Elementos de Cálculo II

1. Series de Potencias. Serie de Taylor.

En los ejercicios donde aparece se debe utilizar un software para calcular, graficar, etc según corresponda.

1 Sucesiones y series numéricas

1. Dadas las siguientes sucesiones:

   i) $a_n = \frac{n}{n+1}$, $n \geq 0$ ii) $a_n = \frac{1-2n}{n^2}$
   iii) $a_n = 3 + 5n, n \geq 1$

   (a) Grafique los primeros términos de la sucesión.
   (b) Indique visualmente a que valor converge.

2. Teniendo en cuenta el siguiente resultado:

$$\lim_{n\to\infty} r^n = \begin{cases} 0 & \text{si } |r| < 1 \\ 1 & \text{si } r = 1 \\ \text{no existe} & \text{si } r = -1 \\ \infty & \text{si } |r| > 1 \end{cases}$$

   y las propiedades de límite, calcule los siguientes límites de sucesiones. Justifique cada paso.

   (a) $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2n} + \frac{2}{3n^2} + \left(\frac{2}{3}\right)^n\right)$
   (b) $\lim_{n\to\infty} \frac{(-\pi)^n}{5^n} + 3^{n/2}$

3. Utilice propiedades de límite de sucesiones para calcular el límite $\lim_{n\to\infty} a_n$ para cada una de las siguientes sucesiones.

   (a) $a_n = \frac{4n^2+2}{n^2+3n-1}$ (b) $a_n = (-1)^n \frac{n}{n+2}$ (c) $a_n = \frac{2n+1}{2} - \frac{3n^2-5n}{3n+4}$
   (d) $a_n = \frac{2n^2-5n+7}{n+3} - 2n$ (e) $a_n = \sqrt{n^2-n} - n$ (f) $a_n = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$, $x \in \mathbb{R}$

4. Para la serie geométrica $\sum_{n=0}^{\infty} a.r^n$

   (a) Calcule la expresión general de la sucesión de sumas parciales.
   (b) Calcule, si existe, la suma de cada serie.
   (c) Utilizando el inciso (b) indique si las siguientes series convergen o divergen. Si converge, calcule su suma.

$$\text{(i)} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n \qquad \text{(ii)} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^n \qquad \text{(iii)} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

5. Conceptos teóricos y ejemplos para investigar en libros de Cálculo.

   (a) Enuncie la condición necesaria de convergencia.
   (b) Defina convergencia absoluta y condicional.

(c) (opcional) Demuestre que si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge absolutamente entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.

(d) Enuncie el Criterio de la integral y analice la convergencia de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} (1/n^p)$, $p \in \mathbb{R}$.

(e) Enuncie el Criterio de comparación vía límite y analice la convergencia de las siguientes series

$$\text{(i)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{sen\,(n)}{n^2} \qquad \text{(ii)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)\,(n+1)} \qquad \text{(iii)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n\,(n+1)}}$$

(f) Enuncie el Criterio del cociente o de D'Alambert y analice la convergencia de las siguientes series

$$\text{(i)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^n}{3^n.n!} \qquad \text{(ii)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2.5.8...\,(3n-1)}{1.5.9...\,(4n-3)}$$

(g) Enuncie el Criterio de la raíz o de Cauchy y analice la convergencia de las siguientes series

$$\text{(i)} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{3n-1}\right)^n \qquad \text{(ii)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{(2n+1)^n} \qquad \text{(iii)} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n}{3n+1}\right)^n$$

(h) Enuncie el Criterio de la series alternadas o de Leibniz. Analice si la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$$

converge absoluta o condicionalmente o si diverge.

6. Determine si las siguientes series convergen o divergen. Si converge, indique si es absoluta o condicionalmente.

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n^3} + \left(\frac{1}{2}\right)^n\right)$ (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n}$ (c) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} + \left(\frac{5}{7}\right)^n\right)$
(d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(2n+1)^2}$ (e) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{20^n}{n+1}$

2 Serie de potencias.

1. Defina Serie de potencia e intervalo de convergencia.

2. Analice el intervalo de convergencia de cada una de las siguientes series de potencia. Para ello, utilice los siguientes límites especiales

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{p} = 1,\ p > 0 \text{ constante} \qquad \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!} = \infty$$
$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$$

(a) $\sum_{n=0}^{\infty} (x-2)^n$

(b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+4)^n}{n}$

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} n^p\,(x-3)^n$. (Ayuda: determine para qué valores de p converge y para cuales diverge)

(d) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{y^n}{n!}$.

(e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n-1)!} t^{2n-1.}$

3. .

(a) Defina Polinomio de Taylor y Serie de Taylor.

(b) Halle el polinomio de Taylor de grado 1, 2 y n para las funciones e^x y $sen\,(x)$ en $x = 0$. Grafíquelos.

(c) Calcule el valor de $e^{0.1}$ con una aproximación de tercer orden. Acote el error que se comete.

4. Verifique los siguientes desarrollos en series de Taylor. Es decir, compruebe la expresión general del coeficiente del desarrollo de Taylor y el intervalo de convergencia

   (a) $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$, $|x| < 1$.

   (b) $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$, $x \in \mathbb{R}$

   (c) $senx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}, x \in \mathbb{R}$

   (d) $\cos x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}, x \in \mathbb{R}$

2020, FCEN, UNCuyo