	SEGUNDO PARCIAL RESUELTO						
ASIGNATURA	Elementos de Cálculo I	AÑO	2019	TEMA	1	Nº HOJAS	
APELLIDO Y NOMBRE						LEGAJO	

Instrucciones: coloque nombre y apellido **en cada hoja** que va a entregar. Lea atentamente cada consigna. Desarrolle detalladamente y con letra clara los ejercicios para obtener el puntaje completo. Puede usar lápiz o tinta para desarrollar los ejercicios, pero el **resultado final debe estar en tinta**. No se permite corrector, tache si es necesario. Cuando finalice, indique el número de hojas extra empleadas en el encabezado. Debe obtener un **mínimo de 60 puntos para aprobar** el examen. Dispone de **2 horas** para su resolución. ÉXITO!

25

1. Dada $f(x) = -2(x-3)^3 + 3(x-3)^2$ definida en el intervalo $[2;4.3]$ determine:

a. Puntos críticos e intervalos de crecimiento y decrecimiento. **(5p)**

b. Extremos relativos y absolutos. **(5p)**

c. Intervalos de concavidad y puntos de inflexión. **(5p)**

d. Emplee la información de los incisos a) al c) para bosquejar la gráfica de $f(x)$. Indique en el gráfico cada punto de interés (máximos y mínimos, puntos de inflexión si los hay, etc.) **(5p)**

Nota: si sólo se bosqueja la gráfica sin el análisis previo se considerará 0p

e. Emplee la información de los incisos a) al c) para bosquejar la gráfica de $f'(x)$. **(5p)**

a. $f'(x) = -6(x-3)^2 + 6(x-3)$, puntos críticos en $x_1 = 3$; $x_2 = 4$

creciente en $(3;4)$; decreciente en $(2;3) \cup (4;4.3)$

b. Mínimo absoluto y relativo $f(x_1) = 0$; máximo relativo en $f(x_2) = 1$

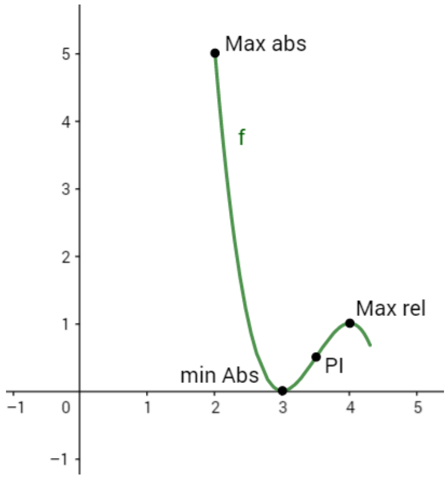
Analizamos extremos del intervalo en el que está definida la función:

$f(2) = 5$ es máximo absoluto; $f(4.3) = 0.7$ no es valor extremo

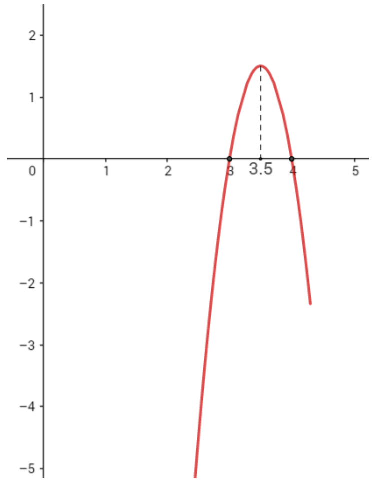
c. $f''(x) = -12(x-3) + 6$, Punto de inflexión $x = 3.5$

cóncava hacia arriba $(2 ; 3.5)$; cóncava hacia abajo $(3.5 ; 4.3)$

d. $f(x)$



e. $f'(x)$



20

2. Calcule la derivada de: $y = \cos\left(\frac{ln(x)}{x}\right)$

$$y' = -\text{sen}\left(\frac{ln(x)}{x}\right) * \left[\frac{1 - lnx}{x^2}\right]$$

15

3. Encuentre la ecuación de la recta tangente a la curva $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} = 1$, que pasa por el punto de tangencia $P(1;2\sqrt{3})$.

