UNCUYO UNIVERSIDAD NACIONAL DE CUYO

SEGUNDO PARCIAL RESUELTO

FCEN FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
Naturaleza - Ciencia - Humanismo

ASIGNATURA	Cálculo I	AÑO	2019	TEMA	1	Nº HOJAS	
APELLIDO Y NOMBRE						LEGAJO	

Instrucciones: coloque nombre y apellido **en cada hoja** que va a entregar. Lea atentamente cada consigna. Desarrolle detalladamente y con letra clara los ejercicios para obtener el puntaje completo. Puede usar lápiz o tinta para desarrollar los ejercicios, pero el **resultado final debe estar en tinta**. No se permite corrector, tache si es necesario. Cuando finalice, indique el número de hojas extra empleadas en el encabezado. Debe obtener un **mínimo de 60 puntos para aprobar** el examen. Dispone de **2 horas** para su resolución. ÉXITO!

25

1. Dada $f(x) = -\frac{1}{x^4+1}$ determine:

a. Puntos críticos e intervalos de crecimiento y decrecimiento. **(5p)**

b. Extremos relativos y absolutos. **(5p)**

c. Intervalos de concavidad y puntos de inflexión. **(5p)**

d. Emplee la información de los incisos a) al c) para bosquejar la gráfica de $f(x)$. Indique en el gráfico cada punto de interés (máximos y mínimos, puntos de inflexión si los hay, etc.) **(5p)**

Nota: si sólo se bosqueja la gráfica sin el análisis previo se considerará 0p

e. Emplee la información de los incisos a) al c) para bosquejar la gráfica de $f'(x)$. **(5p)**

a. $f'(x) = \frac{4x^3}{(x^4+1)^2}$ punto crítico en $x = 0$; Decreciente en $(-\infty; 0)$; Creciente en $(0; +\infty)$

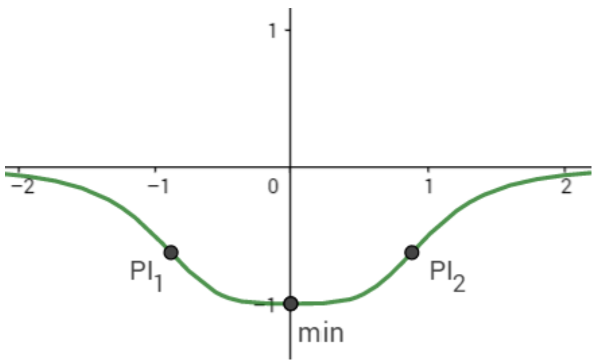
b. mínimo absoluto y relativo $f(0) = -1$; No tiene máximos absolutos ni relativos

c. $f''(x) = \frac{4x^2(-5x^4+3)}{(x^4+1)^3}$; puntos de inflexión en $x_1 = -\sqrt[4]{3/5} \approx -0.88$; $x_2 = \sqrt[4]{3/5} \approx 0.88$

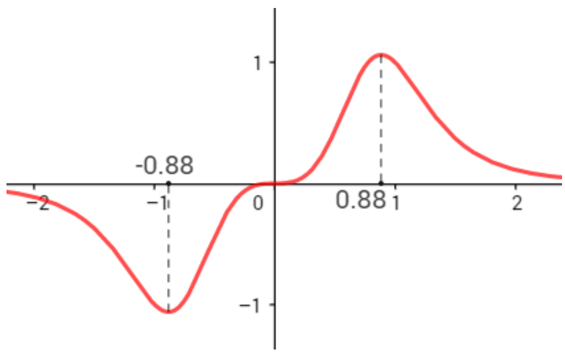
($x = 0$ no es PI)

