Cálculo II

Ejercicios resueltos de Serie de Fourier.

1 Ejercicios resueltos

1. Sabiendo que si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función periódica integrable de período T, los coeficientes de Fourier de f en el intervalo $[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$ están definidos por:

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{T/2}\int_{-T/2}^{T/2} f(x) \cdot \cos(n\omega_0 x)\ dx, \qquad n \in \mathbb{N}_0 \\ b_n &= \frac{1}{T/2}\int_{-T/2}^{T/2} f(x) \cdot sen(n\omega_0 x)\ dx, \qquad n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

donde $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$, deduzca que:

(a) Si $f(x)$ es una función par de período T, entonces

$$a_n = \frac{2}{T/2}\int_0^{T/2} f(x) \cdot \cos(n\omega_0 x)\ dx, \text{ para } n \in \mathbb{N}_0 \qquad \text{y} \qquad b_n = 0, \text{ para } n \in \mathbb{N}$$

(b) Si $f(x)$ es una función impar de período T, entonces

$$a_n = 0, \text{ para } n \in \mathbb{N}_0 \qquad \text{y} \qquad b_n = \frac{2}{T/2}\int_0^{T/2} f(x) \cdot sen(n\omega_0 x)\ dx, \text{ para } n \in \mathbb{N}$$

Respuesta: Demostremos el (a). Sabemos que, para $n \in \mathbb{N}_0$,

$$a_n = \frac{1}{T/2}\int_{-T/2}^{T/2} f(x) \cdot \cos(n\omega_0 x)\ dx$$

y de que $f(x)$ es una función par, $f(x) = f(-x)$ entonces

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{T/2}\left(\int_{-T/2}^{0} f(x) \cdot \cos(n\omega_0 x)\ dx + \int_0^{T/2} f(x) \cdot \cos(n\omega_0 x)\ dx\right) \\ &= \frac{1}{T/2}\left(\int_{-T/2}^{0} f(-x) \cdot \cos(n\omega_0 x)\ dx + \int_0^{T/2} f(x) \cdot \cos(n\omega_0 x)\ dx\right) \end{aligned}$$

realizamos la sustitución $u = -x$ en la primer integral,

$$= \frac{1}{T/2}\left(\int_{T/2}^{0} f(u) \cdot \cos(-n\omega_0 u)\ (-1)\, du + \int_0^{T/2} f(x) \cdot \cos(n\omega_0 x)\ dx\right)$$

como la función coseno es par $\cos(-n\omega_0 u) = \cos(n\omega_0 u)$,

$$= \frac{1}{T/2}\left(\int_0^{T/2} f(u) \cdot \cos(n\omega_0 u)\ du + \int_0^{T/2} f(x) \cdot \cos(n\omega_0 x)\ dx\right)$$

Notemos que la primer y segunda integral dan el mismo valor numérico, pues una integral es independiente de la variable de integración que se utiliza para representarla. Luego,

$$a_n = \frac{2}{T/2}\left(\int_0^{T/2} f(x) \cdot \cos(n\omega_0 x)\ dx\right)$$

Ahora calculemos

$$b_n = \frac{1}{T/2}\int_{-T/2}^{T/2} f(x).sen(n\omega_0 x)\ dx, \qquad n\in\mathbb{N}$$

como $f(x)$ es una función par, $f(x) = f(-x)$ entonces

$$= \frac{1}{T/2}\left(\int_{-T/2}^{0} f(-x).sen(n\omega_0 x)\ dx + \int_{0}^{T/2} f(x).sen(n\omega_0 x)\ dx\right)$$

Nuevamente proponemos la sustitución $u = -x$ en la primer integral

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{T/2}\left(\int_{T/2}^{0} f(u).sen(-n\omega_0 u)\ (-1)\, du + \int_{0}^{T/2} f(x).sen(n\omega_0 x)\ dx\right) \\ &= \frac{1}{T/2}\left(\int_{0}^{T/2} f(u).sen(-n\omega_0 u)\ du + \int_{0}^{T/2} f(x).sen(n\omega_0 x)\ dx\right) \end{aligned}$$

como la función seno es impar, $sen(-n\omega_0 u) = -sen(n\omega_0 u)$, entonces

$$= \frac{1}{T/2}\left(-\int_{0}^{T/2} f(u).sen(n\omega_0 u)\ du + \int_{0}^{T/2} f(x).sen(n\omega_0 x)\ dx\right) = 0$$

2. Consideremos la función $f(x) = x$, $-\pi \leq x < \pi$, $T = 2\pi$.

Respuesta: (a) Hallemos la serie de Fourier encontrando los coeficientes de $f(x)$. Lo primero que podemos observar es que la función es impar. Entonces, del ejercicio 1, sabemos que

$$a_n = 0, \text{ para } n\in\mathbb{N}_0 \qquad \text{y} \qquad b_n = \frac{2}{T/2}\int_{0}^{T/2} f(x).sen(n\omega_0 x)\ dx, \text{ para } n\in\mathbb{N}$$

