Cálculo II
2. Espacio Euclídeo.

Para realizar este práctico se recomienda leer de las "Notas de clase" .

La sección Preliminar (pág 5 a 7), Espacio Vectorial (pág 7-8). El capítulo 2 "Espacio Euclídeo" : el plano $\mathbb{R}^2$ (pág 9 a 21, sin la sección 2.2.7 de Cambio de coordenadas), el espacio $\mathbb{R}^3$ (pág 27 a 29 y 31 a 35, sin la sección 2.3.7 de Cambio de coordenadas) y $\mathbb{R}^n$ (pág 35 a 36) . También pueden utilizar los apuntes y bibliografía utilizada en Introducción al Algebra Lineal.

Para los ejercicios 9 y 10 se enviarán textos adicionales.

1. Determine, en cada caso, si la relación R es reflexiva, simétrica, antisimétrica y transitiva.

   (a) $R = \{(1,1),(2,1),(1,2),(2,2)\} \subset \mathbb{N}\times\mathbb{N}$

   (b) $R = \{(a,b)\in A\times A, a=b \text{ o } a+b=4 \text{ o } a>b\}$ con $A=\{0,1,2,3,4,5\}$

2. Dados los conjuntos $A=\{2,3,5,8,9\}$ y $B=\{3,4,6,7,9,10\}$ y la relación

$$R = \{(x,y)\in A\times B, y = x+1\}$$

   (a) Exprésela por extensión.

   (b) Haga un diagrama de la relación.

   (c) Determine si la relación es función. Si lo es, halle, de ser posible su inversa.

   (d) Determine el dominio y la imagen.

3. ¿Cuáles de las siguientes son funciones de A en B? Para aquellas que lo sean, y cuando sea posible, halle su inversa.

   (a) $f=\left\{(x,y)\in A\times B, x=y^2\right\}$ donde $A=B=\mathbb{R}$

   (b) $g=\left\{(x,y)\in A\times B, x=y^2\right\}$ donde $A=B=\mathbb{N}$

4. Dados los vectores

$$\overline{\mathbf{v_1}}=(2,-1)\,,\quad \overline{\mathbf{v_2}}=(0,5)\,,\quad \overline{\mathbf{v_3}}=(2,-4,6)\,,\quad \overline{\mathbf{v_4}}=(-1,4,5)\,,$$

   (a) Representelos gráficamente en un sistema de ejes cartesianos, en $\mathbb{R}^2$ o $\mathbb{R}^{3,}$ según corresponda.

   (b) Calcule, si es posible, las siguientes operaciones e interpretelas gráficamente.

$$\overline{\mathbf{v_1}}+\overline{\mathbf{v_2}},\quad -2\overline{\mathbf{v_3}},\quad 2\overline{\mathbf{v_3}}+3\overline{\mathbf{v_4}},\quad \overline{\mathbf{v_1}}+\overline{\mathbf{v_4}}$$

   (c) Calcule el producto punto $\overline{\mathbf{v_1}}\cdot\overline{\mathbf{v_2}}$ y $\overline{\mathbf{v_3}}\cdot\overline{\mathbf{v_2}}$

   (d) Calcule los siguientes módulos

$$\|\overline{\mathbf{v_1}}\|\,,\quad \|\overline{\mathbf{v_1}}-\overline{\mathbf{v_2}}\|\,,\quad \left\|\frac{1}{2}\overline{\mathbf{v_3}}-\frac{3}{4}\overline{\mathbf{v_4}}\right\|$$

   (e) Calcule el ángulo entre los vectores $\overline{\mathbf{v_1}}$ y $\overline{\mathbf{v_2}}$, y entre $\overline{\mathbf{v_3}}$ y los ejes coordenados.

   (f) Calcule el producto cruz $\overline{\mathbf{v}}_3\times\overline{\mathbf{v}}_4$, $\overline{\mathbf{v}}_4\times\overline{\mathbf{v}}_3$. Compare los últimos dos resultados obtenidos e interpretelo gráficamente.

   (g) Encuentre el valor a para que el vector $\overline{\mathbf{v}}=(a,7)$ sea ortogonal a $\overline{\mathbf{v_1}}$.

(h) Encuentre, si es posible, el valor a para que el vector $\overline{\mathbf{v}} = (a, 7, -1)$ sea ortogonal a $\overline{\mathbf{v}}_3$.

(i) Calcule el área del paralelogramo que tiene por lados los vectores $\overline{\mathbf{v}}_3$ y $\overline{\mathbf{v}}_4$.

5. Si el vector $\overline{\mathbf{v}}$ se encuentra en el plano XY y el vector $\overline{\mathbf{u}}$ es paralelo al eje Z. Grafíquelo, calcule $\|\overline{\mathbf{v}} \times \overline{\mathbf{u}}\|$ e indique la dirección $\overline{\mathbf{v}} \times \overline{\mathbf{u}}$ y exprese el vector $\overline{\mathbf{v}} \times \overline{\mathbf{u}}$ como combinación lineal de $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$.

6. Use notación paramétrica o vectorial para describir los puntos que están en las configuraciones dadas.

   (a) La recta que pasa por $(1, -1)$ y es perpendicular a la recta $2x + y + 1 = 0$

   (b) El plano generado por los vectores $\mathbf{v}_1 = (2, 7, 0)$ y $\mathbf{v}_2 = (0, 2, 7)$ que pasa por el origen de coordenadas..

   (c) El plano que contiene al origen y es paralelo a $3x - 2y - 5z - 1 = 0$.

   (d) El plano que contiene al punto $(-2, 3, 1)$ y es perpendicular a la recta $x = 3t$, $y = 2t$, $z = -2t$, $t \in \mathbb{R}$.

7. Muestre que no hay puntos (x, y, z) que satisfagan $2x - 3y + z - 2 = 0$ y que estén sobre la recta $L = (2, -2, -1) + t\,(1, 1, 1)$, $t \in \mathbb{R}$.

8. Demuestre la Ley del paralelogramo: sean $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in E^n$

$$\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 + \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|^2 = 2\left(\|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2\right)$$

9. Grafique en el plano xy cada una de las siguientes cónicas.

   i) $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 1$ iii) $y = (x-1)^2 + 2$
   ii) $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1,$ iv) $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1,$ indique las asíntotas

10. Grafique en el plano xyz cada una de las siguientes cuádricas.

   i) $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + z^2 = 1$ iii) $-x^2 - y^2 + z^2 = 1$ v) $z = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9}$
   ii) $x^2 + y^2 - z^2 = 1,$ iv) $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = z^2$ vi) $z = \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9}$

2020, FCEN, UNCuyo