

Ecuaciones Diferenciales Ordinarias de valores de contorno

Temario

- Método de las diferencias finitas para EDO de contorno
- Ejemplo
- Ejemplo de solución de EDP

Método de las diferencias finitas

Se busca resolver ecuaciones diferenciales ordinarias (“EDO”) con condiciones de contorno. Por ejemplo:

$$\frac{d^2 f}{dx^2} + \frac{df}{dx} + f(x) = 0, \quad x \in \mathcal{R} \wedge x \in [0,1], \quad f(0) = 0, f(1) = 0$$

Se **aproxima cada derivada** por una diferenciación numérica. Generalmente se utilizan fórmulas de $O(h^2)$.

$$\frac{d^2 f}{dx^2}(x_i) = \frac{f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1}}{h^2} + O(h^2), \quad \frac{df}{dx}(x_i) = \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2h} + O(h^2)$$

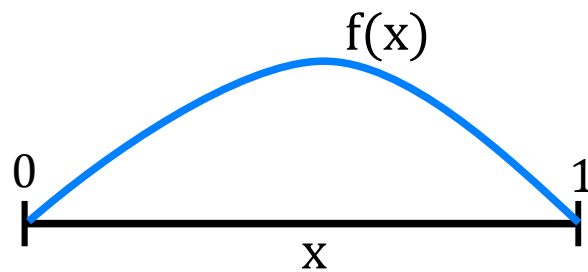
Reemplazando las derivadas en la EDO original se obtiene la **fórmula computacional**.

$$\frac{f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1}}{h^2} + \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2h} + f_i + O(h^2) = 0 \longrightarrow \boxed{\left[\begin{pmatrix} 1 - \frac{h}{2} & (h^2 - 2) & 1 + \frac{h}{2} \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} f_{i-1} \\ f_i \\ f_{i+1} \end{pmatrix} = 0}$$

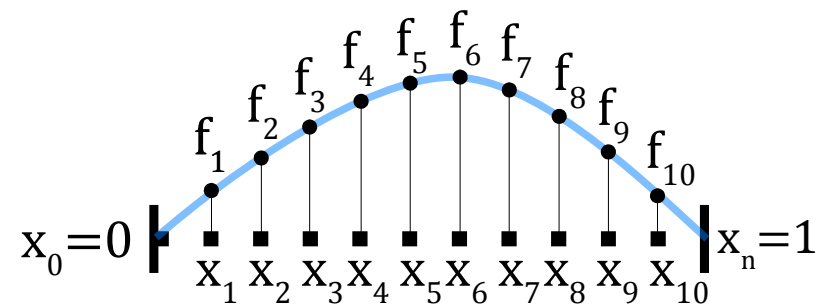
Método de las diferencias finitas

Para poder encontrar la solución se realiza una discretización del dominio continuo en $n+1$ puntos.

Luego se evalúa la fórmula computacional en cada punto interior y se forma un SEL.



Dominio físico



Dominio computacional

Método de las diferencias finitas

Supongamos que discretizamos todo el dominio $[0,1]$ en 5 puntos. Entonces $x_0=0$ y $x_4=1$.

Se evalúa la fórmula computacional en x_1

$$\begin{bmatrix} \left(1-\frac{h}{2}\right) & (h^2-2) & \left(1+\frac{h}{2}\right) & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \end{pmatrix} = 0$$

Se evalúa la fórmula computacional en x_2

$$\begin{bmatrix} 0 & \left(1-\frac{h}{2}\right) & (h^2-2) & \left(1+\frac{h}{2}\right) & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \end{pmatrix} = 0$$

Se evalúa la fórmula computacional en x_3

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & \left(1-\frac{h}{2}\right) & (h^2-2) & \left(1+\frac{h}{2}\right) \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \end{pmatrix} = 0$$

Método de las diferencias finitas

La solución se obtiene resolviendo las ecuaciones en forma conjunta.

$$\begin{bmatrix} \left(1 - \frac{h}{2}\right) & (h^2 - 2) & \left(1 + \frac{h}{2}\right) & 0 & 0 \\ 0 & \left(1 - \frac{h}{2}\right) & (h^2 - 2) & \left(1 + \frac{h}{2}\right) & 0 \\ 0 & 0 & \left(1 - \frac{h}{2}\right) & (h^2 - 2) & \left(1 + \frac{h}{2}\right) \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Las condiciones de contorno brindan las ecuaciones adicionales para formar el SEL.

Hay dos caminos para armar el SEL.

