTES:

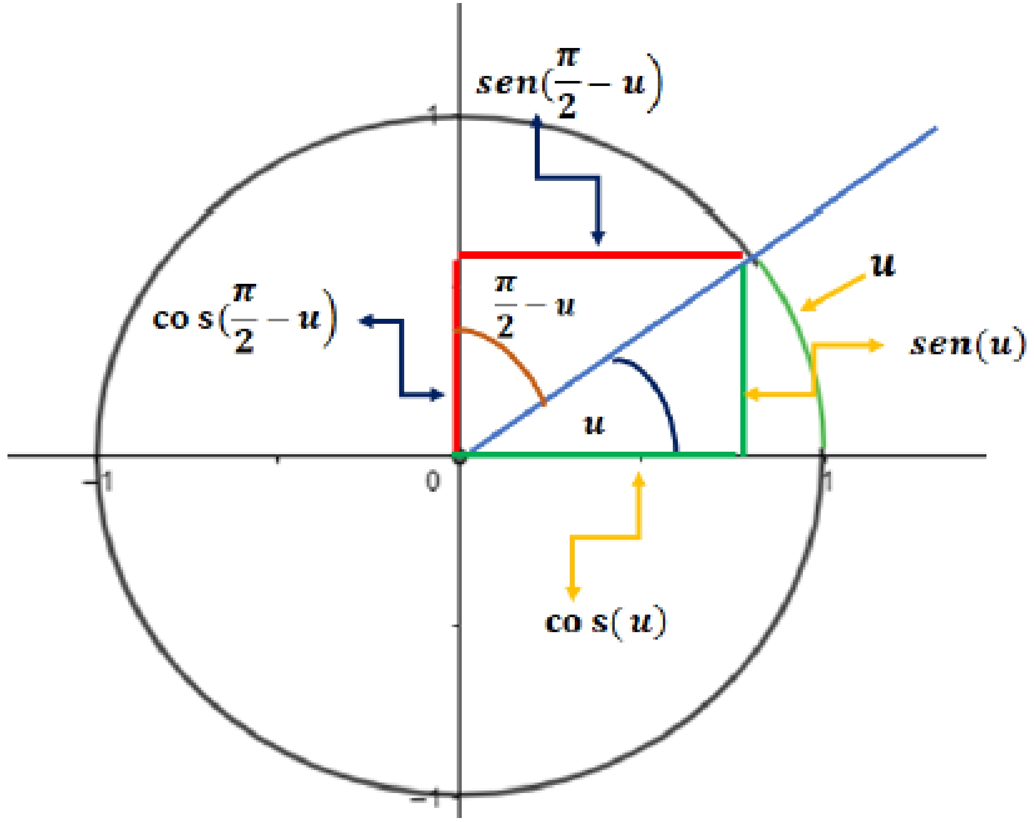
Identidades Recíprocas		
$cosec(x) = \frac{1}{sen(x)}$	$sec(x) = \frac{1}{cos(x)}$	$cot(x) = \frac{1}{tan(x)}$

$tan(x) = \frac{sen(x)}{cos(x)}$	$cot(x) = \frac{\cos(x)}{sen(x)}$	

Identidades pares-impares		
$sen(-x) = -sen(x)$	$cos(-x) = \cos(x)$	$\tan(-x) = -\tan(x)$

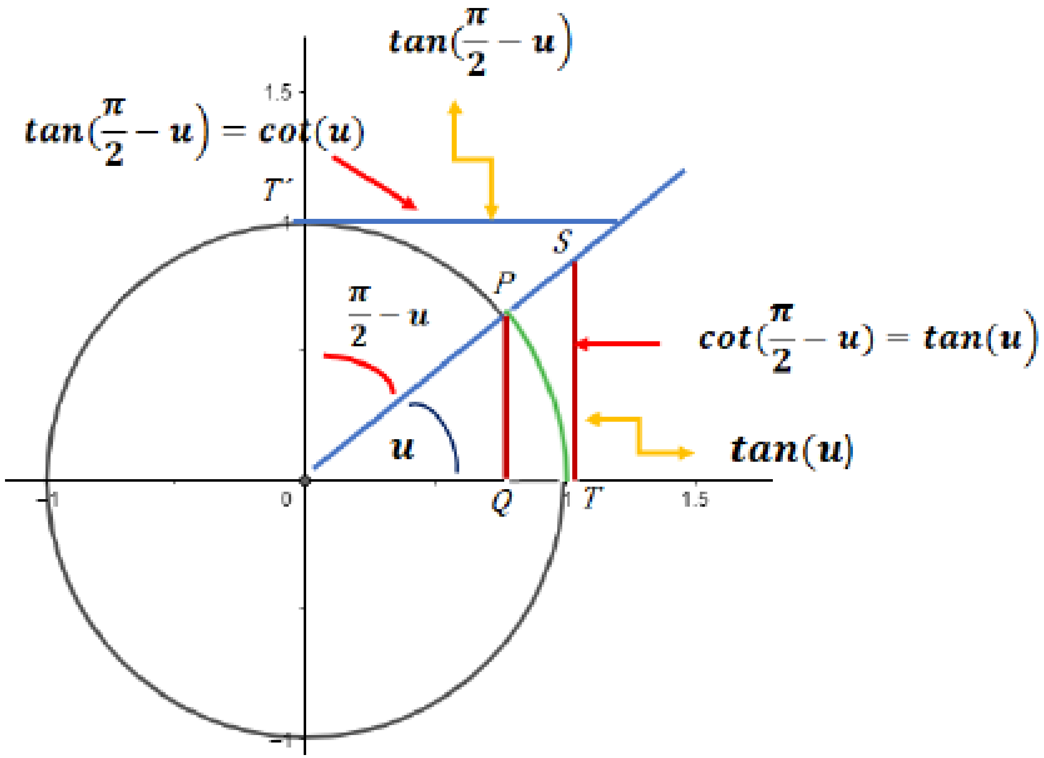
OTRAS IDENTIDADES IMPORTANTES:

