Cálculo II

Ejercicios resueltos de TP1.

1 Series de Fourier

2. Para que puedan verificar sus resultados, damos aquí los coeficientes de Fourier para cada una de las funciones.

   (a) $f_1(x) = x$, $-\pi \leq x < \pi$, $T = 2\pi$

$$\begin{aligned} a_n &= 0, \text{ para } n \in \mathbb{N}_0 \\ b_n &= \frac{2(-1)^{n+1}}{n}, \text{ para } n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

   (b) $f_2(x) = |x|$, $-2 \leq x < 2$, $T = 4$

$$\begin{aligned} a_0 &= 2 \\ a_n &= 4\frac{(-1+(-1)^n)}{\pi^2 n^2}, \text{ para } n \in \mathbb{N} \\ &= \left\{ \begin{array}{cc} 0 & n = 2k \\ \frac{-8}{\pi^2 (2k+1)^2} & n = 2k+1 \end{array} \right., \text{ para } n \in \mathbb{N}_0 \\ b_n &= 0, \text{ para } n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

   (c) $f_3(x) = \left\{ \begin{array}{ccc} 1 & si & |x| < a/2 \\ 0 & & \text{en otro caso} \end{array} \right.$, $0 < a < T$.

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{2a}{T} \\ a_n &= \frac{sen\left(\frac{an\pi}{T}\right)}{n\pi}, \text{ para } n \in \mathbb{N}_0 \\ b_n &= 0, \text{ para } n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

   (d) $f_4(x) = \left\{ \begin{array}{ccc} 0 & si & -1/3 \leq x < 0 \\ sen(3\pi x) & si & 0 \leq x < 1/3 \end{array} \right.$, $T = 2/3$

$$\begin{aligned} a_1 &= 0 \\ a_n &= \frac{1+(-1)^n}{(1-n^2)\pi}, \text{ para } n \in \mathbb{N}_0 - \{1\} \\ b_n &= 0, \text{ para } n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

   (e) $f_5(x) = |sen(\pi x)|$, $T = 2$, $-1 \leq x < 1$

$$\begin{aligned} a_1 &= 0 \\ a_n &= -2\frac{1+(-1)^n}{(1-n^2)\pi}, \text{ para } n \in \mathbb{N}_0 - \{1\} \\ b_n &= 0, \text{ para } n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

5. Sabiendo el

   Teorema de derivación: Sea $f(x)$ una función periódica, con período T, derivable a trozos y continua en $\left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right]$, tal que $f\left(-\frac{T}{2}\right) = f\left(\frac{T}{2}\right)$ y $f'(x)$ derivable a trozos en $\left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right]$. Si la serie de Fourier de $f(x)$ es

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n . \cos(n\omega_0 x) + b_n . sen(n\omega_0 x)\right) \tag{1}$$

   entonces la serie de Fourier de $f'(x)$ se obtiene derivando término a término a (1), es decir,

$$f'(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} \left(-n\omega_0 . a_n . sen(n\omega_0 x) + n\omega_0 . b_n . \cos(n\omega_0 x)\right)$$

y el

Teorema de integración: Sea $f(x)$ una función periódica, con período T, derivable a trozos en $\left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right]$. Si $a_0 = 0$ entonces la función

$$h(x) = \int_{-T/2}^{x} f(t)\, dt$$

es periódica con período T y si la serie de Fourier de f es (1) entonces la serie de Fourier de h es

$$h(x) \sim A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{b_n}{n\omega_0} . \cos(n\omega_0 x) + \frac{a_n}{n\omega_0} . sen(n\omega_0 x)\right), \qquad A_0 = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} h(x)\ dx$$

y los desarrollos obtenidos en el ejercicios 2, obtenga los desarrollos de Fourier de las siguientes funciones:

(a) $f(x) = 1$, $-\pi \leq x < \pi$, período 2π.

En el ejercicio 2 a) calculamos la serie de Fourier de $f_1(x) = x$, $-\pi \leq x < \pi$. Y sería natural pensar que si derivo

$$\frac{df_1(x)}{dx} = \frac{dx}{dx} = 1,$$

y por lo tanto derivando la serie de Fourier de $f_1(x) = x$, tenemos la de $f(x) = 1$, $-\pi \leq x < \pi$. Pero no podemos hacer esto porque una de las hipótesis del Teor. de derivación es $f_1\left(-\frac{T}{2}\right) = f_1\left(\frac{T}{2}\right)$ y

$$\begin{aligned} f_1\left(-\frac{T}{2}\right) &= f_1(-\pi) = -\pi \\ f_1\left(\frac{T}{2}\right) &= f_1(\pi) = \pi \end{aligned}$$

son distintos!!

Otra forma natural de verlo es que si integramos $f(x) = 1$, tenemos $\int f(x)\, dx = x$ pero notemos que el coeficiente de Fourier a_0 de $f(x) = 1$ es

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} 1 dx = 2 \neq 0$$

No cumple la hipótesis del Teorema de Integración!

(b) $f(x) = x^2$, $-\pi \leq x < \pi$, período 2π.

En el ejercicio 2 a) calculamos la serie de Fourier de $f_1(x) = x$, $-\pi \leq x < \pi$. Y sería natural pensar que si derivo

$$\frac{df(x)}{dx} = \frac{dx^2}{dx} = 2x,$$

y por lo tanto derivando la serie de Fourier de $f(x) = x^2$, tenemos la de $f(x) = 2x$, $-\pi \leq x < \pi$. (Sería el desarrollo de Fourier de $f_1(x) = x$, $-\pi \leq x < \pi$ multiplicado por 2).

Verifiquemos las hipótesis del Teorema de derivación. La $f(x) = x^2$ es una función periódica, con período $T = 2\pi$, derivable a trozos y continua en $[-\pi, \pi]$, tal que $f(-\pi) = \pi^2 = f(\pi)$ y $f'(x) = 2x$ es derivable a trozos en $[-\pi, \pi]$. Si proponemos que la serie de Fourier de $f(x) = x^2$ es $(\omega_0 = 1)$

$$x^2 \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n . \cos(nx) + b_n . sen(nx)\right)$$

entonces la serie de Fourier de $f'(x)$ es

$$2x \sim \sum_{n=1}^{\infty} \left(-n.a_n . sen(nx) + n.b_n . \cos(nx)\right)$$

por la propiedad de linealidad de Series de Fuorier tenemos que

$$x \sim \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{-n.a_n}{2} . sen(nx) + \frac{n.b_n}{2} . \cos(nx)\right) \tag{2}$$

Del ejercicio 2 a) tenemos que

$$x \sim \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2(-1)^{n+1}}{n} Sen(nx)\right) \tag{3}$$

Luego, comparando los coeficientes de la serie de Fourier en (2) y (3) tenemos para $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} \frac{-n.a_n}{2} &= \frac{2(-1)^{n+1}}{n} \Longrightarrow a_n = \frac{4(-1)^n}{n^2} \\ \frac{n.b_n}{2} &= 0 \Longrightarrow b_n = 0 \end{aligned}$$

Es decir,

$$x^2 \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4(-1)^n}{n^2} . \cos(nx) + 0 . sen(nx)\right)$$

Calculemos el único coeficiente que nos falta,

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 dx = \frac{1}{\pi} \left.\frac{x^3}{3}\right|_{-\pi}^{\pi} = \frac{2}{3}\pi^2$$

Así,

$$x^2 \sim \frac{1}{3}\pi^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4(-1)^n}{n^2} . \cos(nx) + 0 . sen(nx)\right)$$

2020, FCEN, UNCuyo