Ecuaciones Diferenciales Ordinarias de valores iniciales

FCEN
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES

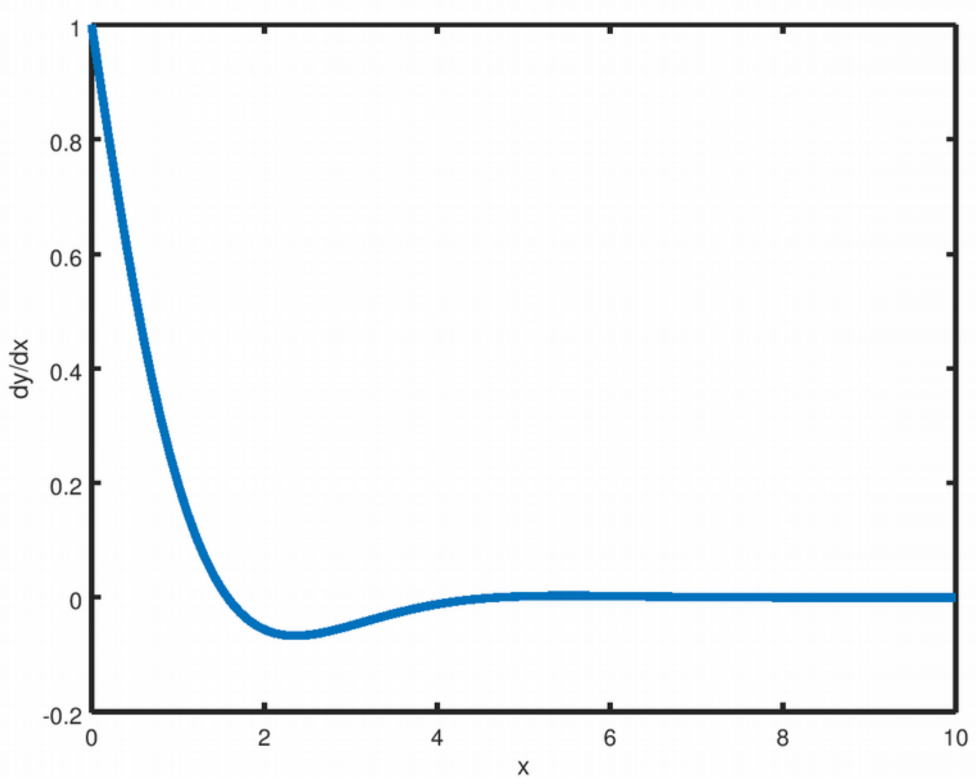
Temario

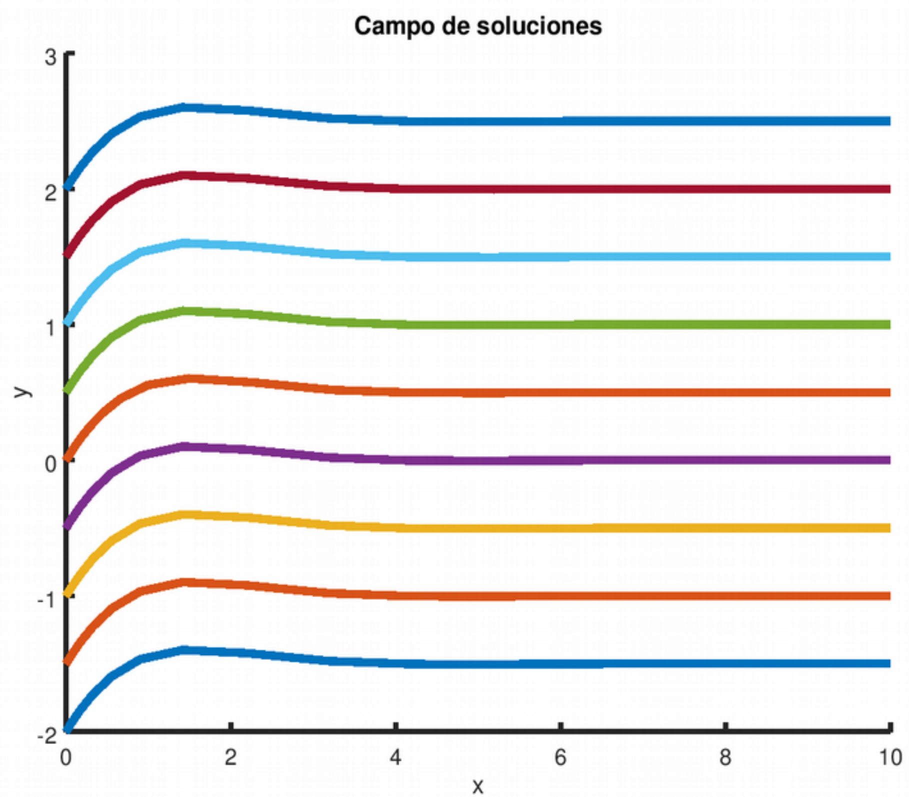
- Ecuaciones Diferenciales Ordinarias de valores iniciales
- Métodos numéricos para EDO de valores iniciales
- Método de Euler simple
- Métodos mejorados de un paso: Heun y punto medio
- Métodos Runge Kutta
- Sistemas EDO
- EDO de orden superior

Ecuaciones diferenciales de valores iniciales

Se busca la función solución de $\frac{dy}{dx} = e^{-x} \cos(x)\ ,\ y(0) = 0, x \in [0, \infty)$

Cuando **se conoce el valor** de la solución en **el extremo izquierdo** del intervalo y se buscan los valores hacia el lado derecho, estamos frente a un "**problema de valores iniciales**".





Métodos numéricos para EDO de valores iniciales

FCEN
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES

Los métodos de solución pueden ser: **de un paso, multipaso o predictor-corrector.**

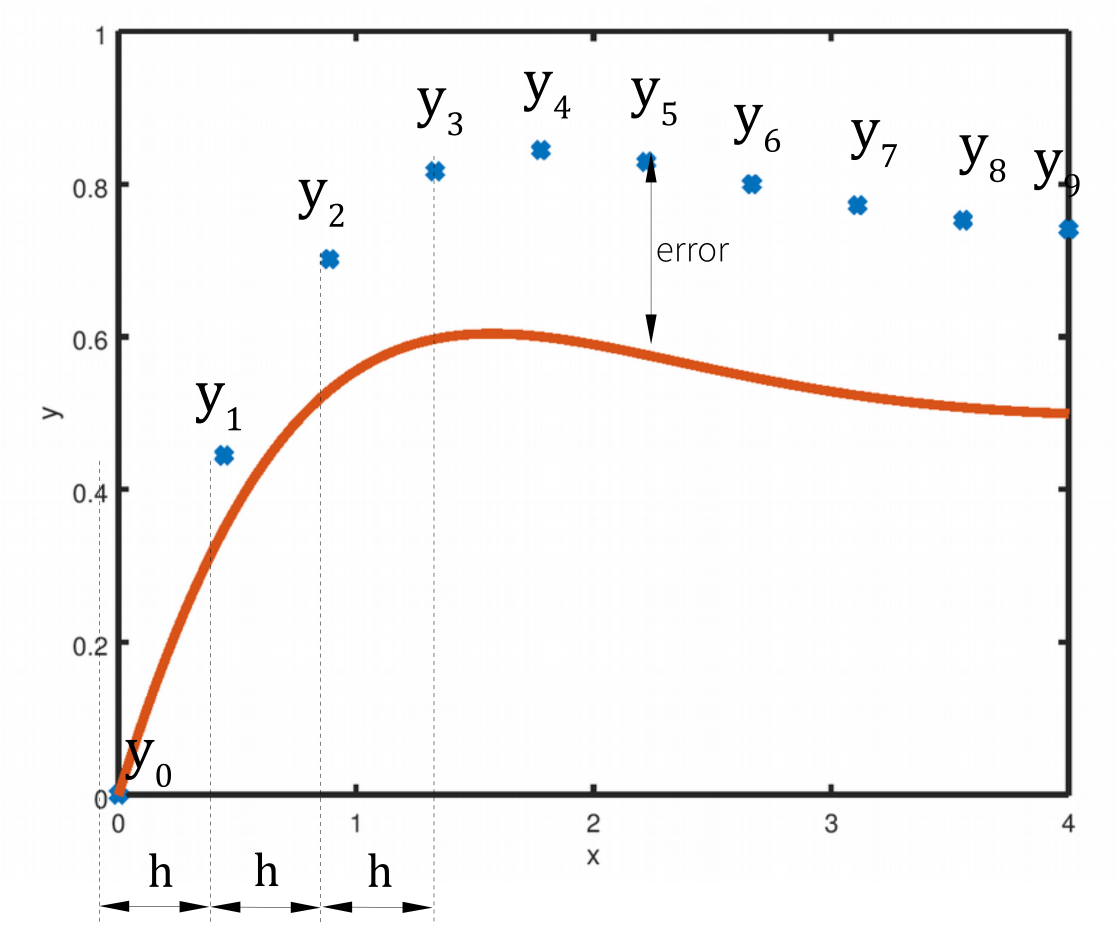
Los métodos de un paso aproximan la solución a partir de una **estimación de la pendiente ϕ** y de la discretización del dominio de la solución.