$u \in \mathbb{R}$ es nuestro número $t \in \mathbb{R}$ del inicio del apunte

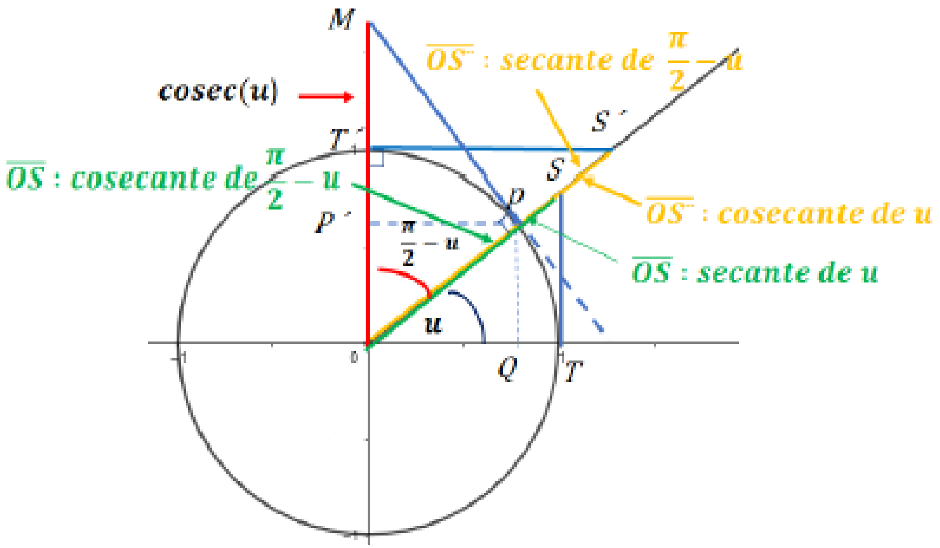
<table>
<tr><th colspan="2">Identidades de cofunciones</th></tr>
<tr><td>$sen\left(\frac{\pi}{2} - u\right) = \cos(u)$
$u \in \mathbb{R}$</td><td rowspan="2">
</td></tr>
<tr><td>$cos\left(\frac{\pi}{2} - u\right) = \mathrm{sen}(u)$
$u \in \mathbb{R}$</td></tr>
</table>

OTRAS IDENTIDADES IMPORTANTES:

Identidades de cofunciones
$tan\left(\frac{\pi}{2}-u\right)=\cot(u)$
$cot\left(\frac{\pi}{2}-u\right)=\tan(u)$



OTRAS IDENTIDADES IMPORTANTES:

<table>
<tr><th colspan="3">Identidades de cofunciones</th></tr>
<tr>
<td rowspan="2">
</td>
<td rowspan="2">$\overline{OS} = \sec(u)$
$\overline{OS'} = \sec\left(\frac{\pi}{2} - u\right) = cosec(u)$</td>
<td>$sec\left(\frac{\pi}{2} - u\right) = \operatorname{cosec}(u)$</td>
</tr>
<tr>
<td>$cosec\left(\frac{\pi}{2} - u\right) = sec\ (u)$</td>
</tr>
</table>

SIMPLIFICACIÓN DE EXPRESIONES TRIGONOMÉTRICAS:

Usaremos:

- Factorización
- Denominadores comunes
- Fórmulas de productos especiales
- Identidades trigonométricas fundamentales

Ejemplo 1: Simplificación de una expresión trigonométrica

Simplifique la expresión $\cos(t) + \tan(t)\, sen(t)$

SIMPLIFICACIÓN DE EXPRESIONES TRIGONOMÉTRICAS:

Ejemplo 1: Simplificación de una expresión trigonométrica

Simplifique la expresión $\cos(t) + \tan(t)\, sen(t)$

Solución

Primero volvemos a escribir la expresión en términos de seno y coseno.

$$\cos t + \tan t \operatorname{sen} t = \cos t + \left(\frac{\operatorname{sen} t}{\cos t}\right) \operatorname{sen} t \qquad \text{Identidad recíproca}$$

$$= \frac{\cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t}{\cos t} \qquad \text{Denominador común}$$

$$= \frac{1}{\cos t} \qquad \text{Identidad pitagórica}$$

$$= \sec t \qquad \text{Identidad recíproca}$$

SIMPLIFICACIÓN DE EXPRESIONES TRIGONOMÉTRICAS:

Ejemplo 2: Simplificación mediante combinación de fracciones

Simplifique la expresión $\frac{sen\theta}{cos\theta} + \frac{cos\theta}{1+sen\theta}$

Solución

Combinamos las fracciones usando un denominador común.

$$\frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta} + \frac{\cos\theta}{1+\operatorname{sen}\theta} = \frac{\operatorname{sen}\theta\,(1+\operatorname{sen}\theta)+\cos^2\theta}{\cos\theta\,(1+\operatorname{sen}\theta)}$$ Denominador común

$$= \frac{\operatorname{sen}\theta + \operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta}{\cos\theta\,(1+\operatorname{sen}\theta)}$$ Distribución de sen θ

$$= \frac{\operatorname{sen}\theta + 1}{\cos\theta\,(1+\operatorname{sen}\theta)}$$ Identidad pitagórica

$$= \frac{1}{\cos\theta} = \sec\theta$$ Cancelación y uso de la identidad recíproca