Derivada implícita para obtener la pendiente de la recta tangente:

$$\frac{2x}{4} + \frac{2yy'}{16} = 0 \Longrightarrow y' = -\frac{4x}{y}$$

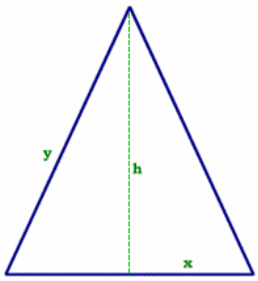
Reemplazo las coordenadas de $P(1;2\sqrt{3})$ para obtener la pendiente: $m = -\frac{4}{2\sqrt{3}} = -\frac{2\sqrt{3}}{3}$

La ecuación de la recta es: $y - 2\sqrt{3} = -\frac{2\sqrt{3}}{3}(x-1)$ o bien $\boldsymbol{y = -\frac{2\sqrt{3}}{3}x + \frac{8\sqrt{3}}{3}}$

UNCUYO UNIVERSIDAD NACIONAL DE CUYO		SEGUNDO PARCIAL RESUELTO			FCEN FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES Naturaleza - Ciencia - Humanismo	
ASIGNATURA	Elementos de Cálculo I	**AÑO**	2019	**TEMA**	1	**Nº HOJAS**
APELLIDO Y NOMBRE					**LEGAJO**	

20

4. Calcular la base y la altura del triángulo isósceles de perímetro 8 y área máxima. (*Verifique el resultado empleando el criterio correspondiente, aproxime su respuesta a dos decimales*).



Definimos variables:

x: mitad de la base del triángulo ; y: lado del triángulo (por ser isósceles tiene dos lados iguales)

Perímetro $P = 2x + 2y = 8 \implies y = 4 - x$

Relación entre lados y altura: $y^2 = x^2 + h^2 \implies h = \sqrt{y^2 - x^2} = \sqrt{(4-x)^2 + x^2}$

Área $A = \frac{2xh}{2} = xh \implies A(x) = x\sqrt{16 - 8x + x^2 - x^2} = 2x\sqrt{4-2x}$

$$A'(x) = 2\sqrt{4-2x} + \frac{2x}{2\sqrt{4-2x}}(-2) = 2\sqrt{4-2x} - \frac{2x}{\sqrt{4-2x}} = \frac{2(4-2x) - 2x}{\sqrt{4-2x}}$$

$$A'(x) = \frac{8-6x}{\sqrt{4-2x}} = 0 \implies \boldsymbol{x = \frac{4}{3}}\ ; \boldsymbol{y = \frac{8}{3}}$$

Verificamos:

$$A''(x) = \left[-6\sqrt{4-2x} - \frac{8-6x}{2\sqrt{4-2x}}(-2)\right]\frac{1}{4-2x} = \frac{6x-16}{\sqrt{4-2x}(4-2x)} \implies A''\left(\frac{4}{3}\right) = -3\sqrt{3} < 0 \implies es\ máximo$$

10

5. Compruebe que la función $f(x) = x^2 + 4x + 1$ satisface las tres hipótesis del teorema de Rolle en el intervalo [-3 ; -1]. A continuación, determine todos los números $x = c$ que satisfacen la conclusión de dicho teorema.

Teorema de Rolle: Hipótesis: $f(x)$ continua en $[a,b]$, derivable en (a,b), $f(a) = f(b)$

Tesis: Existe al menos un valor $x = c \in (a,b)$ tal que $f'(c) = 0$

Como $f(x)$ es una función polinómica, no presenta discontinuidad para ningún valor real y es una función de curva "suave" sin ningún punto anguloso, por lo tanto, se puede afirmar que es continua y derivable en todo $\mathbb{R}$, y cumple las hipótesis de continuidad en el [-3 ; -1] y derivabilidad en (-3 ; -1). Además, $f(-3) = f(-1) = -2$ **cumple con las tres hipótesis**

$$f'(x) = 2x + 4 \ \Rightarrow\ f'(c) = 0 \Rightarrow \boldsymbol{c = -2} \in (\boldsymbol{-3}\ ; \boldsymbol{-1})$$