$$x_{i+1} = x_i + h$$

$$y_{i+1} = y_i + \phi h + O(h^p)$$

$$\frac{dy}{dx} = e^{-x}\cos(x)$$

Los métodos de un paso utilizan esta fórmula sucesivamente a partir de un valor inicial y avanzan de a un paso a la vez. **En cada paso van agregando error numérico.**



Método de Euler simple

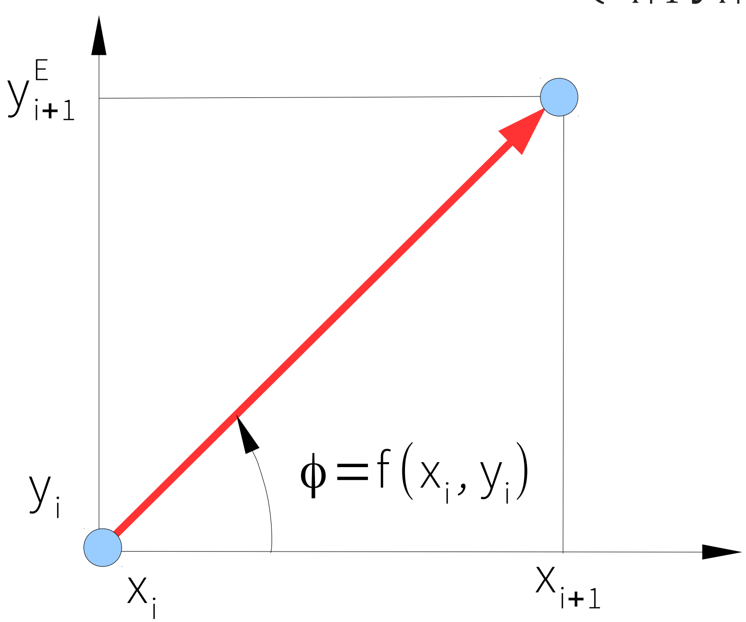
Se asume que la derivada es constante en todo el intervalo h.

Si se evalúa en el extremo inicial (x_i, y_i) obtenemos el método de **Euler simple explícito**.

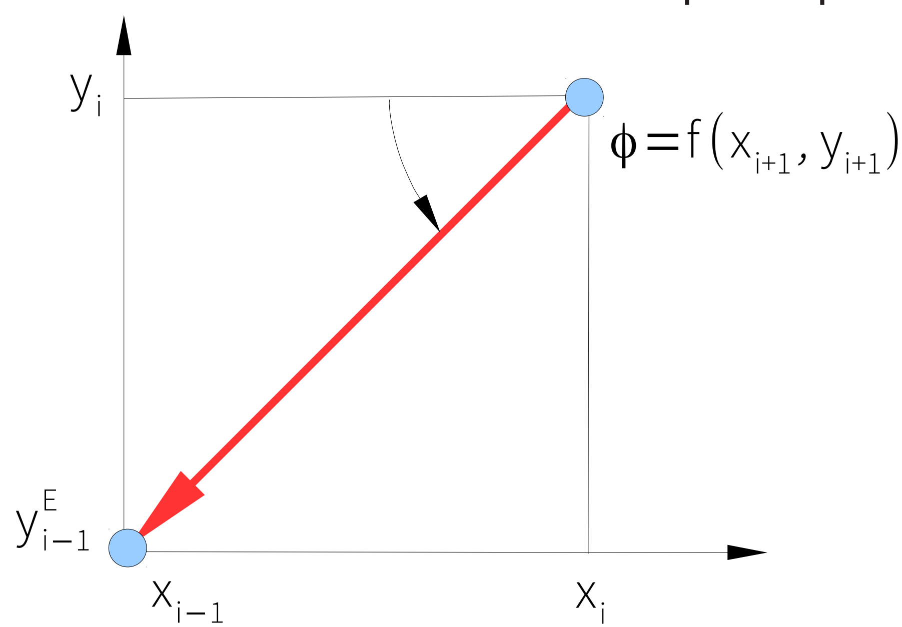
$$\phi = f(x_i, y_i) \rightarrow y_{i+1} = y_i + f(x_i, y_i)h + O(h)$$

El método es de primer orden.

Si se evalúa en el extremo final (x_{i+1}, y_{i+1}) se obtiene el método de **Euler simple implícito**.

