Cálculo II
3. Coordenadas en el plano y en el espacio.

Para realizar este práctico utilizaremos la siguiente bibliografía:

- Sección 2.2 7 (pág 21 a 27) y Sección 2.3.2 (pág 29 a 31) de las Notas de clase.
- Sección 1.4 , Marsden-Tromba , "Cálculo vectorial", 5 ed. Perason Addison-Wesley.

1 Sistemas de coordenadas en el plano

1. Realice los cambios de coordenadas necesarios para completar el siguiente cuadro:

Coordenadas cartesianas		$(-4, 2\sqrt{3})$		$(-10, 0)$	
Coordenadas polares	$(2, \frac{\pi}{3})$		$(2\sqrt{2}, \frac{3}{4}\pi)$		$(3, 6)$

   Represente gráficamente cada punto.

2. Dadas las ecuaciones o inecuaciones cartesianas.

$$\begin{array}{rcl} \text{a) } x^2+y^2 & = & 8, \qquad \text{b) } x^2+y^2 \leq 1, \\ \text{c) } x^2+y^2 & \leq & 2x, \quad \text{d) } x^2+y^2 \leq 2y \wedge x > 0 \end{array}$$

   i) Deduzca una ecuación o inecuación polar de la curva o región dada en cada inciso. Considere que
$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = rsen\theta \end{cases}, \; r > 0, \; \theta_0 \leq \theta \leq \theta_0 + 2\pi$$
   con θ_0 conveniente.

   ii) Represente la solución en un plano de coordenadas cartesianas xy y en un plano de coordenadas polares $r\theta$.

3. Dadas las siguientes ecuaciones en coordenadas polares.

$$\begin{array}{rcl} \text{i) } r & = & 1, \qquad \text{ii) } r\,sen\theta = 1, \qquad \text{iii) } r = 3\cos\theta \\ \text{iv)} 1 & < & r \leq 3 \text{ y } \dfrac{\pi}{4} \leq \theta < \pi \end{array}$$

   (a) Halle, según corresponda, una ecuación o inecuación cartesiana para cada caso.

   (b) Represente la solución en un plano de coordenadas cartesianas xy .

4. Observemos que si considerando la sustitución
$$\frac{x}{a} = r\cos\theta \text{ y } \frac{y}{b} = rsen\theta$$
   es posible reescribir la elipse definida por la ecuación $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ en "coordenadas polares generalizadas".

   (a) Grafique la elipse en el plano xy y en el plano $r\theta$.

   (b) Halle la región en el plano $r\theta$ de la inecuación $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{4} \leq 1$.

5. Aquí veremos otro ejemplo de un sistema de coordenadas de $\mathbb{R}^2$. Sea el conjunto $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq -x \;\; \wedge \; y \geq$

(a) Grafique la región en el plano xy.

(b) Halle la región en el plano uv considerando

$$u = x - y \qquad \text{y} \qquad v = x + y.$$

(Observación: esta sustitución es una rotación de $\pi/4$)

2 Sistemas de coordenadas en el espacio

Para unificar criterios de escritura consideraremos que:

Coordenadas cilíndricas

$$\left\{\begin{array}{l} x = r\cos\theta \\ y = r sen\theta \\ z = z \end{array}\right. , \text{ donde } \begin{array}{c} r > 0 \\ \theta_0 \leq \theta < \theta_0 + 2\pi \\ z \in \mathbb{R} \end{array}$$

Coordenadas esféricas

$$\left\{\begin{array}{l} x = \rho\cos\theta sen\phi \\ y = \rho sen\theta sen\phi \\ z = \rho\cos\phi \end{array}\right. , \text{ donde } \begin{array}{c} \rho > 0 \\ 0 \leq \theta < 2\pi \\ 0 \leq \phi \leq \pi \end{array}$$

1. Realice los cambios de coordenadas necesarios para completar el siguiente cuadro.

C. Cartesianas	C. Cilíndricas	C. Esféricas
	$(1, \pi/4, 1)$	
$\left(-2\sqrt{3}, -2, 3\right)$		
	$(2, \pi/2, -4)$	
		$(1, \pi/3, \pi/4)$
$\left(\sqrt{2}, 1, 1\right)$		
	$(0, \pi/4, 10)$	
$(1, 0, 0)$		
		$(4, \pi/6, \pi/6)$
$(2, 0, -2)$		

2. Exprese las siguientes superficies como ecuaciones en coordenadas cilíndricas. Escriba su paramétrización y grafíquelas.

   i) $z = 1$(plano), ii) $z = x^2+y^2$ (paraboloide), iii) $x^2+y^2 = 4$ (cilindro), iv) $x^2+y^2+z^2 = 1$(esfera)

3. Dadas las siguientes superficies en coordenadas cilíndricas:

   $$\text{i) } r = k,\ k \text{ constante}, \quad \text{ii) } z = 2 - r^2, \quad \text{iii) } \theta = \frac{\pi}{3}$$

   (a) Exprese cada superficie como una ecuación en coordenadas cartesianas.

   (b) Grafique, en el sistema de coordenadas cartesianas xyz, las superficies dadas.

4. Dadas las siguientes superficies

   $$\text{i) } x^2 + y^2 + z^2 = a^2,\ a \text{ constante}, \quad \text{ii) } z = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \text{iii) } x = 2y$$

   (a) Grafique en el sistema de coordenadas cartesianas cada una de las superficies dadas.

(b) Expreselas como ecuaciones en coordenadas esféricas.

(c) Escriba su ecuación paramétrica.

5. Exprese en coordenadas cartesianas cada una de las superficies siguientes, dadas en coordenadas esféricas.

$$\text{i) } \rho = 6, \quad \text{ii) } \theta = \frac{\pi}{4}$$

6. Parametrice cada una de las regiones dadas a continuación:

   (a) $D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4 \wedge y \leq \sqrt{3}x \wedge y \geq \frac{\sqrt{3}}{3}x\right\}$

   (b) D es el sólido encerrado por los paraboloides $z = x^2 + y^2$ y $z = 8 - \left(x^2 + y^2\right)$.

   (c) D es el sólido encerrado por el cono $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ y la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

   (d) D es el sólido deferminado por la esfera $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$ y $z > 0$.

2020, FCEN, UNCuyo