SIMPLIFICACIÓN DE EXPRESIONES TRIGONOMÉTRICAS:

Ejemplo : Sustitución trigonométrica

Sustituya x por $sen\ (\theta)$ en la expresión $\sqrt{1-x^2}$ y simplifique. Suponga que $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$

Solución

Hacemos $x = sen\ (\theta)$, tenemos

$$\sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-\text{sen}^2\theta}$$ Sustitución de x = sen θ

$$sen^2(x) + cos^2(x) = 1 \longrightarrow cos^2(x) = 1 - sen^2(x)$$

$$= \sqrt{\cos^2\theta}$$ Identidad pitagórica

Para $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$, $\quad cos(x) \geq 0$

$$= \cos\theta$$ Obtención de la raíz cuadrada

SIMPLIFICACIÓN DE EXPRESIONES TRIGONOMÉTRICAS:

Trabajo Práctico

Ejercicio N° 12

Efectúe la sustitución trigonométrica indicada en la expresión algebraica que se proporciona y simplifique. Suponga que $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$

a) $\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$, $x = sen(\theta)$
b) $\sqrt{x^2 - 1}$, $x = \sec(\theta)$
c) $\sqrt{9 - x^2}$, $x = 3sen(\theta)$
d) $\frac{1}{x^2\sqrt{4+x^2}}$, $x = 2\tan(\theta)$

DEMOSTRACIÓN DE IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS:

Una ecuación *no es una identidad* cuando no se cumple para todos los valores de la variable, por ejemplo:

$$sen\, x + \cos x = 1$$

No es una identidad pues para $x = \frac{\pi}{4}$ tenemos que:

$$sen\, \frac{\pi}{4} + \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$$

Para comprobar que una ecuación trigonométrica es una identidad, transformamos un miembro de la ecuación mediante una serie de pasos, hasta obtener el otro miembro de la igualdad.

DEMOSTRACIÓN DE IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS:

Criterios para demostrar Identidades Trigonométricas

- Empezar con un miembro, preferentemente el que parece más complejo
- Aplicar identidades conocidas
- Si no sabe como continuar, convertir en senos y cosenos

Ejemplo 3: Demostración de una identidad mediante la reescritura en términos de seno y coseno

Compruebe la identidad $\cos\theta(sec\theta - cos\theta) = sen^2\theta$

COMENZAMOS POR EL PM

DEMOSTRACIÓN DE IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS:

Ejemplo 3: Demostración de una identidad mediante la reescritura en términos de seno y coseno

Compruebe la identidad $\cos\theta(sec\theta - cos\theta) = sen^2\theta$

Solución

El primer miembro se ve más complicado, así que iniciamos con él y tratamos de transformarlo en el segundo miembro.

$$\begin{aligned} \text{PM} &= \cos\theta\,(\sec\theta - \cos\theta) \\ &= \cos\theta\left(\frac{1}{\cos\theta} - \cos\theta\right) && \text{Identidad recíproca} \\ &= 1 - \cos^2\theta && \text{Desarrollo} \\ &= \text{sen}^2\theta = \text{SM} && \text{Identidad pitagórica} \end{aligned}$$

◆

DEMOSTRACIÓN DE IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS:

Ejemplo 4: Demostración de una identidad mediante la combinación de fracciones

Verifique la identidad $2\tan(x)\sec(x) = \dfrac{1}{1-sen(x)} - \dfrac{1}{1+sen(x)}$

COMENZAMOS POR EL SM

Solución

Mediante un común denominador y la combinación de las fracciones en el segundo miembro de esta ecuación obtenemos

$$
\begin{aligned}
\text{SM} &= \frac{1}{1-\operatorname{sen} x} - \frac{1}{1+\operatorname{sen} x} \\
&= \frac{(1+\operatorname{sen} x)-(1-\operatorname{sen} x)}{(1-\operatorname{sen} x)(1+\operatorname{sen} x)} && \text{Común denominador} \\
&= \frac{2\operatorname{sen} x}{1-\operatorname{sen}^2 x} && \text{Simplificación} \\
&= \frac{2\operatorname{sen} x}{\cos^2 x} && \text{Identidad pitagórica} \\
&= 2\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}\left(\frac{1}{\cos x}\right) && \text{Factorización} \\
&= 2\tan x\sec x = \text{PM} && \text{Identidades recíprocas}
\end{aligned}
$$

♦

DEMOSTRACIÓN DE IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS:

Ejemplo 6: Demostración de una identidad trabajando ambos miembros por separado

Verifique la identidad $\dfrac{1+\cos(\theta)}{\cos(\theta)} = \dfrac{tan^2(\theta)}{sec(\theta)-1}$

COMENZAMOS POR EL PM, LUEGO TRABAJAMOS EL SM Y LLEGAMOS AL MISMO RESULTADO

Solución

Comprobamos esta identidad transformando por separado cada miembro en la misma expresión. Debemos explicitar en cada paso la identidad usada, el algoritmo matemático, la operación matemática o la razón de cada paso. O sea, Justificar.

$$\mathrm{PM} = \frac{1+\cos\theta}{\cos\theta} = \frac{1}{\cos\theta} + \frac{\cos\theta}{\cos\theta} = \sec\theta + 1$$

$$\mathrm{SM} = \frac{\tan^2\theta}{\sec\theta - 1} = \frac{\sec^2\theta - 1}{\sec\theta - 1} = \frac{(\sec\theta - 1)(\sec\theta + 1)}{\sec\theta - 1} = \sec\theta + 1$$