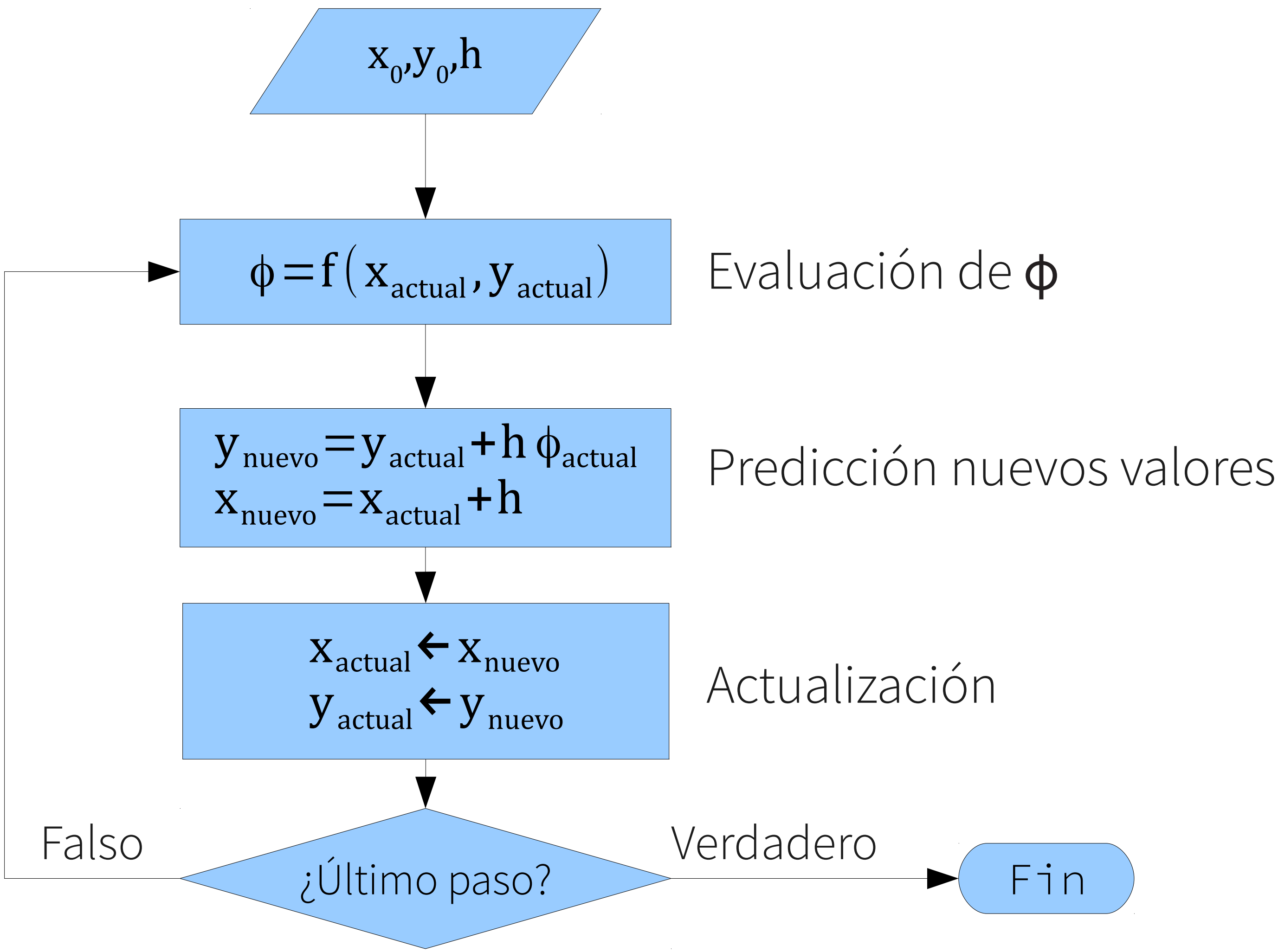


Euler hacia adelante



Euler hacia atrás

Algoritmo



x_0, y_0, h
$\phi = f(x_{actual}, y_{actual})$
Evaluación de ϕ
$y_{nuevo} = y_{actual} + h\,\phi_{actual}$
$x_{nuevo} = x_{actual} + h$
Predicción nuevos valores
$x_{actual} \leftarrow x_{nuevo}$
$y_{actual} \leftarrow y_{nuevo}$
Actualización
Falso
¿Último paso?
Verdadero
Fin

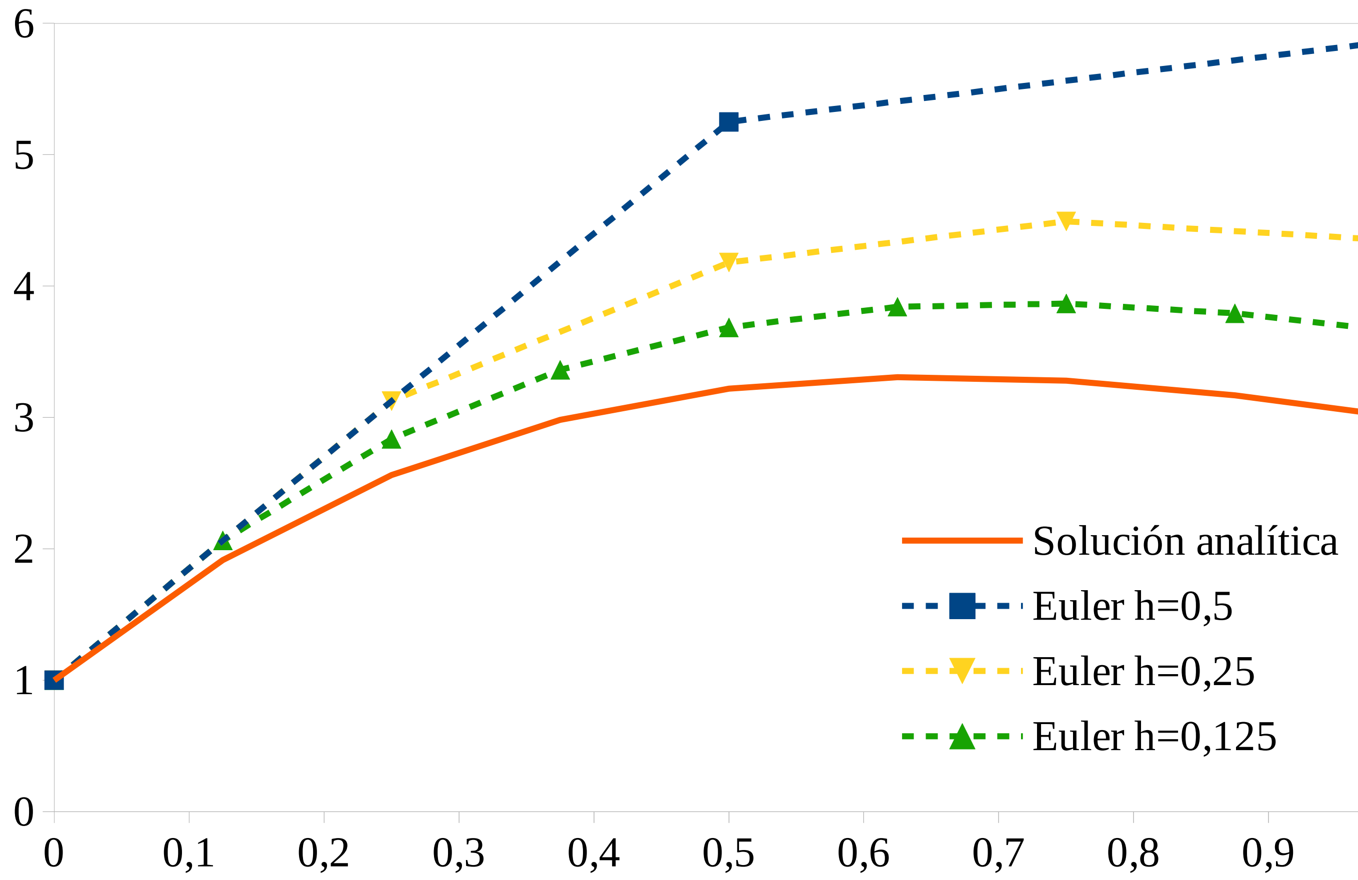
Ejemplo

Utilizando el método de Euler integre numéricamente la siguiente ecuación diferencial ordinaria de primer orden.

$$\frac{dy}{dx} = -2x^3 + 12x^2 - 20x + 8{,}5 \text{ con } x \in [0{,}1] \wedge y(0) = 1$$

x_i	$\varphi = f(x_i, y_i)$	Y_1 (h=0,5)	$\varphi = f(x_i, y_i)$	Y_2 (h=0,25)	$\varphi = f(x_i, y_i)$	Y_3 (h=0,125)	$y_{analitica}$
0	8,500		8,500	1,000	8,500	1,0000	
0,125	[redacted]	[redacted]	[redacted]	[redacted]	6,1836	2,0625	
0,25	[redacted]	[redacted]	4,2188	3,125	4,2188	2,8354	
0,375	[redacted]	[redacted]	[redacted]	[redacted]	2,5820	3,3628	
0,5	1,2500		1,25	4,1797	1,2500	3,6855	
0,625	[redacted]	[redacted]	[redacted]	[redacted]	0,1992	3,8418	
0,75	[redacted]	[redacted]	-0,5938	4,4922	-0,5938	3,8667	
0,875	[redacted]	[redacted]	[redacted]	[redacted]	-1,1523	3,7925	
1	-1,500		-1,5	4,3438	-1,500	3,6484	

Ejemplo



6
5
4
3
2
1
0
0
0,1
0,2
0,3
0,4
0,5
0,6
0,7
0,8
0,9
1
Solución analítica
Euler h=0,5
Euler h=0,25
Euler h=0,125

Métodos de un paso de orden 2

FCEN
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES

Métodos de un solo paso

$$y_{i+1} = y_i + h\,\phi(x,y) + O(h^p)$$

Ecuación de una recta con pendiente ϕ. ¿Cuál es la mejor aproximación de ϕ?

Euler simple

$$\phi(x,y) = f(x_i, y_i)$$

$$y_{i+1} = y_i + h\,\phi(x,y) + O(h)$$

Φ es la pendiente en el inicio del intervalo

Método de Heun

$$\phi(x,y) = \frac{f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y^{E}_{i+1})}{2}$$

$$y_{i+1} = y_i + h\,\phi(x,y) + O(h^2)$$

Φ es el promedio de la pendiente en el inicio y en el final del intervalo.

