Elementos de Cálculo II
3. Coordenadas en el plano y en el espacio.

Para realizar este práctico utilizaremos la siguiente bibliografía:

- Sección 2.2 7 (pág 21 a 27) y Sección 2.3.2 (pág 29 a 31) de las Notas de clase.
- Sección 1.4 , Marsden-Tromba , "Cálculo vectorial", 5 ed. Perason Addison-Wesley.

1 Sistemas de coordenadas en el plano

1. Realice los cambios de coordenadas necesarios para completar el siguiente cuadro:

Coordenadas cartesianas		$(-4, 2\sqrt{3})$		$(-10, 0)$	
Coordenadas polares	$(2, \frac{\pi}{3})$		$(2\sqrt{2}, \frac{3}{4}\pi)$		$(3, 6)$

   Represente gráficamente cada punto.

2. Dadas las ecuaciones o inecuaciones cartesianas.

$$\text{a) } x^2 + y^2 = 8, \qquad \text{b) } x^2 + y^2 \leq 1, \qquad \text{c) } x^2 + y^2 \leq 2y \wedge x > 0$$

   i) Deduzca una ecuación o inecuación polar de la curva o región dada en cada inciso. Considere que

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = rsen\theta \end{cases}, \; r > 0, \; \theta_0 \leq \theta \leq \theta_0 + 2\pi$$

   con θ_0 conveniente.

   ii) Represente la solución en un plano de coordenadas cartesianas xy.

3. Dadas las siguientes ecuaciones en coordenadas polares.

$$\text{i) } r = 1, \qquad \text{ii) } r\,sen\theta = 1, \qquad \text{iii) } r = 3\cos\theta$$

   Halle una ecuación cartesiana para cada caso. Y represente la solución en un plano de coordenadas cartesianas xy.

4. Observemos que si considerando la sustitución

$$\frac{x}{a} = r\cos\theta \text{ y } \frac{y}{b} = rsen\theta$$

   es posible reescribir la elipse definida por la ecuación $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ en "Coordenadas polares generalizadas".

   (a) Grafique la elipse en el plano xy y en el plano $r\theta$.

   (b) Halle la región en el plano $r\theta$ de la inecuación $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{4} \leq 1$.

2 Sistemas de coordenadas en el espacio

Para unificar criterios de escritura consideraremos que:

Coordenadas cilíndricas

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r sen\theta \\ z = z \end{cases}, \text{ donde } \begin{matrix} r > 0 \\ \theta_0 \leq \theta < \theta_0 + 2\pi \\ z \in \mathbb{R} \end{matrix}$$

Coordenadas esféricas

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta sen\phi \\ y = \rho sen\theta sen\phi \\ z = \rho\cos\phi \end{cases}, \text{ donde } \begin{matrix} \rho > 0 \\ 0 \leq \theta < 2\pi \\ 0 \leq \phi \leq \pi \end{matrix}$$

1. Realice los cambios de coordenadas necesarios para completar el siguiente cuadro.

C. Cartesianas	C. Cilíndricas	C. Esféricas
	$(1, \pi/4, 1)$	
$\left(-2\sqrt{3}, -2, 3\right)$		
	$(2, \pi/2, -4)$	
		$(1, \pi/3, \pi/4)$
$\left(\sqrt{2}, 1, 1\right)$		
	$(0, \pi/4, 10)$	
$(1, 0, 0)$		
		$(4, \pi/6, \pi/6)$
$(2, 0, -2)$		

2. Exprese las siguientes superficies como ecuaciones en coordenadas cilíndricas. Escriba su parametrización y grafiquelas.

   i) $z = 1$(plano), ii) $z = x^2+y^2$ (paraboloide), iii) $x^2+y^2 = 4$ (cilindro), iv) $x^2+y^2+z^2 = 1$(esfera)

3. Dadas las siguientes superficies en coordenadas cilíndricas:

   $$\text{i) } r = k,\ k \text{ constante}, \quad \text{ii) } z = 2 - r^2, \quad \text{iii) } \theta = \frac{\pi}{3}$$

   Exprese cada superficie en coordenadas cartesianas.

4. Grafique en el sistema de coordenadas cartesianas cada una superficies

   $$\text{i) } x^2 + y^2 + z^2 = a^2,\ a \text{ constante}, \quad \text{ii) } z = \sqrt{x^2 + y^2},$$

   Exprese en coordenadas esféricas. Escriba su parametrización y grafiquelas.

5. Sean las superficies siguientes, dadas en coordenadas esféricas.

   $$\text{i) } \rho = 6, \quad \text{ii) } \theta = \frac{\pi}{4}$$

   Grafiquelas y exprese en coordenadas cartesianas cada una de ellas.

6. Parametrice cada una de las regiones dadas a continuación:

   (a) $D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4 \wedge y \leq \sqrt{3}x \wedge y \geq \frac{\sqrt{3}}{3}x\right\}$

   (b) D es el sólido encerrado por los paraboloides $z = x^2 + y^2$ y $z = 8 - \left(x^2 + y^2\right)$.

   (c) D es el sólido encerrado por el cono $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ y la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

   (d) D es el sólido deferminado por la esfera $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$ y $z > 0$.

2020, FCEN, UNCuyo