Se infiere que $PM = SM$, de modo que la ecuación es una identidad. ♦

OTRAS DE IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS IMPORTANTES:

FÓRMULAS PARA LA SUMA Y LA SUSTRACCIÓN:

$$sen(\alpha+\beta) = sen(\alpha)cos(\beta) + \cos(\alpha)\, sen(\beta) \qquad \textbf{(1)}$$

$$sen(\alpha-\beta) = sen(\alpha)cos(\beta) - \cos(\alpha)\, sen(\beta)$$

$$cos(\alpha+\beta) = cos(\alpha)cos(\beta) - \mathrm{sen}(\alpha)\, sen(\beta) \qquad \textbf{(2)}$$

$$cos(\alpha-\beta) = cos(\alpha)cos(\beta) + \mathrm{sen}(\alpha)\, sen(\beta)$$

$$tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan(\alpha)+\tan(\beta)}{1-\tan(\alpha)\tan(\beta)}$$

$$tan(\alpha-\beta) = \frac{\tan(\alpha)-\tan(\beta)}{1+\tan(\alpha)\tan(\beta)}$$

Aplicación 1: Calcular el valor exacto de una expresión

a) $\cos(75°)$ b) $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$

OTRAS DE IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS IMPORTANTES:

Fórmulas del ángulo doble

$$sen2x = 2senx.cosx$$

$$cos2x = cos^2x - sen^2x$$

$$\cos 2x = 1 - 2sen^2x$$

$$\cos 2x = 2\,cos^2x - 1$$

$$tan2x = \frac{2tanx}{1 - tan^2x}$$

Aplicación 2: Uso de las fórmulas del ángulo doble

Si $\cos(x) = -\frac{2}{3}$ y x está en el cuadrante II, calcule cos $(2x)$ y $sen(2x)$

Trabajo Práctico

Ejercicio N° 13

Determinar $sen\ (2x), cos\ (2x)$ y $tan\ (2x)$ a partir de la información proporcionada.

a) $sen(x) = \frac{5}{13}$, x en el cuadrante I
b) $\cos(x) = \frac{4}{5}$, $cosec(x) < 0$
c) $\tan(x) = -\frac{1}{3}$, $\cos(x) > 0$

OTRAS DE IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS IMPORTANTES:

Fórmulas para reducir las potencias

$sen^2(x) = \dfrac{1 - \cos(2x)}{2}$	$cos^2(x) = \dfrac{1 + \cos(2x)}{2}$	$tan^2(x) = \dfrac{1 - \cos(2x)}{1 + \cos(2x)}$

Fórmulas mitad de ángulo o semiângulo

$sen\left(\dfrac{u}{2}\right) = \pm\sqrt{\dfrac{1 - \cos(u)}{2}}$	$cos\left(\dfrac{u}{2}\right) = \pm\sqrt{\dfrac{1 + \cos(u)}{2}}$
$tan\left(\dfrac{u}{2}\right) = \pm\dfrac{1 - \cos(u)}{sen(u)} = \dfrac{sen(u)}{1 + \cos(u)}$	

Trabajo Práctico

Ejercicio N° 14

Utilice una fórmula apropiada de mitad de ángulo o semiángulo para determinar el valor exacto de la expresión.

a) $sen(15°)$ b) $\tan(22.5°)$ c) $cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ d) $sen\left(\frac{9\pi}{8}\right)$

Ejercicio N° 15

Aplique las fórmulas para reducir la potencia y poder volver a escribir la expresión en términos de la primera potencia del coseno,

a) $sen^4(x)$ b) $cos^2(x)sen^4(x)$ c) $cos^6(x)$

Trabajo Práctico

Ejercicio N° 16

Verifique las siguientes identidades trigonométricas

a. $(\operatorname{sen} x + \cos x)^2 = 1 + 2 \operatorname{sen} x \cos x$

b. $\frac{\sec x \ \cot x}{\csc x} = 1$

c. $\frac{\csc x - \cot x}{\sec x - 1} = \cot x$

d. $\csc x\,[\csc x - \operatorname{sen} x] = \cot^2 x$

e. $\tan^2 x - \operatorname{sen}^2 x = \tan^2 x \ \operatorname{sen}^2 x$

f. $\cot(-x)\cos(-x) + \operatorname{sen}(-x) = -\csc x$

g. $\operatorname{sen} 8x = 2 \operatorname{sen} 4x \cos 4x$

h. $\frac{2 \tan x}{1 + \tan^2 x} = \operatorname{sen} 2x$

i. $\frac{2(\tan x - \cot x)}{\tan^2 x - \cot^2 x} = \operatorname{sen} 2x$

j. $\cot 2x = \frac{1 - \tan^2 x}{2 \tan x}$

ECUACIONES TRIGONOMÉTRICAS

Una ecuación que contiene funciones trigonométricas se denomina **ecuación trigonométrica**. Por ejemplo, las expresiones siguientes son ecuaciones trigonométricas:

$$sen^2x + cos^2x = 1 \qquad 2senx - 1 = 0 \qquad tan^2 2x - 1 = 0$$

La primera ecuación es una identidad, las otras dos son ecuaciones, es decir se cumplen sólo para ciertos valores de x.
Para resolver una ecuación trigonométrica, calculamos todos los valores de la variable que hacen que la ecuación sea cierta.