Método de punto medio

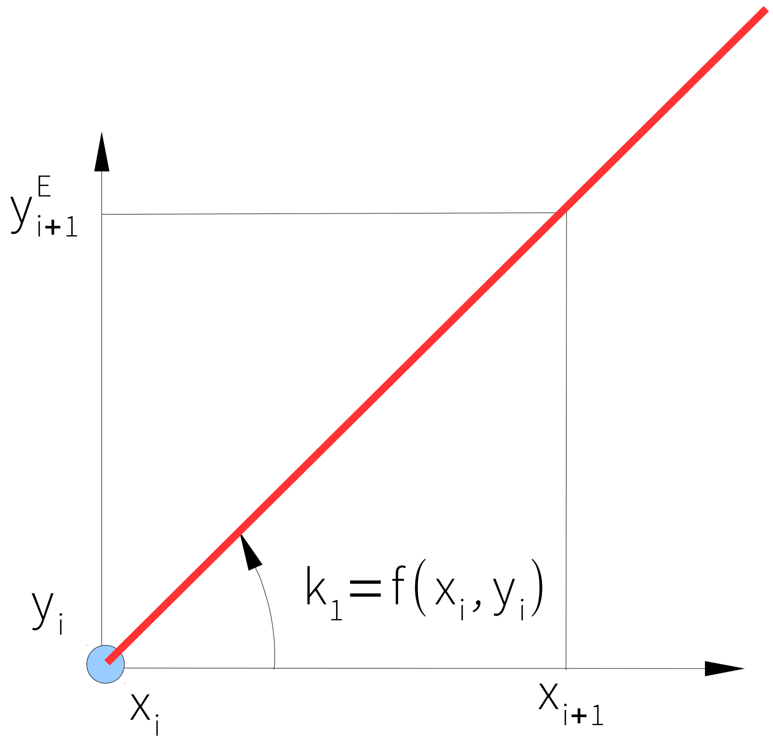
$$\phi(x,y) = f(x_{i+1/2}, y^{E}_{i+1/2})$$

$$y_{i+1} = y_i + h\,\phi(x,y) + O(h^2)$$

Φ es la pendiente en el centro del intervalo.

Método de Heun

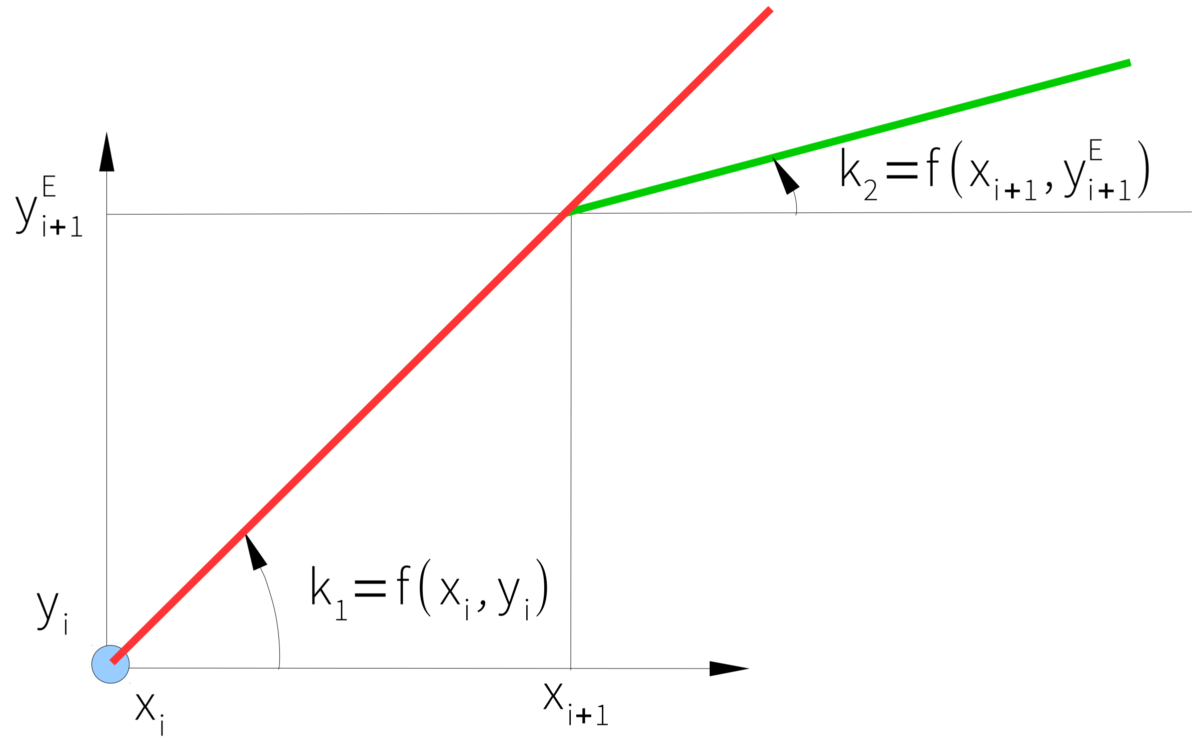
Primer paso, Euler simple



Método de Heun

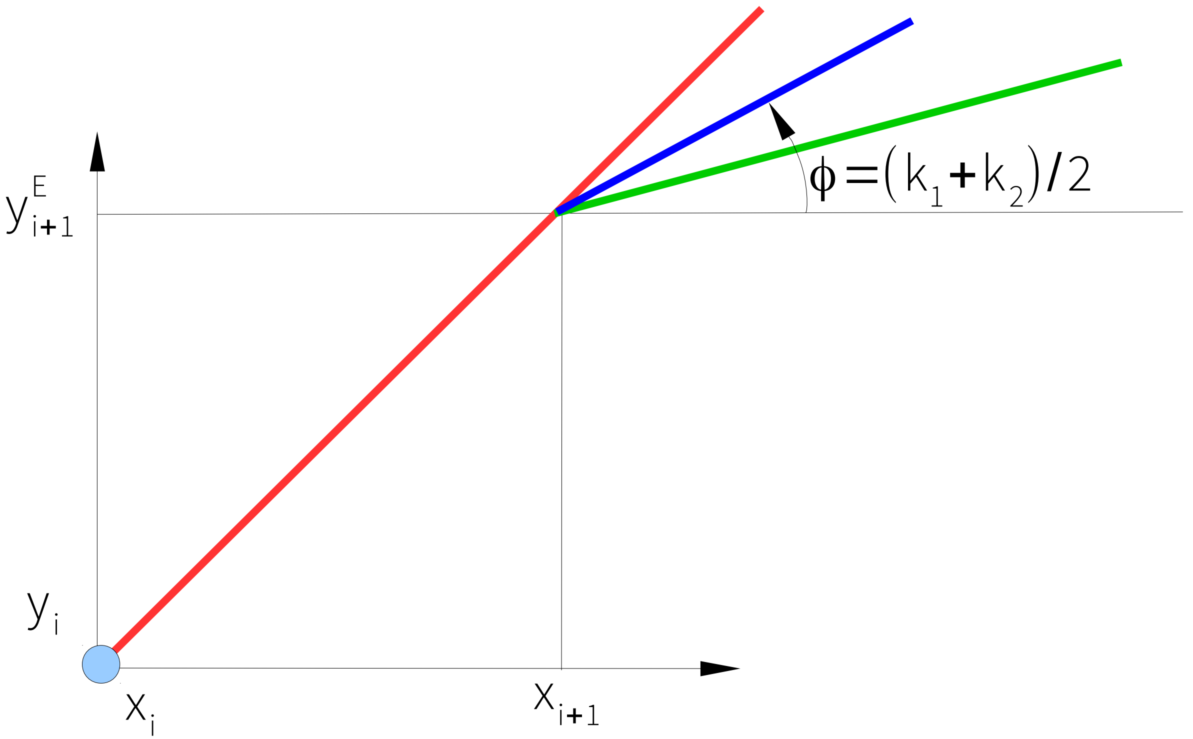
FCEN
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES

Segundo paso, evaluar pendiente en predicción de Euler simple



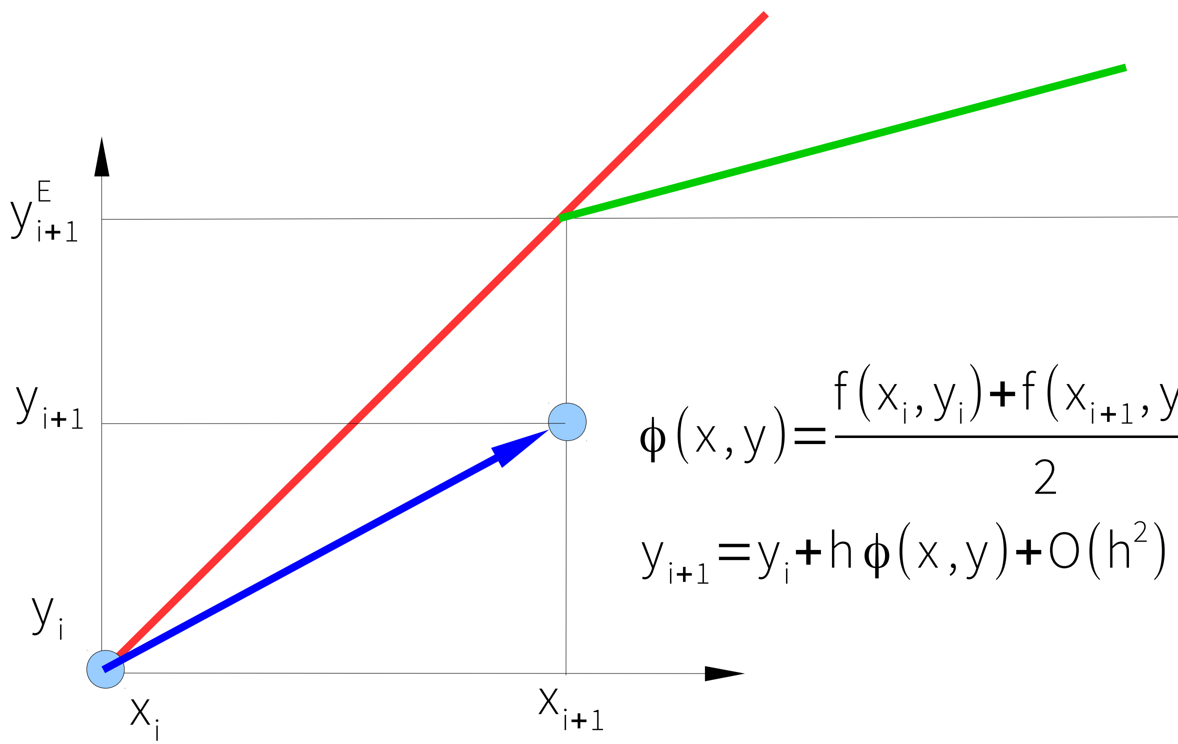
Método de Heun

Tercer paso, promediar pendientes



Método de Heun

Cuarto paso, avanzar con pendiente promediada



$$\phi(x,y)=\frac{f(x_i,y_i)+f(x_{i+1},y^E_{i+1})}{2}$$

$$y_{i+1}=y_i+h\,\phi(x,y)+O(h^2)$$

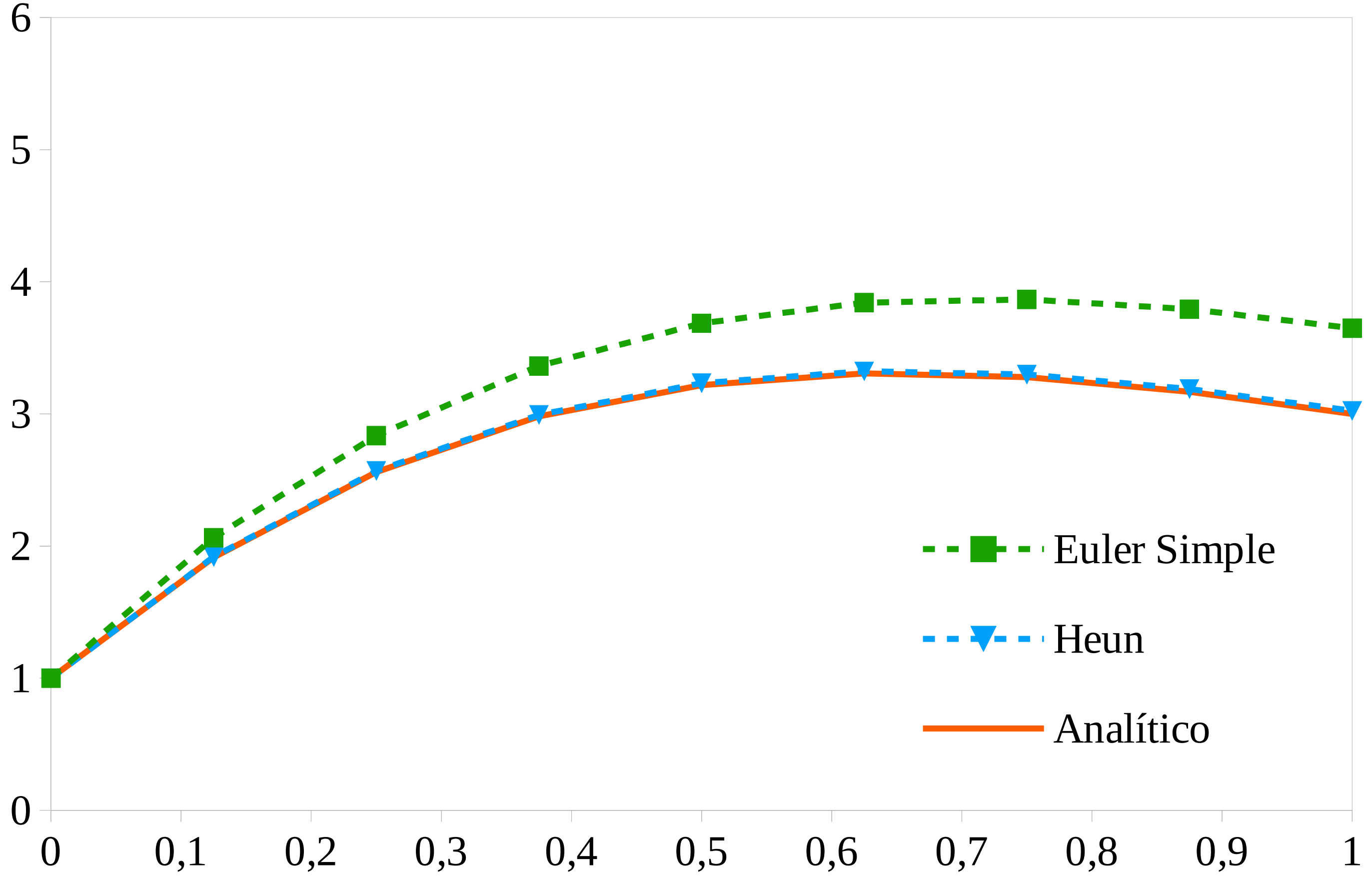
Ejemplo

Utilizando el método de Heun integre numéricamente la siguiente ecuación diferencial ordinaria de primer orden.

$$\frac{dy}{dx} = -2x^3 + 12x^2 - 20x + 8{,}5 \text{ con } x \in [0{,}1] \wedge y(0) = 1$$

