Cálculo II
4. Funciones $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$.

La bibliografía que utilizaremos para este tema es:

- Principal: Capítulo 3 de las Notas de clase.
- Complementarios: Sección 2.1 , Marsden-Tromba , "Cálculo vectorial", 5 ed. Perason Addison-Wesley.
- Complementarios: Sección 13.1 y 14.1. G. Thomas, "Cálculo. Varias variables." 11ed. Pearson Educación.

1. Evalue la función en los puntos indicados.

   (a) $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \ln \frac{x^2}{x^2+y^2}$, $\mathbf{x} = (5, -5)$

   (b) $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \frac{1}{x^2}\mathbf{i} + \frac{1}{y^2}\mathbf{j} + \frac{1}{z^2}\mathbf{k}$, $\mathbf{x} = \left(\sqrt{3}, \sqrt{2}, \sqrt{6}\right)$

   (c) $\mathbf{f}(t) = \frac{1}{t}\mathbf{i} + t\mathbf{j} + \sqrt{t}\mathbf{k}$, $t = 16$

2. Grafique las siguientes funciones del tipo $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

   i) $f(x) = \frac{4x}{x^2+1}$ ii) $f(x) = \begin{cases} 2^{-x-1} & x > 0 \\ e^{x+1} & x < 0 \end{cases}$

3. Sean las funciones del tipo $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

   (a) Determine el dominio de las siguientes funciones escalares

   i) $h(x,y) = x^2 - y^2\sqrt{4+y}$ iii) $r(x,y) = \frac{x}{\ln(x^2-y^2)}$ v) $l(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{x+y} & xy > 0 \\ 1 & xy = 0 \\ \frac{x^2}{\ln y} & xy < 0 \end{cases}$

   ii) $g(x,y) = \frac{y^2}{x^2+y}$ iv) $u(x,y) = \sqrt{(1-x^2)(y^2-4)}$

   (b) ¿Cuáles de las siguientes operaciones pueden ser realizadas (sin modificar el dominio)? Cuando sea posible efectúelas. Si no es posible explique el por qué?

   $$f + g,\ 2s + 3r,\ h.g \text{ (producto usual)}$$

   (c) Determine las ecuaciones de las trazas (con los planos coordenados) y curvas de nivel de las funciones dadas. Grafique cada una de las funciones.

   i) $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2-1}$ iii) $f(x,y) = (x-y)^2$ v) $f(x,y) = \begin{cases} x^2+y^2 & x \geq 0 \\ 9-x^2-y^2 & x < 0 \end{cases}$

   ii) $f(x,y) = \sqrt{9x^2-3y^2}$ iv) $f(x,y) = 9 - y^2$

   (d) Grafique la función

   $$f(x,y) = \begin{cases} x^2+y^2 & x^2+y^2 \leq 1 \\ 1 & 1 < x^2+y^2 \leq 3 \end{cases}$$

4. Sean las funciones del tipo $f : D \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$.

(a) Determine y grafique el dominio de las siguientes funciones.