Ejemplo 1: Resolver la ecuación $2\,senx\ - 1 = 0$

Ejemplo 2: Resolver la ecuación $tan^2x\ - 3 = 0$

Ejemplo 3: Resolver la ecuación $2cos^2x - 7cosx + 3 = 0$

Ejemplo 4: Resolver la ecuación $1 + senx = 2cos^2x$ en el intervalo $[0; 2\pi)$

Ejemplo 5: Resolver la ecuación $2sen(3x) - 1 = 0$ en el intervalo $[0; 2\pi)$

ECUACIONES TRIGONOMÉTRICAS

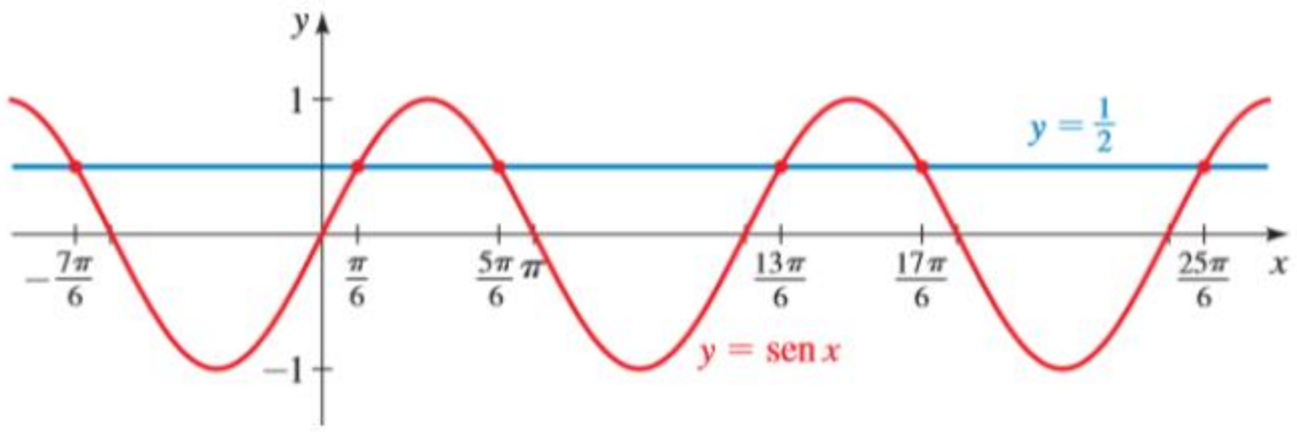
Ejemplo 1:

$2 \operatorname{sen} x - 1 = 0$	Ecuación dada
$2 \operatorname{sen} x = 1$	Suma de 1
$\operatorname{sen} x = \dfrac{1}{2}$	División entre 2