Cóncava haca abajo: $\left(-\infty; -\sqrt[4]{3/5}\right) \cup \left(\sqrt[4]{3/5}; \infty\right)$; cóncava hacia arriba $\left(-\sqrt[4]{3/5}\,;\sqrt[4]{3/5}\right)$

d. $f(x)$



e. $f'(x)$



20

2. Calcule la derivada de: $y = \left(\frac{\cos(3x)}{x^2+2}\right)^{\sqrt{x}}$ (exprese el resultado en función de x)

$$lny = \sqrt{x}\, ln\left(\frac{\cos(3x)}{x^2+2}\right)$$

$$\frac{1}{y}y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}\, ln\left(\frac{\cos(3x)}{x^2+2}\right) + \sqrt{x}\left(\frac{x^2+2}{\cos(3x)}\right) * \left[\frac{-3sen(3x)(x^2+2) - \cos(3x)\,2x}{(x^2+2)^2}\right]$$

$$\frac{1}{y}y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}\, ln\left(\frac{\cos(3x)}{x^2+2}\right) - \sqrt{x}\left(3\tan(3x) + \frac{2x}{x^2+2}\right)$$

$$y' = \left(\frac{\cos(3x)}{x^2+2}\right)^{\sqrt{x}}\left[\frac{1}{2\sqrt{x}}\, ln\left(\frac{\cos(3x)}{x^2+2}\right) - \sqrt{x}\left(3\tan(3x) + \frac{2x}{x^2+2}\right)\right]$$

ASIGNATURA	Cálculo I	AÑO	2019	TEMA	1	Nº HOJAS	
APELLIDO Y NOMBRE						LEGAJO	

15

3. Dadas las curvas $y^2 = x^3$ y $2x^2 + 3y^2 = 5$, demuestre que las mismas son ortogonales en al menos un punto.

Primero encontramos sus puntos de intersección:

$$\begin{cases} y^2 = x^3 \\ 2x^2 + 3y^2 = 5 \end{cases} \Longrightarrow 3x^3 + 2x^2 - 5 = 0 \Longrightarrow \begin{matrix} x_1 = 1 \\ y_1 = 1 \end{matrix}; \begin{matrix} x_2 = 1 \\ y_2 = -1 \end{matrix}$$

Luego, calculamos las pendientes de las rectas tangentes en un punto de intersección P1(1,1) (o bien P2(1,-1))

Para la curva $y^2 = x^3$:

$$2y\,y' = 3x^2 \Rightarrow y' = \frac{3x^2}{2y} \Rightarrow m_1 = y'(1,1) = \frac{3}{2}$$

Para la curva $2x^2 + 3y^2 = 5$

$$4x + 6y\,y' = 0 \Rightarrow y' = -\frac{2x}{3y} \Rightarrow m_2 = y'(1,1) = -\frac{2}{3}$$

Entonces, en el punto P1(1,1) se cumple que $m_1 = -\frac{1}{m_2}$, es decir, las rectas tangentes son perpendiculares entre sí. Por lo tanto, las curvas son ortogonales en ese punto (ídem con P2(1,-1))

20

4. Se va a construir una cisterna de base cuadrada para contener 2m³ de agua. Si la tapa metálica cuesta el triple que los lados y la base de concreto, ¿cuáles son las dimensiones más económicas de la cisterna? (*Verifique el resultado empleando el criterio correspondiente, aproxime su respuesta a dos decimales*).

Definimos variables:

x: lado de la base cuadrada ; y: altura de la cisterna

Volumen de la cisterna: $V = x^2 y = 2\ [m^3] \quad \Rightarrow y = 2/x^2$

Costo en función de los metros cuadrados de material: $C = x^2 + 4xy + 3x^2 = 4x^2 + 4xy$

$$C(x) = 4x^2 + \frac{8}{x}$$

$$C'(x) = 8x - \frac{8}{x^2}$$

$$C'(x) = 0 \Rightarrow \boldsymbol{x = \sqrt[3]{1} = 1\ [m]}$$

$$\boldsymbol{y = 2\ [m]}$$

Verificación:

$$C''(x) = 8 + \frac{8}{x^3}$$

$$C''(1) = 8 + \frac{8}{1^3} > 0$$

Corresponde a un mínimo costo

10

5. ¿Es posible afirmar que la función $f(x) = 2x^3 + 3x - 3$ tiene uno y sólo un cero? Justifique. Si utiliza algún teorema, enuncie sus hipótesis y tesis.