i) $f(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2-16}$

ii) $f(x,y,z) = \frac{\sqrt{25-x^2-y^2}}{z-5}$

iii) $f(x,y,z) = \ln\left(36-36x^2-4y^2-9z^2\right)$

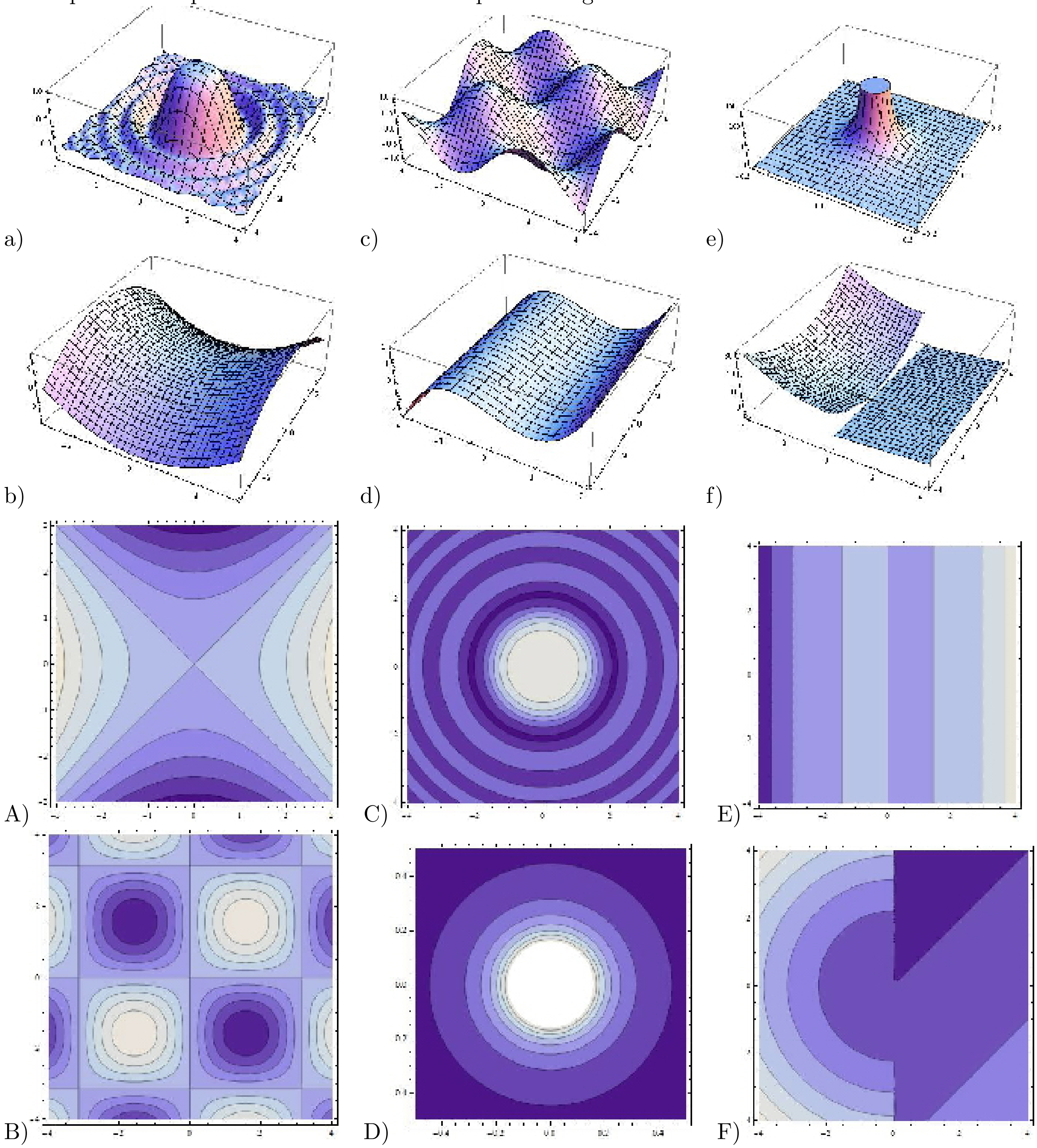
iv) $g(x,y,z) = \begin{cases} \frac{x^2+y^2}{z} & x^2+y^2+z^2 \leq 1 \\ \ln x & x^2+y^2+z^2 > 1 \end{cases}$

(b) Describa la gráfica de cada función calculando algunos conjuntos de nivel y secciones.

i) $f(x,y,z) = x+y$

ii) $f(x,y,z) = 4x^2+y^2+9z^2$

5. Identifique cada mapa de contorno con la correspondiente gráfica.



6. Sea la función $f(x,y) = \left(x^2 + 3y^2\right) e^{1-x^2-y^2}$. Grafique las curvas de nivel de la función dada utilizando Wolfram Alpha (http://www.wolframalpha.comhttp://www.wolframalpha.com). Ingrese la función de la forma

$$f[x,y] = (x\hat{\ }2 + 3y\hat{\ }2)Exp[1 - x\hat{\ }2 - y\hat{\ }2]$$

y utilice las sentencias de código abierto (open code) que se encuentran en dicha página.

7. Un ejemplo clásico de la literatura de electricidad y electromagnetismo es el de una esfera conductora de radio r_1 con carga positiva neta Q_1 y un cascarón esférico conductor de radio

interior r_2 y radio exterior r_3, concéntrico con la esfera de radio r_1, y con carga Q_2. El espacio entre r_1 y r_2 está libre y se considera $Q_1 > -Q_2$. En este problema, el campo eléctrico E resulta distribuido de la siguiente forma:

$$E(r) = \begin{cases} \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 r^2} & \text{si} \quad r_1 < r < r_2 \\ \frac{Q_1+Q_2}{4\pi\epsilon_0 r^2} & \text{si} \quad r > r_3 \end{cases}$$

donde ϵ_0 es una constante. Analice la simetría del problema y grafique la solución e interprete físicamente. ¿Qué se modifica en la gráfica si $Q_1 < -Q_2$?