Primero analizamos las soluciones en $[0; 2\pi)$

Éstas son $x = \pi/6$ y $x = 5\pi/6$

Luego calculamos todas las soluciones



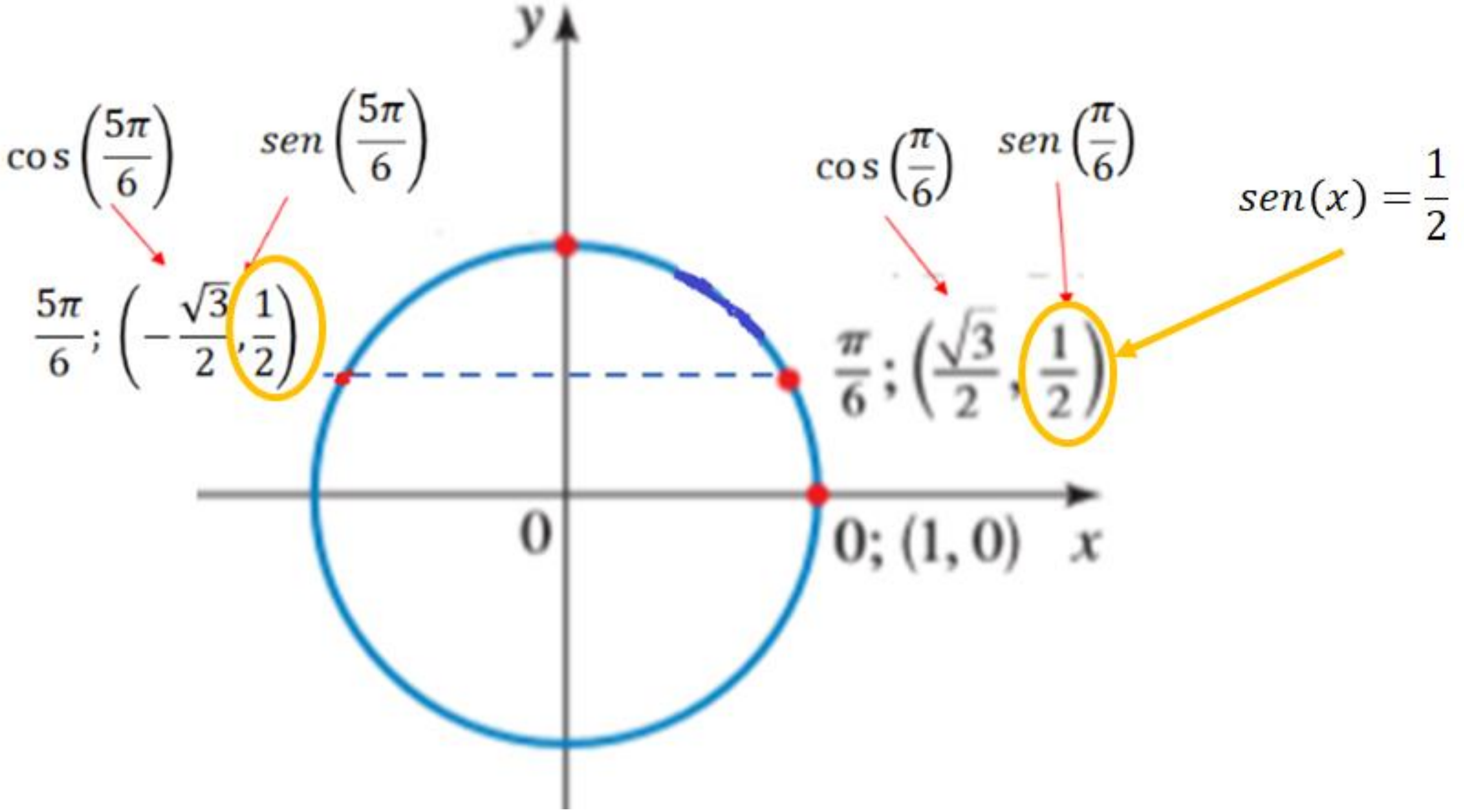
La función seno tiene periodo 2π

$$x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \quad , \quad x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$$

donde k es cualquier entero.

ECUACIONES TRIGONOMÉTRICAS

Volviendo al análisis en la circunferencia trigonométrica, vemos la soluciones en $[0; 2\pi)$



ECUACIONES TRIGONOMÉTRICAS

Ejemplo 2 Resolución de una ecuación trigonométrica

Resuelva la ecuación $tan^2(x) - 3 = 0$

Solución

1- Empezamos por aislar a $tan\ (x)$:

$$
\begin{aligned}
\tan^2 x - 3 &= 0 && \text{Ecuación dada} \\
\tan^2 x &= 3 && \text{Suma de 3} \\
\tan x &= \pm\sqrt{3} && \text{Obtención de las raíces cuadradas}
\end{aligned}
$$

2- Primero determinamos las soluciones en el intervalo $(-\pi/2\,, \pi/2)$,

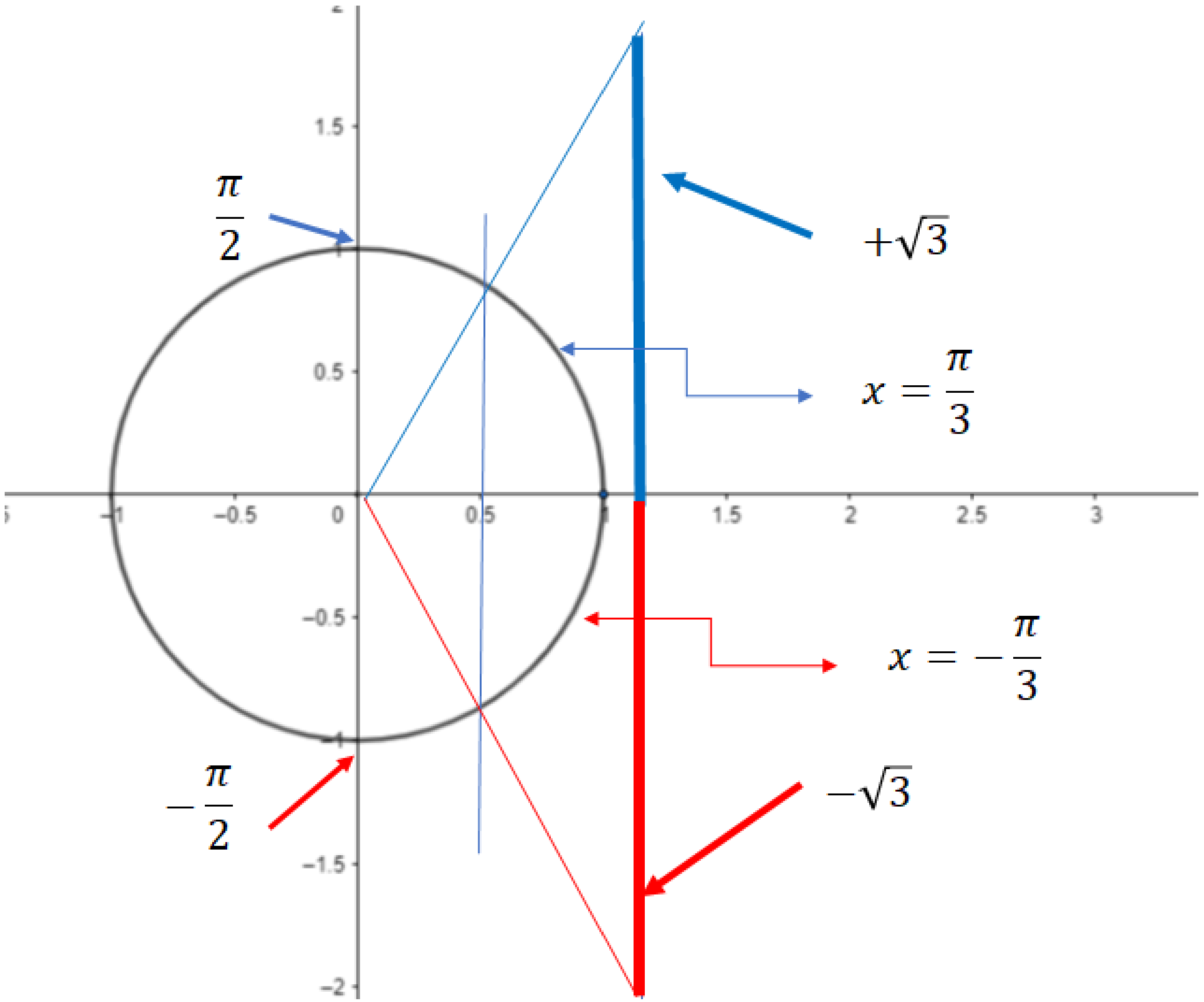
$x = -\pi/3$ y $x = \pi/3$

3- Por lo tanto, las soluciones son:

$$x = -\frac{\pi}{3} + k\pi \quad , \quad x = \frac{\pi}{3} + k\pi \quad \text{para todo } k \text{ entero}$$