Como $f(x)$ es una función polinómica, no presenta discontinuidad para ningún valor real y es una función de curva "suave" sin ningún punto anguloso, por lo tanto, se puede afirmar que es continua y derivable en todo $\mathbb{R}$, Además, dado que $f(0) = -3 < 0$ y $f(1) = 2 > 0$, el teorema del valor intermedio nos indica que f cruza al eje x al menos una vez.

Si $f(x)$ tuviera más de un cero, tendríamos dos valores $x = a$ y $x = b$ tales que $f(a) = f(b) = 0$, y por Teorema de Rolle, existiría un valor $x = c$ tal que $f'(c) = 0$.

Como $f'(x) = 6x^2 + 3 \neq 0$, entonces no puede haber dos valores $x = a$ y $x = b$ tales que $f(a) = f(b)$

Teorema de Rolle: Hipótesis: $f(x)$ continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b), $f(a) = f(b)$

Tesis: Existe al menos un valor $x = c\ \in (a, b)$ tal que $f'(c) = 0$

10

6. Resuelva el siguiente límite: $\lim\limits_{x \to 1^+} (lnx)^{x-1}$ indet $(0)^0$

$$\lim_{x\to 1^+} (lnx)^{x-1} = \exp[\lim_{x\to 1}(x-1)\ln(\ln x)] \quad \text{indet } 0.(\infty)$$

$$= \exp\left[\lim_{x\to 1^+} \frac{ln(lnx)}{1/(x-1)}\right] \quad indet\,\frac{\infty}{\infty}, aplico\ L'Hopital$$

$$= \exp\left[\lim_{x\to 1^+} \frac{\left(\frac{1}{lnx}\right) 1/x}{-1/(x-1)^2}\right] = \exp\left[\lim_{x\to 1^+} -\frac{(x-1)^2}{xlnx}\right] \quad indet\,\frac{0}{0}, aplico\ L'H$$

$$= \exp\left[\lim_{x\to 1^+} -\frac{2(x-1)}{lnx+1}\right] = e^0 = 1$$

ASIGNATURA	Cálculo I	AÑO	2019	TEMA	2	Nº HOJAS	
APELLIDO Y NOMBRE						LEGAJO	

Instrucciones: coloque nombre y apellido **en cada hoja** que va a entregar. Lea atentamente cada consigna. Desarrolle detalladamente y con letra clara los ejercicios para obtener el puntaje completo. Puede usar lápiz o tinta para desarrollar los ejercicios, pero el **resultado final debe estar en tinta**. No se permite corrector, tache si es necesario. Cuando finalice, indique el número de hojas extra empleadas en el encabezado. Debe obtener un **mínimo de 60 puntos para aprobar** el examen. Dispone de **2 horas** para su resolución. ÉXITO!

25

1. Dada $f(x) = \frac{1}{x^4+1}$ determine:

a. Puntos críticos e intervalos de crecimiento y decrecimiento. **(5p)**

b. Extremos relativos y absolutos. **(5p)**

c. Intervalos de concavidad y puntos de inflexión. **(5p)**

d. Emplee la información de los incisos a) al c) para bosquejar la gráfica de $f(x)$. Indique en el gráfico cada punto de interés (máximos y mínimos, puntos de inflexión si los hay, etc.) **(5p)**

Nota: si sólo se bosqueja la gráfica sin el análisis previo se considerará 0p

e. Emplee la información de los incisos a) al c) para bosquejar la gráfica de $f'(x)$. **(5p)**

a. $f'(x) = -\frac{4x^3}{(x^4+1)^2}$ punto crítico en $x = 0$; Creciente en $(-\infty; 0)$; Decreciente en $(0; +\infty)$