8. Sean las funciones del tipo $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$.

   (a) Determine el dominio de las siguientes funciones.

      i. $f : D_1 \subset \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}$, $f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = x_1 + \frac{1}{x_2} - 4x_3 \ln(x_4 - x_5)$.

      ii. $\mathbf{r} : D_4 \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $\mathbf{r}(x, y) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + \frac{1}{x-y}\mathbf{k}$

   (b) Represente gráficamente las siguientes funciones.

      i. $\mathbf{g} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $\mathbf{g}(x, y) = (-x, y)$.

      ii. $\mathbf{h} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $\mathbf{g}(x, y) = \left(\frac{-x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$.

9. Sean las funciones del tipo $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$.

   (a) Determine el dominio de la función vectoriales, $\mathbf{f} : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$,

   $$\mathbf{f}(t) = \ln\left(\frac{1}{4-t^2}\right)\mathbf{i} + \log(1-t)\mathbf{j} + \sqrt{t}\mathbf{k}$$

   (b) Para cada una de las siguientes representaciones vectoriales, halle la expresión cartesiana y dibuje la curva $\mathbf{r}$.

   i) $\mathbf{r}(t) = (t-1)\mathbf{i} + (2t-1)\mathbf{j}$, $t \in \mathbb{R}$ iii) $\mathbf{r}(t) = (\cos t, sent, t)$, $t \in \mathbb{R}$

   ii) $\mathbf{r}(t) = (3t)\mathbf{i} + (t^2-1)\mathbf{j}$, $t \in \mathbb{R}$ iv) $\mathbf{r}(t) = (3\cos t, 4sent)$, $t \in [0, 2\pi]$

   (c) Halle la curva intersección de las siguientes superficies. Exprese la solución en forma paramétrica.

   i) $\begin{cases} x + y - z = 2 \\ x - y + z = 1 \end{cases}$ iii) $\begin{cases} z = x^2 + y^2 \\ z = 9 - x^2 - y^2 \end{cases}$

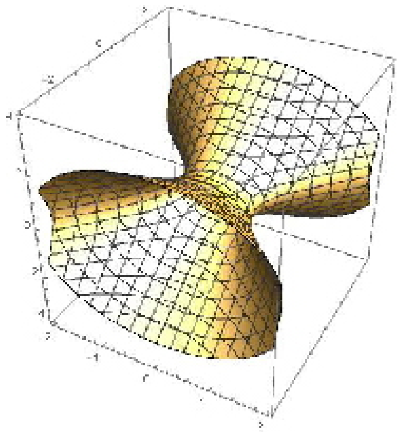
   ii) $\begin{cases} z = 6 \\ x^2 + y^2 = 16 \end{cases}$ iv) $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 4 \\ x + y = 2 \end{cases}$

10. Proponga dos parametrización para cada una de las siguientes superficies.

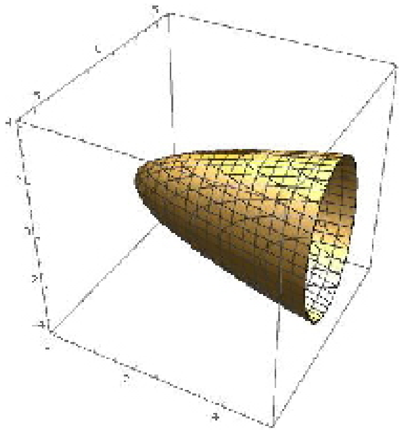
    i) $z = x^2 + y^2$ ii) $9 = x^2 + y^2$

11. Complete en cada caso.

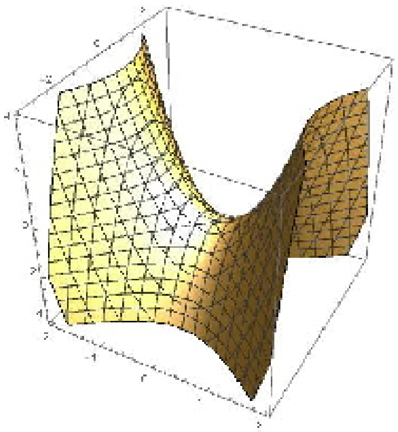
(a) Conecte la superficie $g(x, y, z) = 1$ con el gráfico. Escriba O si no es ninguno de los gráficos.