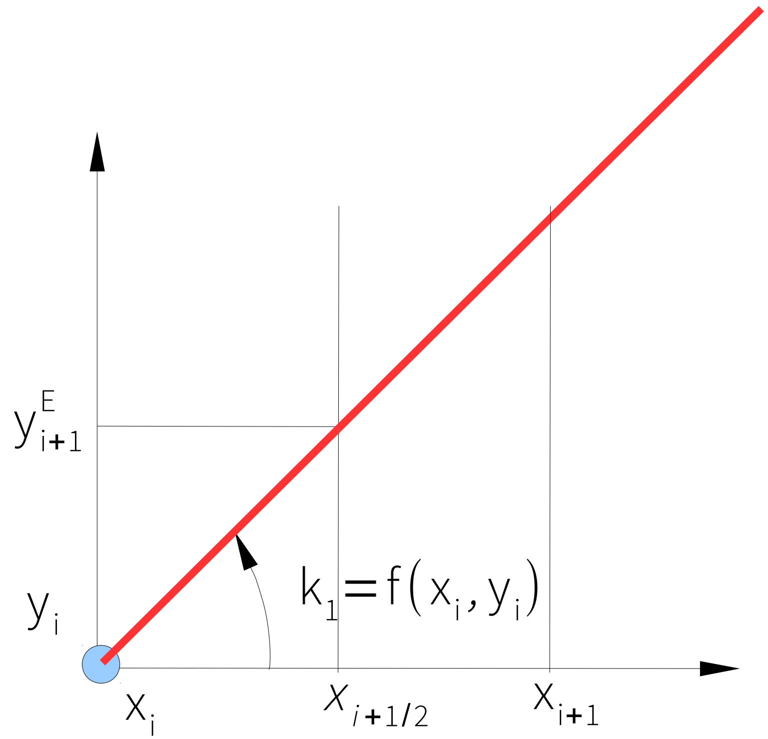
x_i	y_i	k_1	y_{eval}	x_{eval}	k_2	φ	y_{nuevo}
0	1,0000	8,5000	2,0625	0,1250	6,1836	7,3418	1,9177
0,125	1,9177	6,1836	2,6907	0,2500	4,2188	5,2012	2,5679
0,25	2,5679	4,2188	3,0952	0,3750	2,5820	3,4004	2,9929
0,375	2,9929	2,5820	3,3157	0,5000	1,2500	1,9160	3,2324
0,5	3,2324	1,2500	3,3887	0,6250	0,1992	0,7246	3,3230
0,625	3,3230	0,1992	3,3479	0,7500	-0,5938	-0,1973	3,2983
0,75	3,2983	-0,5938	3,2241	0,8750	-1,1523	-0,8730	3,1892
0,875	3,1892	-1,1523	3,0452	1,0000	-1,5000	-1,3262	3,0234
1	3,0234	-1,5000	2,8359	1,1250	-1,6602	-1,5801	

Comparación con Euler simple



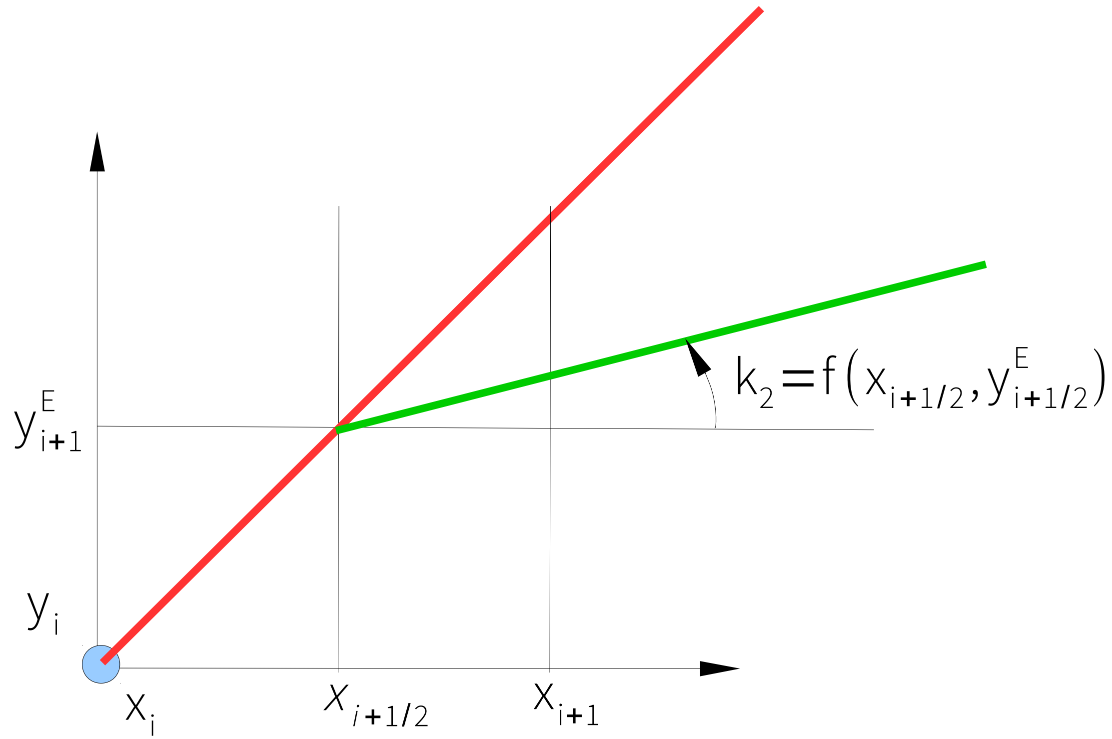
Método del punto medio

Primer paso, Euler simple
hasta la mitad del paso



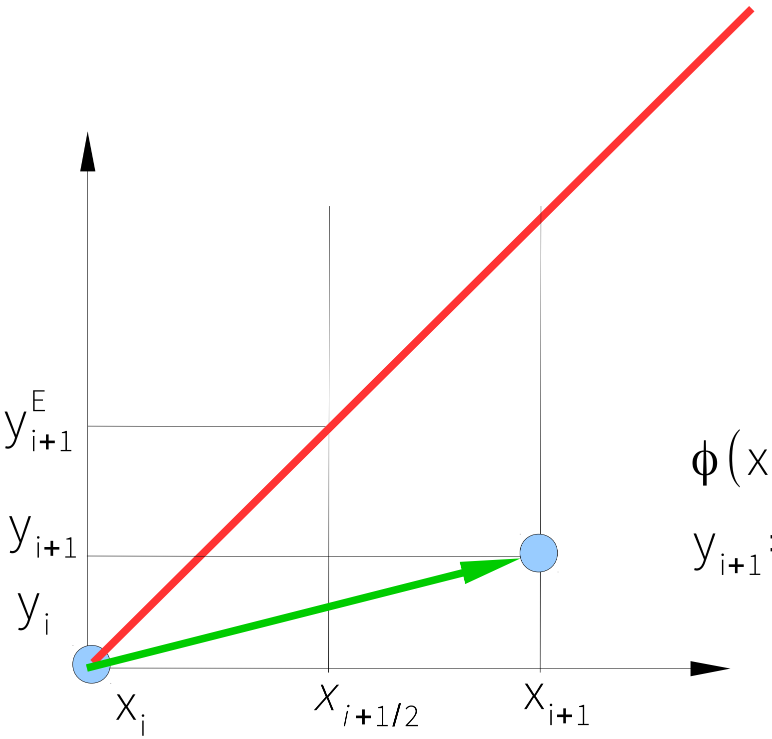
Método del punto medio

Segundo paso, evaluar pendiente en predicción de Euler simple



Método del punto medio

Tercer paso, avanzar con pendiente β



$$\phi(x,y) = f(x_{i+1/2}, y^E_{i+1/2})$$

$$y_{i+1} = y_i + h\,\phi(x,y) + O(h^2)$$

Métodos Runge Kutta

FCEN
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES

Generalización de métodos $O(h^2)$

Familia Runge-Kutta 2 o RK2

$$\phi(x_i, y_i, h) = (1-\omega) k_1 + \omega k_2$$
$$k_1 = f(x_i, y_i)$$
$$x_{eval} = x_i + \frac{h}{2\omega}$$
$$y_{eval} = y_i + \frac{h}{2\omega} k_1$$
$$k_2 = f(x_{eval}, y_{eval})$$