ECUACIONES TRIGONOMÉTRICAS

Volviendo al análisis en la circunferencia trigonométrica, vemos la soluciones en $(-\pi/2\,,\pi/2)$



ECUACIONES TRIGONOMÉTRICAS

Ejemplo 3 Una ecuación de tipo cuadrático

Resuelva la ecuación $2cos^2(x) - 7cos(x) + 3 = 0.2$

Solución

1- Factorizamos el primer miembro de la ecuación.

		$2\cos^2 x - 7\cos x + 3 = 0$	Ecuación dada
		$(2\cos x - 1)(\cos x - 3) = 0$	Factorización
$2\cos x - 1 = 0$	o	$\cos x - 3 = 0$	Cada factor se iguala a 0
$\cos x = \frac{1}{2}$	o	$\cos x = 3$	Determinación de cos x

2- En la primera ecuación, las soluciones son $x = \pi/3$ y $x = \frac{5\pi}{3}$ en el intervalo $[0; 2\pi)$

Para todo k entero: $x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$, $x = \frac{5\pi}{3} + 2k\pi$

3- La segunda ecuación no tiene soluciones

Analizar en la circunferencia trigonométrica,

ECUACIONES TRIGONOMÉTRICAS

Ejemplo 4 Uso de una identidad trigonométrica

Resuelva la ecuación $1 + sen(x) = 2cos^2(x)$

Solución

1- Usamos una identidad trigonométrica para volver a escribir la ecuación en términos de **una sola función trigonométrica**.

$$1 + \operatorname{sen} x = 2\cos^2 x \qquad \text{Ecuación dada}$$

$$1 + \operatorname{sen} x = 2(1 - \operatorname{sen}^2 x) \qquad \text{Identidad pitagórica}$$

$$2\operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen} x - 1 = 0 \qquad \text{Todos los términos se pasan a un solo lado de la ecuación}$$

Queda reducida al caso anterior.

$$(2\operatorname{sen} x - 1)(\operatorname{sen} x + 1) = 0 \qquad \text{Factorización}$$

$$2\operatorname{sen} x - 1 = 0 \quad \text{o} \quad \operatorname{sen} x + 1 = 0 \qquad \text{Todos los factores se igualan a 0}$$

ECUACIONES TRIGONOMÉTRICAS

$$\operatorname{sen} x = \frac{1}{2} \quad \text{o} \quad \operatorname{sen} x = -1$$ Determinación de sen x

$$x = \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6} \quad \text{o} \quad x = \frac{3\pi}{2}$$ Determinación de x en el intervalo $[0, 2\pi)$

Por lo tanto, las soluciones son

$$x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \quad , \quad x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \quad , \quad x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$$

Analizar en la circunferencia trigonométrica,

ECUACIONES TRIGONOMÉTRICAS

Ejemplo 5 Uso de una identidad trigonométrica (otro caso)

Resuelva la ecuación $sen(2x) - cos(x) = 0$

Solución

$\operatorname{sen} 2x - \cos x = 0$	Ecuación dada
$2 \operatorname{sen} x \cos x - \cos x = 0$	Fórmula del ángulo doble
$\cos x\,(2 \operatorname{sen} x - 1) = 0$	Factorización
$\cos x = 0 \quad \text{o} \quad 2 \operatorname{sen} x - 1 = 0$	Cada factor se iguala a 0
$\operatorname{sen} x = \frac{1}{2}$	Determinación de sen x
$x = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \quad \text{o} \quad x = \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}$	Determinación de x en el intervalo $[0, 2\pi)$

El periodo tanto del seno como del coseno es 2π, la solución general queda

$$x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \ , \quad x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \ , \quad x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \ , \quad x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$$

Analizar en la circunferencia trigonométrica,

ECUACIONES TRIGONOMÉTRICAS

Ejemplo 6 Elevación al cuadrado y uso de una identidad

Resuelva la ecuación $cos(x) + 1 = sen(x)$ $en\ el\ intervalo\ (0, 2\pi)$

Solución

1- Para obtener una ecuación que contenga **sólo seno** o **sólo coseno**, elevamos ambos miembros y aplicamos la identidad pitagórica.

$\cos x + 1 = \operatorname{sen} x$	Ecuación dada
$\cos^2 x + 2\cos x + 1 = \operatorname{sen}^2 x$	Se elevan al cuadrado ambos miembros
$\cos^2 x + 2\cos x + 1 = 1 - \cos^2 x$	Identidad pitagórica
$2\cos^2 x + 2\cos x = 0$	Simplificación
$2\cos x\,(\cos x + 1) = 0$	Factorización

ECUACIONES TRIGONOMÉTRICAS

$2\cos x = 0$	o bien	$\cos x + 1 = 0$	*Se iguala cada factor a 0*
$\cos x = 0$	o bien	$\cos x = -1$	*Determinación de cos x*
$x = \dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{2}$	o bien	$x = \pi$	*Determinación de x en el intervalo $[0, 2\pi)$*

Atención: Siempre que se eleva al cuadrado pueden aparecer soluciones "extrañas". Por eso es necesario comprobar que cumplen con la **ecuación original**.