Incluir los valores conocidos del contorno y reducir el tamaño del sistema. **(Condiciones Dirichlet)**

Adjuntar las ecuaciones de las condiciones de contorno al sistema. **(Condiciones Neumann)**

Método de las diferencias finitas

Condiciones Dirichlet: $f(x_0)=f_0, f(x_1)=f_1$

$$\begin{bmatrix} (h^2-2) & \left(1+\frac{h}{2}\right) & 0 \\ \left(1-\frac{h}{2}\right) & (h^2-2) & \left(1+\frac{h}{2}\right) \\ 0 & \left(1-\frac{h}{2}\right) & (h^2-2) \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\left(1-\frac{h}{2}\right)f_0 \\ 0 \\ -\left(1+\frac{h}{2}\right)f_4 \end{pmatrix}$$

Método de las diferencias finitas

Condiciones Neumann: $\frac{df}{dx}(x_0) = a, \frac{df}{dx}(x_n) = -b$

$$\begin{bmatrix} -3 & 4 & -1 & 0 & 0 \\ \left(1 - \frac{h}{2}\right) & (h^2 - 2) & \left(1 + \frac{h}{2}\right) & 0 & 0 \\ 0 & \left(1 - \frac{h}{2}\right) & (h^2 - 2) & \left(1 + \frac{h}{2}\right) & 0 \\ 0 & 0 & \left(1 - \frac{h}{2}\right) & (h^2 - 2) & \left(1 + \frac{h}{2}\right) \\ 0 & 0 & 1 & -4 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -b \end{pmatrix}$$

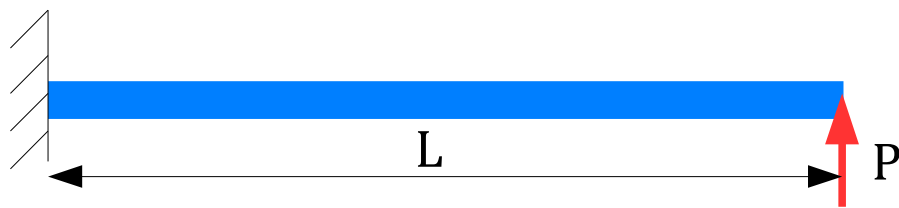
Método de las diferencias finitas

Resumen del método

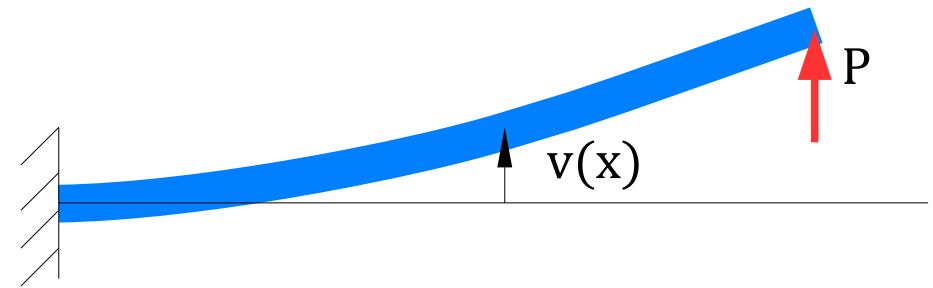
- 1) Reemplazar las derivadas en la EDO original por versiones discretas y encontrar la fórmula computacional
- 2) Discretizar el dominio continuo en $n+1$ puntos
- 3) Plantear la fórmula computacional en los nodos interiores
- 4) Incluir las condiciones de borde para armar el SEL.
- 5) Determinar los valores de la solución discreta resolviendo el SEL

Ejemplo

Se busca determinar el desplazamiento transversal de una viga anclada en un extremo y sometida a la acción de una fuerza P que actúa en el extremo opuesto. Las propiedades de la viga son: $EJ=10000$, $L=10$. La carga P es 100.



Antes



Después

Ejemplo

La ecuación que describe este problema es la siguiente:

$$EJ \frac{d^2 v}{dx^2} + P(x-L) = 0, \quad x \in \mathcal{R} \wedge 0 \leq x \leq L, \quad v(0) = 0, \quad \frac{dv}{dx}(0) = 0$$

Para determinar la fórmula computacional hay que aproximar una derivada segunda en la EDO y una derivada primera para la segunda condición de contorno.

$$EJ \left(\frac{v_{i-1} - 2v_i + v_{i+1}}{h^2} \right) + P(x_i - L) = 0 \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_{i-1} \\ v_i \\ v_{i+1} \end{pmatrix} = -\frac{Ph^2}{EJ} (x_i - L)$$

$$\frac{dv}{dx}(0) = \frac{-3v_0 + 4v_1 - v_2}{2h} = 0 \rightarrow \begin{bmatrix} -3 & 4 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_0 \\ v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = 0$$