$\omega = 1/2$

$$\phi(x_i, y_i, h) = \frac{k_1 + k_2}{2}$$
$$k_1 = f(x_i, y_i)$$
$$k_2 = f(x_i + h, y_i + h k_1)$$

Método de Heun

$\omega = 1$

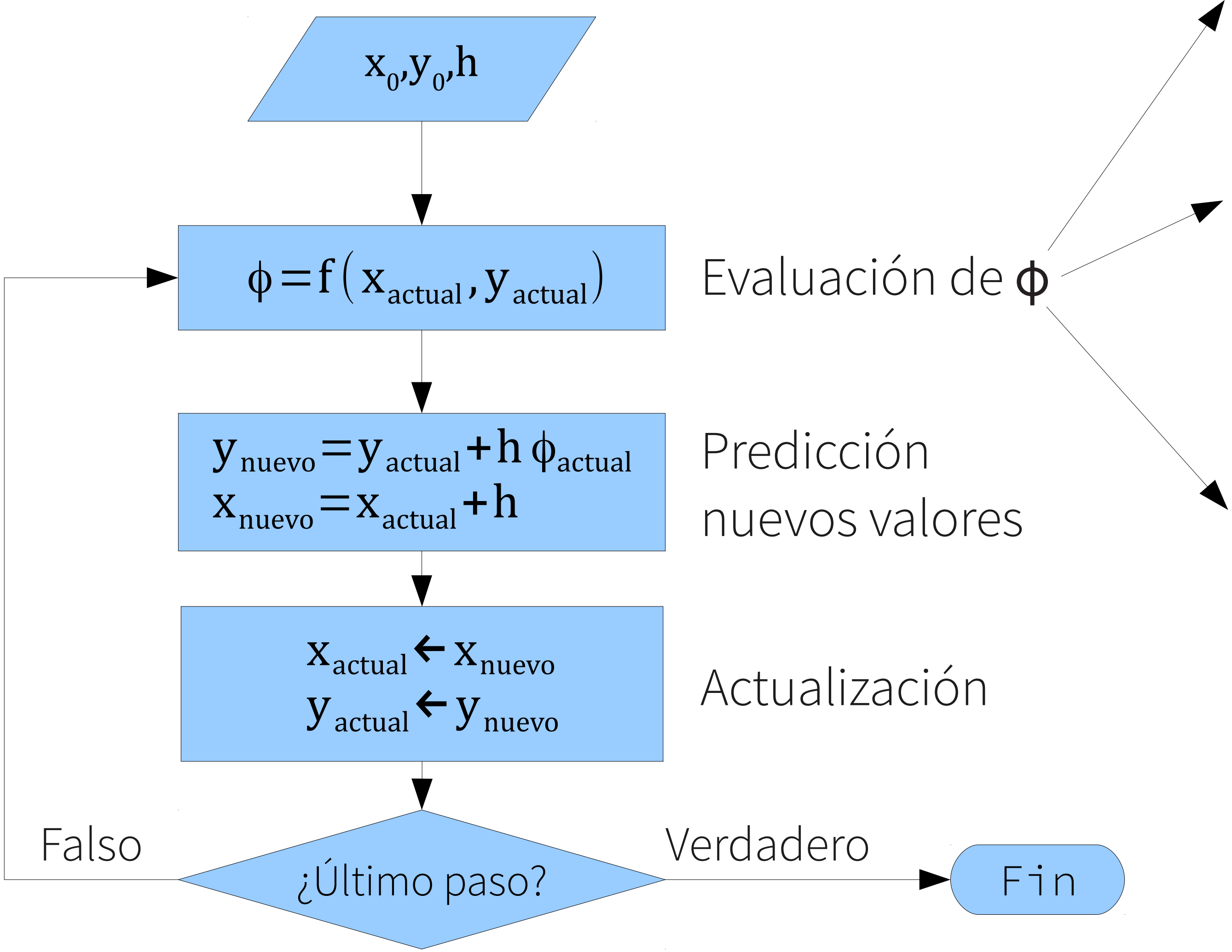
$$\phi(x_i, y_i, h) = k_2$$
$$k_1 = f(x_i, y_i)$$
$$k_2 = f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2} k_1\right)$$

Método de punto medio

Runge-Kutta 4 $O(h^4)$

$$\phi(x_i, y_i, h) = \frac{k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4}{6}$$
$$k_1 = f(x_i, y_i)$$
$$k_2 = f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2} k_1\right)$$
$$k_3 = f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2} k_2\right)$$
$$k_4 = f(x_i + h, y_i + h k_3)$$

Algoritmo



Euler simple O(h)

$$\phi(x_i, y_i, h) = k_1 = f(x_i, y_i)$$

RK2 $O(h^2)$

$$\phi(x_i, y_i, h) = (1-\omega)k_1 + \omega k_2$$

$$k_1 = f(x_i, y_i)$$

$$k_2 = f\left(x_i + \frac{h}{2\omega}, y_i + \frac{h}{2\omega}k_1\right)$$

RK4 $O(h^4)$

$$\phi(x_i, y_i, h) = \frac{k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4}{6}$$

$$k_1 = f(x_i, y_i)$$

$$k_2 = f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2}k_1\right)$$

$$k_3 = f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2}k_2\right)$$

$$k_4 = f(x_i + h, y_i + h k_3)$$

Código Octave

FCEN
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES

```
function [x,y]=RK2(x0,y0,xn,h)
% Solucion de EDO de primer orden con Runge Kutta 2
% Uso: [x,y]=RK2(x0,y0,xn,h)
% Entradas: x0=posición inicial, y0=condición inicial
%           xn= posición final, h=paso de integración
% Salidas:  x=vector de posiciones
%           y=vector de solución para cada x
npasos=ceil((xn-x0)/h); %Redondea para arriba
x(1)=x0;
y(1)=y0;

for i=1:npasos
  xactual=x(i); %Estado actual
  yactual=y(i); %Estado actual
  FI=evalFI(xactual,yactual,h); %Evaluación de pendiente
  xnuevo=xactual+h;
  ynuevo=yactual+h*FI;   %Predicción
  x(i+1)=xnuevo;   %Avance
  y(i+1)=ynuevo;   %Avance
end

end
```

Funciones auxiliares

```
function [f]=evalfun(x,y)
%Evaluación de la función
f=%colocar f(x,y)%;
end
```

```
function [FI]=evalFI(x,y,h)
%Evaluación de la pendiente Φ con
%Runge Kutta 2
w=1; %1/2 Heun, 1 Punto medio
k1=evalfun(x,y);
k2=evalfun(x+h/(2*w),y+h/(2*w)*k1);
FI=(1-w)*k1+w*k2;
end
```

EDO de orden superior con valores iniciales

EDO de segundo orden

$$a\ddot{x}+b\dot{x}+cx(t)=d(t)\ ,\ x(t_0)=x_0,\dot{x}(t_0)=v_0$$

Para resolver numéricamente este problema se puede **realizar una transformación** a un **sistema de EDO de primer orden equivalente** y aplicar los métodos **Runge Kutta** vistos.

La **reducción de orden** consiste en realizar un cambio de variables.

Primero se define un vector Z que contiene las derivadas de orden menor.

$$Z=\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x \\ \dot{x} \end{pmatrix}$$

Luego se deriva Z componente a componente y se reemplaza la derivada más grande por la EDO.

$$\frac{dZ}{dt}=\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \ddot{x} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \dot{x} \\ a^{-1}(d-cx-b\dot{x}) \end{pmatrix}$$

Finalmente se expresa todo en función de Z

$$\frac{dZ}{dt}=\begin{pmatrix} z_2 \\ a^{-1}(d-cz_1-bz_2) \end{pmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a^{-1}c & -a^{-1}b \end{bmatrix}\cdot Z+\begin{pmatrix} 0 \\ a^{-1}d \end{pmatrix}\rightarrow\frac{dZ}{dt}=F(t,Z)$$

Sistema EDO de primer orden!