10

6. Resuelva el siguiente límite:

$$\lim_{x\to 0}\left[\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right]^x \quad \textbf{indet } \mathbf{0^0}$$

$$= \exp\left\{\lim_{x\to 0} x\ln\left[\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right]\right\} \quad \textbf{indet } \mathbf{0\infty}$$

$$= \exp\left\{\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left[\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right]}{1/x}\right\} \quad \textbf{indet}\frac{\infty}{\infty},\ aplico\ L'Hopital$$

$$= \exp\left\{\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}\left(-sen\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right)(-1)}{-1/x^2}\right\} = \exp\left\{\lim_{x\to 0} - sen\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\frac{x^2}{\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}\right\} \quad ind\frac{0}{0}\ ; L.H.$$

$$\exp\left\{\lim_{x\to 0}\left[-sen\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right]\lim_{x\to 0}\left[\frac{x^2}{\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}\right]\right\} \quad ind\frac{0}{0}\ ; L.H.$$

$$\exp\left\{(-1)\lim_{x\to 0}\frac{2x}{-sen\left(\frac{\pi}{2} - x\right)(-1)}\right\} = e^0 = 1$$

UNCUYO UNIVERSIDAD NACIONAL DE CUYO

SEGUNDO PARCIAL RESUELTO

FCEN FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
Naturaleza - Ciencia - Humanismo

ASIGNATURA	Elementos de Cálculo I	**AÑO**	2019	**TEMA**	2	**Nº HOJAS**	
APELLIDO Y NOMBRE						**LEGAJO**	

Instrucciones: coloque nombre y apellido **en cada hoja** que va a entregar. Lea atentamente cada consigna. Desarrolle detalladamente y con letra clara los ejercicios para obtener el puntaje completo. Puede usar lápiz o tinta para desarrollar los ejercicios, pero el **resultado final debe estar en tinta**. No se permite corrector, tache si es necesario. Cuando finalice, indique el número de hojas extra empleadas en el encabezado. Debe obtener un **mínimo de 60 puntos para aprobar** el examen. Dispone de **2 horas** para su resolución. ÉXITO!

25

1. Dada $f(x) = 6x^3 + (1-2x)^2$ definida en el intervalo [-1; 1] determine:
a. Puntos críticos e intervalos de crecimiento y decrecimiento. **(5p)**
b. Extremos relativos y absolutos. **(5p)**
c. Intervalos de concavidad y puntos de inflexión. **(5p)**
d. Emplee la información de los incisos a) al c) para bosquejar la gráfica de $f(x)$. Indique en el gráfico cada punto de interés (máximos y mínimos, puntos de inflexión si los hay, etc.) **(5p)**

Nota: si sólo se bosqueja la gráfica sin el análisis previo se considerará 0p

e. Emplee la información de los incisos a) al c) para bosquejar la gráfica de $f'(x)$. **(5p)**

a. $f'(x) = 18x^2 + 8x - 4$, puntos críticos en $x_1 = -\frac{2}{9} + \frac{\sqrt{22}}{9} \approx 0.30$; $x_2 = -\frac{2}{9} - \frac{\sqrt{22}}{9} \approx -0.74$

creciente en $(-1; -0.74) \cup (0.30; 1)$; decreciente en $(-0.74; 0.30)$

b. Mínimo absoluto y relativo $f(x_1) = 0.32$; máximo relativo en $f(x_2) = 3.72$

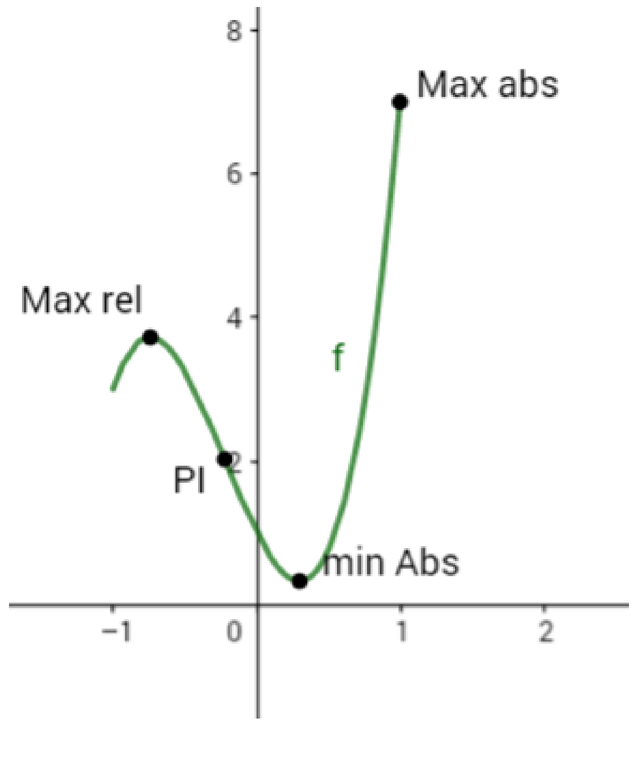
Analizamos extremos del intervalo en el que está definida la función:

$f(1) = 7$ es máximo absoluto; $f(-1) = 3$ no es valor extremo

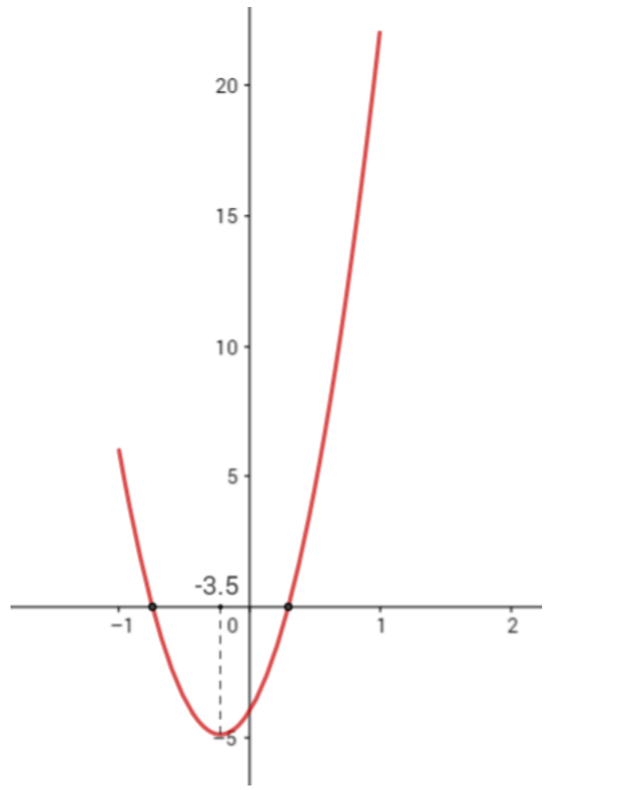
c. $f''(x) = 36x + 8$, Punto de inflexión $x = -\frac{2}{9} = -3.5$

cóncava hacia abajo (-1 ;-2/9) ; cóncava hacia arriba (-2/9 ; 1)

d. $f(x)$



e. $f'(x)$



20

2. Calcule la derivada de: $y = sen(\sqrt{x} * \ln(x))$ (exprese el resultado en función de x)

$$y' = cos(\sqrt{x}\ \ln(x))\left[\frac{\ln(x)}{2\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}}{x}\right]$$

UNCUYO UNIVERSIDAD NACIONAL DE CUYO	SEGUNDO PARCIAL RESUELTO					FCEN FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES Naturaleza - Ciencia - Humanismo	
ASIGNATURA	Elementos de Cálculo I	**AÑO**	2019	**TEMA**	2	**Nº HOJAS**	
APELLIDO Y NOMBRE						**LEGAJO**	

15

3. Encuentre la ecuación de la recta tangente a la curva $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{16}=1$, que pasa por el punto de tangencia $P(4;4\sqrt{3})$.

Derivada implícita para obtener la pendiente de la recta tangente:

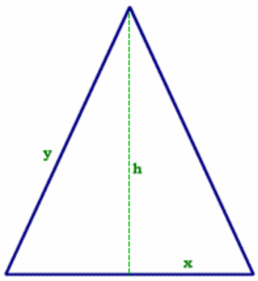
$$\frac{2x}{4}-\frac{2yy'}{16}=0 \Rightarrow y'=\frac{4x}{y}$$

Reemplazo las coordenadas de $P(4;4\sqrt{3})$ para obtener la pendiente: $m=\frac{16}{4\sqrt{3}}=\frac{4\sqrt{3}}{3}$

La ecuación de la recta es: $y-4\sqrt{3}=\frac{4\sqrt{3}}{3}(x-4)$ o bien $\boldsymbol{y=\frac{4\sqrt{3}}{3}x-\frac{4\sqrt{3}}{3}}$

20

4. Calcular la base y la altura del triángulo isósceles de perímetro 10 y área máxima. (*Verifique el resultado empleando el criterio correspondiente, aproxime su respuesta a dos decimales*).