Ejemplo

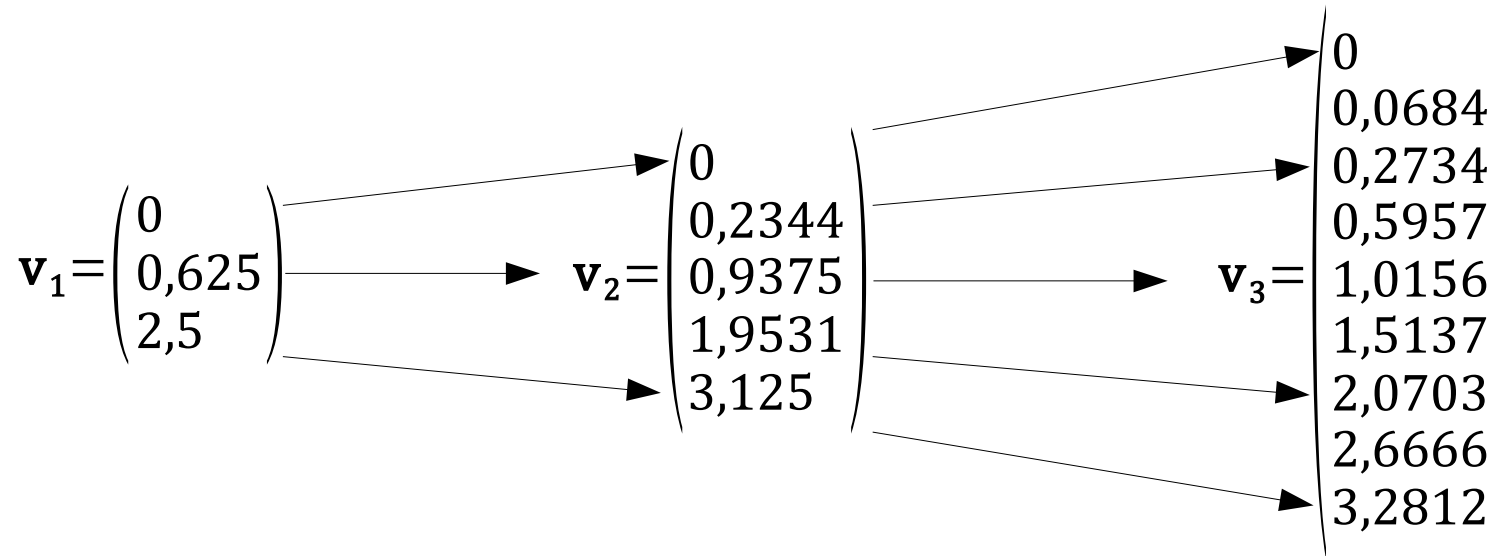
El paso más grande que podemos tomar es $h=L/2=5$ (3 puntos)
 entonces $x_0=0, x_1=5, x_2=10$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 4 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{Ph^2}{EJ}(x_1-L) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1,25 \end{pmatrix} \quad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0,625 \\ 2,5 \end{pmatrix}$$

La mitad del paso más grande que podemos tomar es $h=L/4=2,5$ (5 puntos)
 entonces $x_0=0, x_1=2,5, x_2=5, x_3=7,5, x_4=10$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 4 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{pmatrix} = -\frac{Ph^2}{EJ} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ (x_1-L) \\ (x_2-L) \\ (x_3-L) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0,46875 \\ 0,3125 \\ 0,15625 \end{pmatrix} \quad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0,23438 \\ 0,9375 \\ 1,95312 \\ 3,125 \end{pmatrix}$$

Ejemplo



Usando la extrapolación de Richardson se puede obtener una solución mejor para el extremo.

$$v(L) = \frac{(2^2)3,125 - 2,5}{(2^2) - 1} = 3,33333 + O(h^4)$$

Ejemplo

n+1	h	v(L)	error relativo
3	5	2,5	---
5	2,5	3,125	25,00 %
9	1,25	3,2812	5,00 %
17	0,625	3,3203	1,19 %
33	0,3125	3,3301	0,30 %
65	0,15625	3,3325	0,07 %
129	0,078125	3,3331	0,02 %
Richardson	2,5	3,3333	

Solución analítica:
 $v(L) = PL^3 / (3EJ) = 3,3333$