Es decir, sólo falta calcular b_n, donde $T = 2\pi$, y $\omega_0 = \frac{2\pi}{2\pi} = 1$

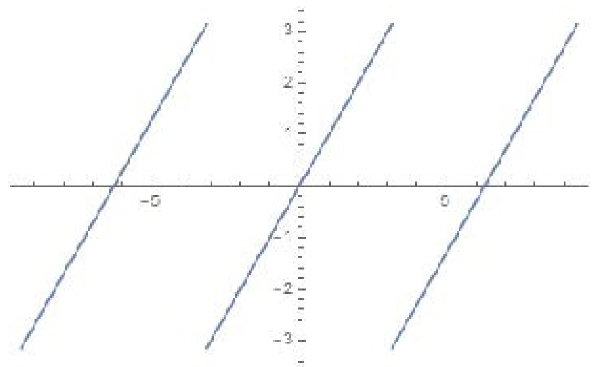
$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x.sen(nx)\ dx = \frac{2(-1)^{n+1}}{n}$$

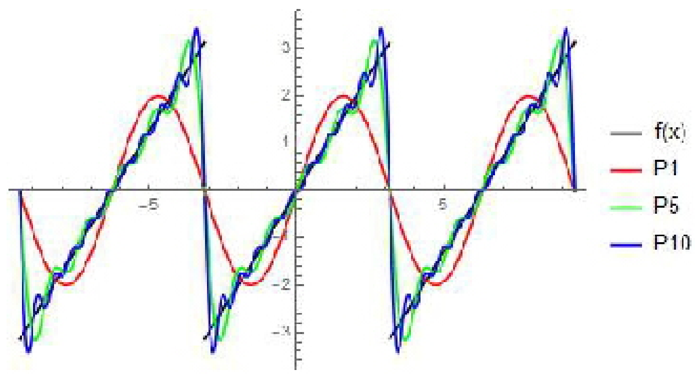
Luego, la serie de Fourier de $f(x)$ es

$$\begin{aligned} f(x) &\sim \frac{0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(0.Cos(nx) + \frac{2(-1)^{n+1}}{n}Sen(nx)\right) \\ f(x) &\sim \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2(-1)^{n+1}}{n}Sen(nx)\right) \end{aligned}$$

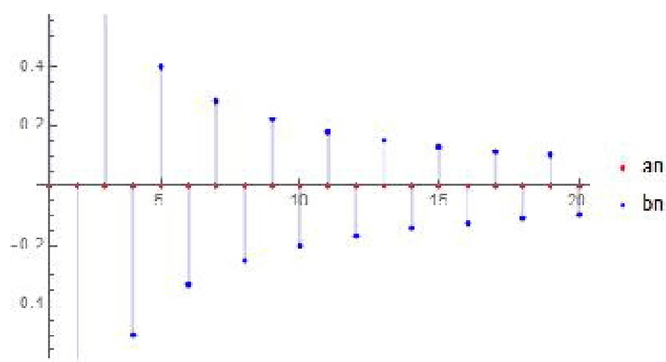
(b) Grafique simultáneamente los polinomios trigonométricos de grado N, para distintos valores de N, y la extensión periódica de f.

Primero grafiquemos la función periódica extendida





(c) ¿Cuantos términos son necesarios para obtener una aproximación de la función? Para ello grafique la magnitud de los ármonicos, es decir los coeficientes a_n y b_n.



Aquí podemos ver que la magnitud de los coeficientes de a_n no influyen en la convergencia al ser nulos. Y la magnitudes del armónico b_n decrece cuando $n \to \infty$ pero lentamente, con lo cual se necesitarán al menos 10 términos para que el polinomio trigonométrico tenga la forma de la función. Aunque claro está que la cantidad de términos dependerá de cuan precisa necesito que sea el polinomio.

(d) Utilice el Teorema de Dirichlet-Riemann para determinar la función a la cual converge el desarrollo de Fourier obtenido en (a).

Teorema de Dirichlet-Riemann (pág 86) Sea f periódica con período T, derivable a trozos. Entonces la serie de Fourier es convergente y su suma es

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n Cos\left(n\omega_0 x\right) + b_n Sen\left(n\omega_0 x\right)\right) = \begin{cases} f\left(x\right) & \text{si} \quad f \text{ es continua en } x \\ \frac{f(x+)+f(x-)}{2} & \text{si} \quad f \text{ es discontinua en } x \end{cases}$$

donde $f(x+) = \lim_{t \to x^+} f(t)$ y $f(x-) = \lim_{t \to x^-} f(t)$.
De este teorema se deduce que la serie de Fourier

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2(-1)^{n+1}}{n} Sen(nx) \right) = \begin{cases} f(x) & \text{si} \quad x \neq (2k+1)\pi \\ \frac{\pi + (-\pi)}{2} = 0 & \text{si} \quad x = (2k+1)\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$$

2020, FCEN, UNCuyo