Definimos variables:

x: mitad de la base del triángulo ; y: lado del triángulo (por ser isósceles tiene dos lados iguales)

Perímetro $P=2x+2y=10 \Rightarrow y=5-x$

Relación entre lados y altura: $y^2=x^2+h^2 \Rightarrow h=\sqrt{y^2-x^2}=\sqrt{(5-x)^2+x^2}$

Área $A=\frac{2xh}{2}=xh$

$A(x)=x\sqrt{25-10x+x^2-x^2}=x\sqrt{25-10x}$

$$A'(x)=\sqrt{25-10x}+\frac{x}{2\sqrt{25-10x}}(-10)=\sqrt{25-10x}-\frac{5x}{\sqrt{25-10x}}=\frac{25-10x-5x}{\sqrt{25-10x}}$$

$$A'(x)=\frac{25-15x}{\sqrt{25-10x}}=0 \Rightarrow \boldsymbol{x=5/3\,;\,y=10/3}$$

Verificamos:

$$A''(x)=\frac{-15\sqrt{25-10x}-(25-15x)\frac{1}{2}(25-10x)^{-\frac{1}{2}}(-10)}{25-10x}=\frac{1}{(25-10x)}\frac{-15(25-10x)-10(25-15x)}{2\sqrt{25-10x}}=\frac{-625+300x}{2\sqrt{25-10x}(25-10x)}$$

$$A''(5/3)=-\frac{1125}{250\sqrt{3}}<0 \Rightarrow es\ máximo$$

10

5. Compruebe que la función $f(x)=x^2-2x+13$ satisface las tres hipótesis del teorema de Rolle en el intervalo $[0;2]$. A continuación, determine todos los números $x=c$ que satisfacen la conclusión de dicho teorema.

Teorema de Rolle: Hipótesis: $f(x)$ continua en $[a,b]$ y derivable en (a,b), $f(a)=f(b)$

Tesis: Existe al menos un valor $x=c\in(a,b)$ tal que $f'(c)=0$

Como $f(x)$ es una función polinómica, no presenta discontinuidad para ningún valor real y es una función de curva "suave" sin ningún punto anguloso, por lo tanto, se puede afirmar que es continua y derivable en todo $\mathbb{R}$, y cumple las hipótesis de continuidad en el $[0;2]$ y derivabilidad en $(0;2)$. Además, $f(0)=f(2)=13$ **cumple con las tres hipótesis**

$$f'(x)=2x-2 \Rightarrow f'(c)=0 \Rightarrow \boldsymbol{c=1}\in(\boldsymbol{0};\boldsymbol{2})$$

10

6. Resuelva el siguiente límite: $\lim_{x\to 0}[sen(\pi-x)]^{x}$ indet 0^0

$$=\exp\left\{\lim_{x\to 0} x\ ln[sen(\pi-x)]\right\}\ indet\ 0\infty$$

$$=\exp\left\{\lim_{x\to 0}\frac{ln[sen(\pi-x)]}{1/x}\right\}\ indet\frac{\infty}{\infty},\ aplico\ L'Hopital$$

$$=\exp\left\{\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{sen(\pi-x)}(cos(\pi-x))(-1)}{-1/x^2}\right\}=\exp\left\{\lim_{x\to 0} cos(\pi-x)\frac{x^2}{sen(\pi-x)}\right\}\ ind\frac{0}{0}\ ;\ L.H.$$

$$\exp\left\{\lim_{x\to 0}[cos(\pi-x)]\lim_{x\to 0}\left[\frac{x^2}{sen(\pi-x)}\right]\right\}\ ind\frac{0}{0}\ ;\ L.H.\to\exp\left\{(-1)\lim_{x\to 0}\frac{2x}{cos(\pi-x)\,(-1)}\right\}=e^0=1$$