I



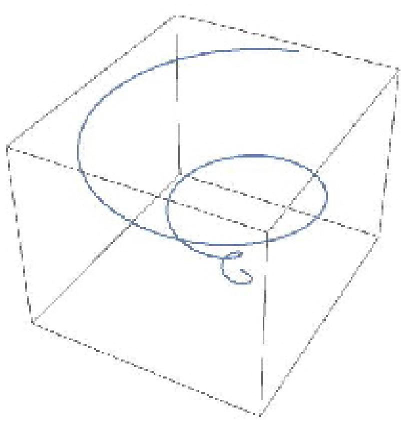
II



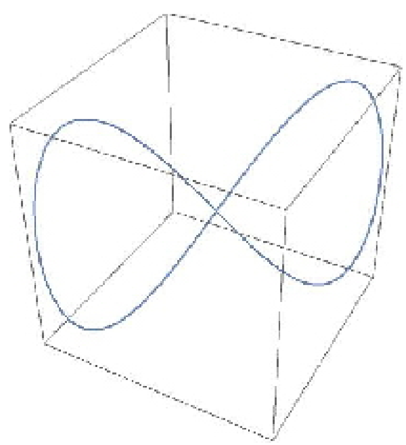
III

Función $g(x, y, z)$	Gráfico O,I,II,III
$2x - y^2 - z^2$	
$2x^2 - y^2 + z^2$	
$2x - y$	
$2x^2 - y^2 - z$	

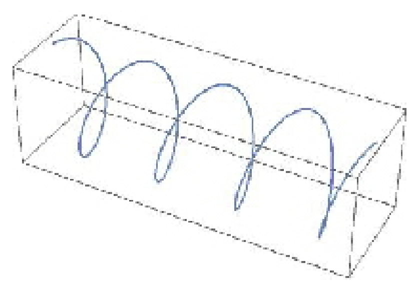
(b) Conecte el gráfico de la curva con su parametrización. Escriba O si no es ninguno de los gráficos.



I



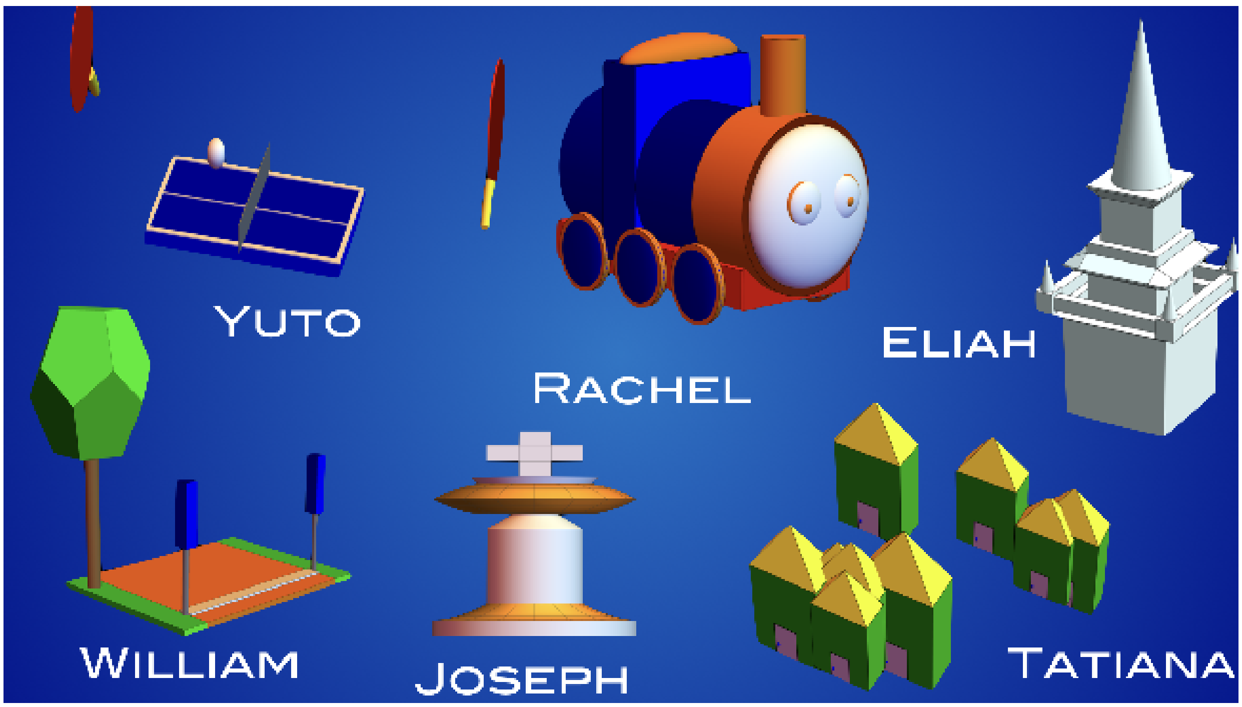
II



III

Función $r(t)$	Gráfico O,I,II,III
$(t, sen4t, \cos 4t)$	
$(\cos t, \cos t, sen2t)$	
$(3t, 1 - t, 5t)$	
$(tsent, t\cos t, t)$	

Observemos que conociendo estas funciones en varias variables podemos realizar gráficos como los siguientes



2020 FCEN, UNCuyo