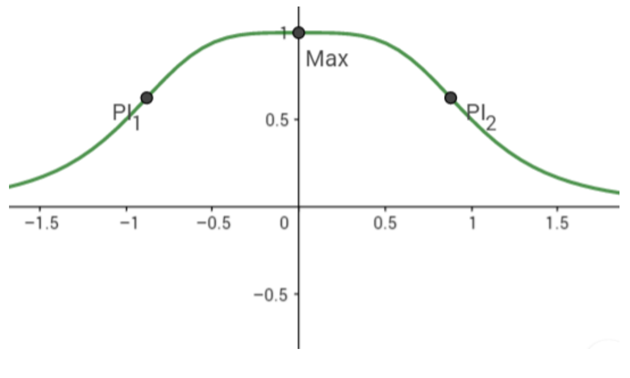
b. máximo absoluto y relativo $f(0) = 1$; No tiene mínimos absolutos ni relativos

c. $f''(x) = -\frac{4x^2(-5x^4+3)}{(x^4+1)^3}$; puntos de inflexión en $x_1 = -\sqrt[4]{3/5} \approx -0.88$; $x_2 = \sqrt[4]{3/5} \approx 0.88$

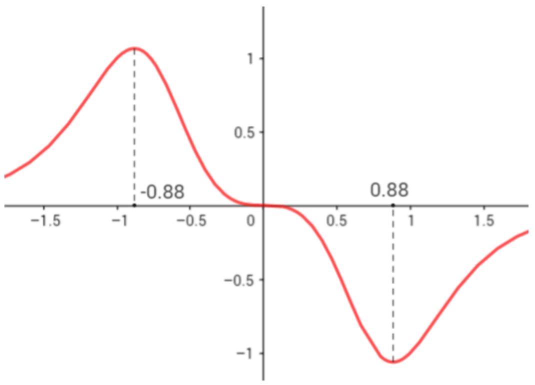
($x = 0$ no es PI)

Cóncava haca arriba: $\left(-\infty; -\sqrt[4]{3/5}\right) \cup \left(\sqrt[4]{3/5}; \infty\right)$; cóncava hacia abajo $\left(-\sqrt[4]{3/5}\,; \sqrt[4]{3/5}\right)$

d. $f(x)$



e. $f'(x)$



20

2. Calcule la derivada de: $y = \left(\frac{\sqrt{x}}{2-x^3}\right)^{cosx}$ (exprese el resultado en función de x)

$$lny = \cos(x) ln\left(\frac{\sqrt{x}}{2-x^3}\right)$$

$$\frac{1}{y}y' = -sen(x)\, ln\left(\frac{\sqrt{x}}{2-x^3}\right) + \cos(x)\left(\frac{2-x^3}{\sqrt{x}}\right)\left[\frac{\frac{2-x^3}{2\sqrt{x}} - \sqrt{x}(-3x^2)}{(2-x^3)^2}\right]$$

$$y' = \left(\frac{\sqrt{x}}{2-x^3}\right)^{cosx}\left[-sen(x)\, ln\left(\frac{\sqrt{x}}{2-x^3}\right) + \left(\frac{\cos(x)}{2x}\right) + \frac{3x^2\cos(x)}{(2-x^3)}\right]$$

15

3. Dadas las curvas $y^2 = -x^3$ y $2x^2 + 3y^2 = 5$, demuestre que las mismas son ortogonales en al menos un punto.

Primero encontramos sus puntos de intersección:

$$\begin{cases} y^2 = -x^3 \\ 2x^2 + 3y^2 = 10 \end{cases} \Longrightarrow -3x^3 + 2x^2 - 5 = 0 \Longrightarrow \begin{matrix} x_1 = -1 \\ y_1 = 1 \end{matrix} ; \begin{matrix} x_2 = -1 \\ y_2 = -1 \end{matrix}$$

Luego, calculamos las pendientes de las rectas tangentes en un punto de intersección P1(-1,1)

(o bien P2(-1,-1))

Para la curva $y^2 = -x^3$:

$$2y\,y' = -3x^2 \Rightarrow y' = -\frac{3x^2}{2y} \Rightarrow$$

$$m_1 = y'(-1,1) = -\frac{3}{2}$$

Para la curva $2x^2 + 3y^2 = 5$

$$4x + 6y\,y' = 0 \Rightarrow y' = -\frac{2x}{3y} \Rightarrow m_2 = y'(-1,1) = \frac{2}{3}$$