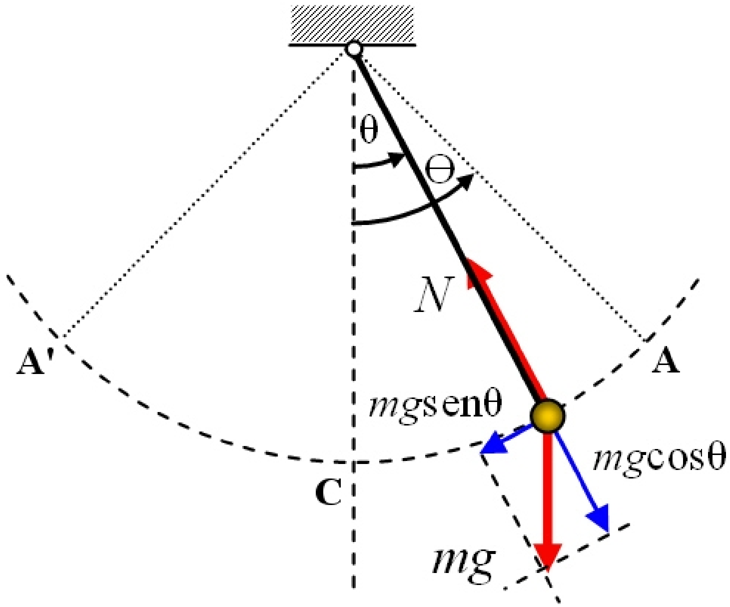
EDO de orden superior con valores iniciales

Oscilaciones de un péndulo simple

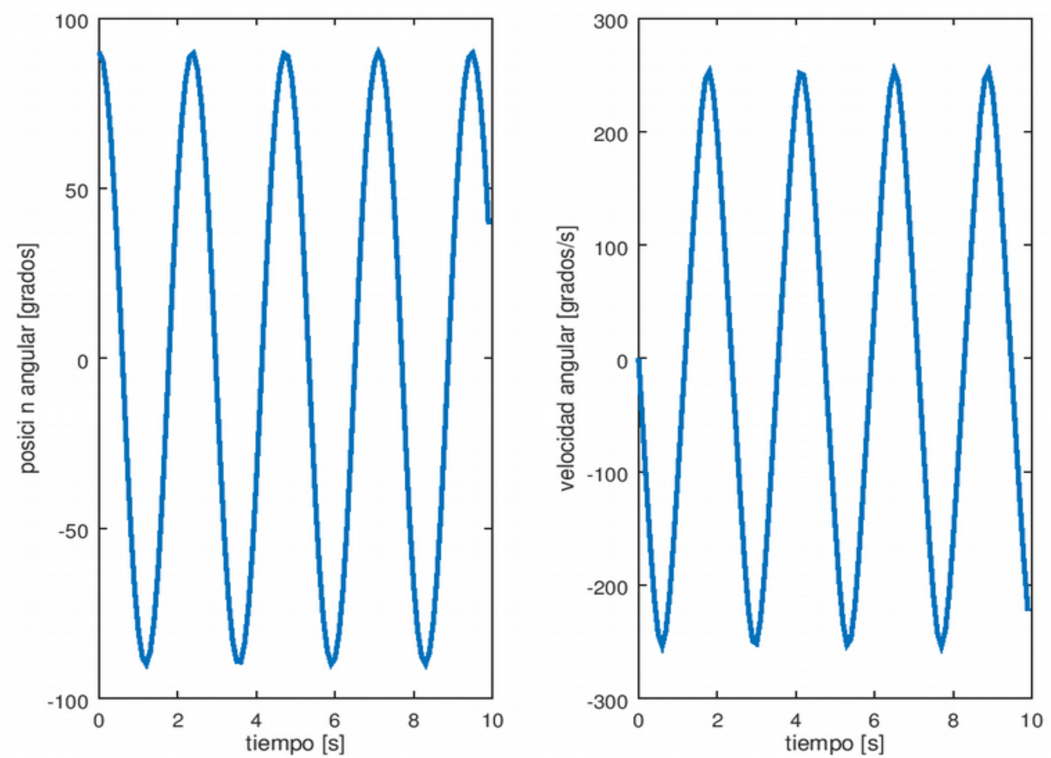
$$\ddot{\theta}+\frac{g}{L}\operatorname{sen}\theta=0\ ,\ \theta(0)=\theta_0,\dot{\theta}(0)=0 \longrightarrow Z=\begin{pmatrix}\theta\\ \dot{\theta}\end{pmatrix} \longrightarrow \frac{dZ}{dt}=\begin{pmatrix}\dot{\theta}\\ -\frac{g}{L}\operatorname{sen}\theta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}z_2\\ -\frac{g}{L}\operatorname{sen}z_1\end{pmatrix}$$

Si $\boldsymbol{\theta}$ es pequeño podemos aproximar $\mathbf{sen(z_1)}$ por $\mathbf{z_1}$

$$\longrightarrow \frac{dZ}{dt}\approx\begin{pmatrix}z_2\\ -\frac{g}{L}z_1\end{pmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -g/L & 0\end{bmatrix}\cdot Z=A\cdot Z$$



De Algarabia - Trabajo propio, Dominio público,
https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=7576806



Sistema de EDO de primer orden con valores iniciales

$$\frac{dy_1}{dt} = -10\,y_1(t) + 4\,y_2(t)$$
$$\frac{dy_2}{dt} = -4\,y_1(t) + 0\,y_2(t)$$
$$y_1(0) = 5, y_2(0) = 3$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} dy_1/dt \\ dy_2/dt \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} -10 & 4 \\ -4 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \longrightarrow \frac{d\mathbf{Y}}{dt} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{Y}$$

Evaluar $\phi(t, \mathbf{Y}_i)$

$$\phi(t_i, \mathbf{Y}_i, h) = (1-\omega)\mathbf{K}_1 + \omega\,\mathbf{K}_2$$
$$\mathbf{K}_1 = \mathbf{A} \cdot \mathbf{Y}_i$$
$$t_{eval} = t_i + \frac{h}{2\,\omega}$$
$$\mathbf{Y}_{eval} = \mathbf{Y}_i + \frac{h}{2\,\omega}\mathbf{K}_1$$
$$\mathbf{K}_2 = f(t_{eval}, \mathbf{Y}_{eval})$$

Nuevo valor

$$\mathbf{Y}_{i+1} = \mathbf{Y}_i + h\,\phi(t_i, \mathbf{Y}_i)$$

Código Octave

```
function [x,y1,y2]=RK2_sis(x0,y10,y20,xn,h)
% Solucion de sistemas de EDO de primer orden
% Uso: [x,y1,y2]=RK2_sis(x0,y10,y20,xn,h)
% Entradas: x0=posición inicial, y10=condición inicial 1
%               y10=condición inicial 2
%               xn= posición final, h=paso de integración
% Salidas:    x=vector de posiciones
%               y1=vector de solución1 para cada x
%               y2=vector de solución2 para cada x
npasos=ceil((xn-x0)/h); %Redondea para arriba
x(1)=x0;
y(1:2,1)=[y10;y20];
for i=1:npasos
   xactual=x(i); %Estado actual
   yactual=y(:,i); %Estado actual
   FI=evalFI(xactual,yactual,h); %Evaluación de pendiente
   xnuevo=xactual+h; %Predicción
   ynuevo=yactual+h*FI;    %Predicción
   x(i+1)=xnuevo;    %Avance
   y(:,i+1)=ynuevo;    %Avance
end
y1=y(1,:);
y2=y(2,:);
end
```

Funciones auxiliares

```
function [f]=evalfun(x,y)
%Evaluación de la función vectorial
f=[-10,4;-4,0]*y; %ejemplo
%f=[y(2);-g/L*sin(y(1))]; %pendulo
end
```

```
function [FI]=evalFI_sis(x,y,h)
%Evaluación de la pendiente Φ
w=1; %1/2 Heun, 1 Punto medio
k1=evalfun(x,y);
k2=evalfun(x+h/(2*w),y+h/(2*w)*k1);
FI=(1-w)*k1+w*k2;
end
```