Cálculo II

Ejercicios resueltos de TP1.

1 Series numéricas

En el caso de las series $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ de términos positivos, si al aplicar el Criterio del cociente o de D'Alamberte, de la raíz n-ésima de Cauchy los límites

$$L = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$$

o

$$L = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$$

dan $L = 1$ y, los criterios no son concluyentes, se debe utilizar el:

Criterio de Raabe: Sea $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ una serie de términos positivos y

$$L = \lim_{n\to\infty} n\left(1 - \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}\right)$$

Entonces,

- Si $L < 1$, la serie diverge.
- Si $L > 1$, la serie converge.
- Si $L = 1$,el criterio no asegura nada.

Ejemplo: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+n+1}$

Respuesta: Notemos que la serie es de términos positivos, con lo cual o la serie diverge o converge absolutamente.

Primero analizamos la Condición necesaria de convergencia

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2+n+1} = 0$$

No podemos concluir nada.

Aplicamos el **Criterio del cociente**,

$$\begin{aligned} L &= \lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{n^2+n+1}{(n+1)^2+(n+1)+1} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{n^2+n+1}{n^2+3n+3} \\ &= 1 \end{aligned}$$

Como este criterio no concluye, aplicamos el Criterio de Raabe

$$L = \lim_{n\to\infty} n\left(1 - \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}\right)$$

utilizando los pasos de simplificación en el límite anterior tenemos

$$= \lim_{n\to\infty} n\left(1-\frac{n^2+n+1}{n^2+3n+3}\right)$$

Notemos que es una indeterminación $\to \infty. \to 0$ entonces buscamos denominador común

$$\begin{aligned} &= \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{n^2+3n+3-\left(n^2+n+1\right)}{n^2+3n+3}\right) \\ &= \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{2n+2}{n^2+3n+3}\right) \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{2n^2+2n}{n^2+3n+3} = 2 > 1 \end{aligned}$$

Entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+n+1}$ converge absolutamente.

2 Series de Fourier

4. Obtenga el desarrollo de $f(x) = x(\pi - x)$, en serie de senos para $x \in [0, \pi)$.

Respuesta: (a) Obtener el desarrollo de Fourier en **Serie de senos**, significa que la función dada $f(x) = x(\pi - x)$ para $x \in [0, \pi)$ debe extenderse como función **impar** para $x \in (-\pi, 0)$. Encontremos la expresión algebraica de la función para $x \in (-\pi, 0)$. Como $f(x)$ es impar

$$f(x) = -f(-x)$$

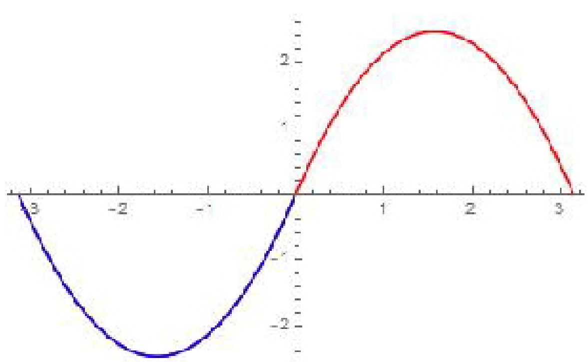
pero si $-\pi < x < 0$ entonces el argumento $-x$ que está en el lado derecho de la igualdad verifica $0 < -x < \pi$, en este intervalo conocemos a la función $f(x)$!!!

$$\begin{aligned} f(x) &= -f(-x) \\ &= -(-x)(\pi - (-x)) \\ &= x(\pi + x) \end{aligned}$$

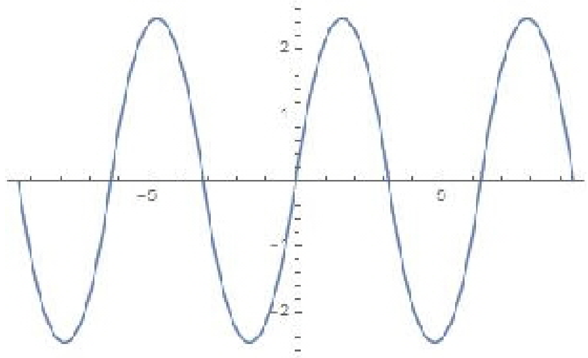
Resumiendo

$$f(x) = \begin{cases} x(\pi + x) & \text{si} \quad -\pi < x < 0 \\ x(\pi - x) & \text{si} \quad 0 \le x < \pi \end{cases}$$

Graficamente,



Ahora que conocemos la función $f(x)$ en $(-\pi, \pi)$, la extendemos periódicamente con período $T = 2\pi$.



Hallemos su serie de Fourier. Ya sabemos que al ser la función impar

$$a_n = 0, \text{ para } n \in \mathbb{N}_0$$

y $\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = 1$

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{T/2} \int_0^{T/2} f(x) .sen(n\omega_0 x)\, dx, \text{ para } n \in \mathbb{N} \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x(\pi - x) .sen(nx)\, dx \\ &= -\frac{2}{n^3 \pi} \left(-2 + 2\cos(n\pi) + n\pi sen(n\pi)\right) \end{aligned}$$

recordemos que $\cos(n\pi) = (-1)^n$ y $sen(n\pi) = 0$

$$\begin{aligned} b_n &= -\frac{4}{n^3 \pi} \left(-1 + (-1)^n\right) \\ &= \begin{cases} 0 & n \text{ es par} \\ \frac{8}{n^3 \pi} & n \text{ es impar} \end{cases} \end{aligned}$$

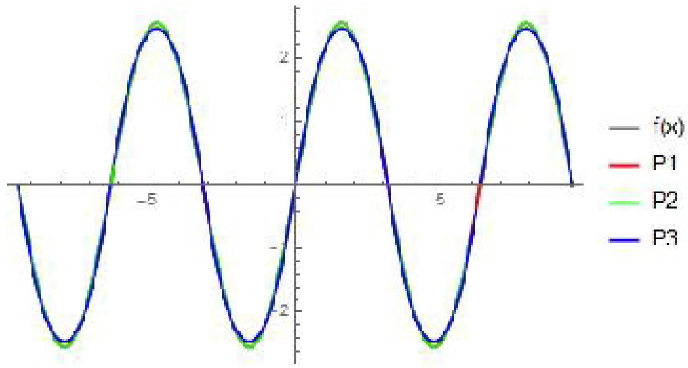
Luego, la serie de Fourier de $f(x)$ puede representarse de estas dos formas equivalentes:

$$\begin{aligned} f(x) &\sim \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{4}{n^3 \pi} \left(-1 + (-1)^n\right) .sen(nx)\right) \\ f(x) &\sim \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{8}{(2k+1)^3 \pi} .sen((2k+1)x)\right) \end{aligned}$$

Además, como $f(x)$ es continua en $(-\pi, \pi)$, por el Teorema de Dirichlet-Riemann deducimos que

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{8}{(2k+1)^3 \pi} .sen((2k+1)x)\right)$$

Graficamos $f(x)$ y los primeros tres polinomios trigonométricos



Observemos que como el coeficiente $b_n = -\frac{4}{n^3\pi}\left(-1+(-1)^n\right)$ tiende muy rápidamente a 0 cuando $n \to \infty$, sólo son necesarios muy pocos armónicos para lograr una rápida convergencia a la función.

2020, FCEN, UNCuyo