Entonces, en el punto P1(-1,1) se cumple que $m_1 = -\frac{1}{m_2}$, es decir, las rectas tangentes son perpendiculares entre sí. Por lo tanto, las curvas son ortogonales en ese punto (ídem con P2(-1,-1))

20

4. Se va a construir una cisterna de base cuadrada para contener 5m^3 de agua. Si la tapa metálica cuesta el doble que los lados y la base de concreto, ¿cuáles son las dimensiones más económicas de la cisterna? (*Verifique el resultado empleando el criterio correspondiente, aproxime su respuesta a dos decimales*).

Definimos variables:

x: lado de la base cuadrada ; y: altura de la cisterna

Volumen de la cisterna: $V = x^2 y = 5\ [m^3] \quad \Rightarrow y = 5/x^2$

Costo en función de los metros cuadrados de material: $C = x^2 + 4xy + 2x^2 = 3x^2 + 4xy$

$$C(x) = 3x^2 + \frac{20}{x}$$

$$C'(x) = 6x - \frac{20}{x^2}$$

$$C'(x) = 0 \Rightarrow \boldsymbol{x = \sqrt[3]{20/6} = 1.49\ [m]}$$

$$\boldsymbol{y = 2.24\ [m]}$$

Verificación:

$$C''(x) = 6 + \frac{40}{x^3}$$

$$C''(1.49) = 6 + \frac{40}{1.49^3} > 0$$

Corresponde a un mínimo costo

10

5. ¿Es posible afirmar que la función $f(x) = x^5 + 6x + 2$ tiene uno y sólo un cero? Justifique. Si utiliza algún teorema, enuncie sus hipótesis y tesis.

Como $f(x)$ es una función polinómica, no presenta discontinuidad para ningún valor real y es una función de curva "suave" sin ningún punto anguloso, por lo tanto, se puede afirmar que es continua y derivable en todo $\mathbb{R}$. Además, dado que $f(-1) = -5 < 0$ y $f(0) = 2 > 0$, el teorema del valor intermedio nos indica que f cruza al eje x al menos una vez.

Si $f(x)$ tuviera más de un cero, tendríamos dos valores $x = a$ y $x = b$ tales que $f(a) = f(b) = 0$, y por Teorema de Rolle, existiría un valor $x = c$ tal que $f'(c) = 0$.

Como $f'(x) = 5x^4 + 6 \neq 0$, entonces no puede haber dos valores $x = a$ y $x = b$ tales que $f(a) = f(b)$

Teorema de Rolle: Hipótesis: $f(x)$ continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b), $f(a) = f(b)$

Tesis: Existe al menos un valor $x = c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = 0$

10

6. Resuelva el siguiente límite: $\lim\limits_{x\to 1^+} (x-1)^{lnx}$ indet 0^0

$$\lim_{x\to 1^+} (x-1)^{lnx} = \exp[\lim_{x\to 1^+} (lnx)ln(x-1)] \quad \text{indet } 0.(\infty)$$

$$= \exp\left[\lim_{x\to 1^+} \frac{ln(x-1)}{1/lnx}\right] \quad indet \frac{\infty}{\infty}, aplico\ L'Hopital$$

$$= \exp\left[\lim_{x\to 1^+} \frac{\left(\frac{1}{x-1}\right)}{-\frac{1}{(lnx)^2} * \frac{1}{x}}\right] = \exp\left[\lim_{x\to 1^+} -\frac{(lnx)^2}{x(x-1)}\right] \quad indet \frac{0}{0}, aplico\ L'H$$

$$= \exp\left[\lim_{x\to 1^+} -\frac{2(lnx) * 1/x}{2x}\right] = \exp\left[\lim_{x\to 1^+} -\frac{lnx}{x^2}\right] = e^0 = 1$$