$x = \dfrac{\pi}{2}$:	$x = \dfrac{3\pi}{2}$:	$x = \pi$:
$\cos\dfrac{\pi}{2} + 1 \stackrel{?}{=} \operatorname{sen}\dfrac{\pi}{2}$	$\cos\dfrac{3\pi}{2} + 1 \stackrel{?}{=} \operatorname{sen}\dfrac{3\pi}{2}$	$\cos\pi + 1 \stackrel{?}{=} \operatorname{sen}\pi$
$0 + 1 = 1$ ✓	$0 + 1 \stackrel{?}{=} -1$ ✗	$-1 + 1 = 0$ ✓

De acuerdo con comprobación observamos que las soluciones de la ecuación dada son $\pi/2$ y π.

Ejemplo7 Funciones trigonométricas de ángulos múltiples

Considere la ecuación $2sen(3x) - 1 = 0$

a) Calcule todas las soluciones de la ecuación.

b) Encuentre las soluciones en el intervalo $[0, 2\pi)$

Solución

a) 1- Empezamos por aislar a $sen\ (3x)$, y luego determinamos el ángulo múltiple $3x$.

$$2\ sen(3x) - 1 = 0$$ Ecuación dada

$$2\ sen(3x) = 1$$ Suma de 1

$$sen(3x) = \frac{1}{2}$$ División entre 2

$$3x = \frac{\pi}{6}\ ;\ \frac{5\pi}{6}$$ Determinación de ex en el intervalo $[0,2\pi]$

ECUACIONES TRIGONOMÉTRICAS

2- Para obtener **todas** las soluciones, adicionamos cualquier múltiplo entero de 2π a estas soluciones. Por consiguiente, las soluciones son de la forma

$$3x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \quad , \quad 3x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$$

3- Para determinar x, dividimos entre 3 para conocer las soluciones

$$x = \frac{\pi}{18} + \frac{2k\pi}{3} \quad , \quad x = \frac{5\pi}{18} + \frac{2k\pi}{3}$$

donde k es cualquier entero.

ECUACIONES TRIGONOMÉTRICAS

b) Las soluciones del inciso a) que están en el intervalo $[0, 2\pi)$ corresponden a $k = 0, 1$ y 2. Para todos los otros valores de k, los valores correspondientes de x quedan fuera de este intervalo. Por lo tanto, las soluciones en el intervalo $[0, 2\pi)$son

$$S = \left\{\frac{\pi}{18}; \frac{5\pi}{18}; \frac{13\pi}{18}; \frac{17\pi}{18}; \frac{25\pi}{18}; \frac{29\pi}{18}\right\}$$

Verificar

ECUACIONES TRIGONOMÉTRICAS

Ejemplo 8 Aplicación de las funciones trigonométricas inversas

Resuelva la ecuación $tan^2(x) - \tan(x) - 2 = 0$

Solución

1- Empezamos por factorizar el primer miembro

$$\tan^2 x - \tan x - 2 = 0 \qquad \text{Ecuación dada}$$

$$(\tan x - 2)(\tan x + 1) = 0 \qquad \text{Factorización}$$

$$\tan x - 2 = 0 \quad \text{o bien} \quad \tan x + 1 = 0 \qquad \text{Se iguala cada factor a 0}$$

$$\tan x = 2 \quad \text{o bien} \quad \tan x = -1 \qquad \text{Determinación de tan x}$$

$$x = \tan^{-1} 2 \quad \text{o bien} \quad x = -\frac{\pi}{4} \qquad \text{Determinación de x en el intervalo } \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

2- Como el periodo de la tangente es π, obtenemos todas las soluciones sumando múltiplos enteros de π a estas soluciones.

ECUACIONES TRIGONOMÉTRICAS

Por lo tanto, todas las soluciones son

$x = tan^{-1}2 + k\pi \quad , \quad x = -\frac{\pi}{4} + k\pi$ donde k es cualquier entero.

Analizar en la circunferencia trigonométrica

Trabajo Práctico

Ejercicio N° 17

Encuentre todos los valores de x para los cuales se verifica:

$$sen\, x + 2 = -sen^2 x + \frac{5}{2}\, sen\, x + \frac{3}{2}$$

Ejercicio N° 18

Resuelve cada ecuación trigonométrica en el intervalo $[0,2\pi)$ y verifique las soluciones.

a. $2\cos^2 x + 5\cos x + 2 = 0$

b. $\operatorname{sen} 2x - \cos x = 0$

c. $\left(\tan x + \sqrt{3}\right)(\cos x + 2) = 0$

d. $\cos x \operatorname{sen} x - 2\cos x = 0$

e. $\operatorname{sen}^2 x = 4 - \cos^2 x$

INTERSECCIÓN ENTRE GRÁFICAS

Ejemplo 9 Determinación de los puntos de intersección

Calcule los valores de x en los cuales se cortan las gráficas de $f(x) = sen(x)$ y $g(x) = \cos(x)$.

hacemos $f(x) = g(x)$

$$sen(x) = \cos(x) \quad \Rightarrow \quad \tan(x) = 1$$

Primero analizamos las soluciones en $(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$

$$x = \pi/4$$

Luego calculamos todas las soluciones

$$x = \frac{\pi}{4} + k\pi$$

k es cualquier entero

La función tangente tiene periodo π

Ejercicio N° 19

Halle los puntos de intersección entre las siguientes funciones en el intervalo $(0, 2\pi]$:

e. $f(x) = \cos x\ ;\ g(x) = senx$

f. $f(x) = sen\left(\frac{x}{2}\right) - \sqrt{3}\ ;\ g(x) = -sen\left(\frac{x}{2}\right)$