Cálculo II
5. Límite y Continuidad de Funciones.

La bibliografía que utilizaremos para este tema es:

- Principal: Capítulo 4 de las Notas de clase.
- Principal: Sección 2.2 , Marsden-Tromba , "Cálculo vectorial", 5 ed. Perason Addison-Wesley.
- Complementario: Sección 13.2 G. Thomas, "Cálculo. Varias variables." 11ed. Pearson Educación.

1. Dadas las siguientes normas, para $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$,

$$\|\mathbf{x}\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i| \,, \qquad \|\mathbf{x}\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}, \qquad \|\mathbf{x}\|_\infty = \max_{1\leq i\leq n} |x_i|$$

Grafique en $\mathbb{R}^2$ los conjuntos, con $\mathbf{x}_0 = (1,1)$ y $r = 1$.

(a) $\left\{\mathbf{x} \in\mathbb{R}^2 : \|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0\|_1 < r\right\}$
(b) $\left\{\mathbf{x} \in\mathbb{R}^2 : \|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0\|_2 < r\right\}$
(c) $\left\{\mathbf{x} \in\mathbb{R}^2 : \|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0\|_\infty < r\right\}$
(d) Generalice los conjuntos anteriores para cualquier punto $\mathbf{x}_0$ y $r > 0$.
(e) (Opcional) Analice la equivalencias entre las tres normas de $\mathbb{R}^n$, verificando que:

$$\|\mathbf{x}\|_\infty \leq \|\mathbf{x}\|_1 \leq n\,\|\mathbf{x}\|_\infty \,, \qquad \|\mathbf{x}\|_\infty \leq \|\mathbf{x}\|_2 \leq \sqrt{n}\,\|\mathbf{x}\|_\infty$$

2. Clasifique en punto interior, acumulación, frontera y/o aislado a los puntos $(0,0)$, $(1,0)$, $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ y $(3,2)$ para el conjunto

$$\left\{\mathbf{x} \in\mathbb{R}^2 : 0 < \|\mathbf{x}\|_2 \leq 1\right\}.$$

Justifique su respuesta.

3. Clasifique los siguientes conjuntos en abiertos, cerrados, acotados, compactos, conexos, simplemente conexos.

(a) TP4, ejercicios 3a)i., 3a) iv.
(b) TP4, ejercicios 4a)ii., 4a)iii.

4. Pruebe, utilizando la definición de límite, que

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} x = a, \qquad \lim_{(x,y)\to(a,b)} y = b, \qquad \text{y} \lim_{(x,y)\to(a,b)} y - 3x = b - 3a$$

5. Halle los límites indicados sabiendo que $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f(x,y) = 3$, $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} g(x,y) = -5$ y $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} h(x,y) = 0$. Justifique su respuesta.

(a) $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} \left[2f(x,y) - g(x,y)\right]$
(b) $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} \left[\frac{f(x,y)}{g(x,y)+h(x,y)}\right]$

(c) $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0}\left[\frac{f(x,y)}{g(x,y)}+\frac{1}{h(x,y)}\right]$

6. Utilice coordenadas polares para calcular los siguientes límites

a) $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{0}}\frac{2xy}{x^2+y^2}$ b) $\lim\limits_{\mathbf{x}\to(1,2)}\frac{sen\left((x-1)^2+(y-2)^2\right)}{(x-1)^2+(y-2)^2}$ c) $\lim\limits_{\mathbf{x}\to(0,0)} sen\left(x^2+y^2\right)\ln\left(x^2+y^2\right)$

7. Calcule, si existen, los siguientes límites. Justifique su respuesta.

a) $\lim\limits_{(\mathbf{x},\mathbf{y})\to(5,-1)} x^2+y^2$

b) $\lim\limits_{\overline{\mathbf{x}}\to(1,2)}\frac{(x-1)^2-(y-2)}{(x-1)-(y-2)}$

c) $\lim\limits_{\overline{\mathbf{x}}\to(0,1)}\frac{3x(y-1)^2}{x^2+(y-1)^2}$

d) $\lim\limits_{\overline{\mathbf{x}}\to\overline{\mathbf{0}}}\frac{6xy^2}{x^2-y^4}$

e) $\lim\limits_{\overline{\mathbf{x}}\to(1,-2)}\frac{5(x-1)^2+(y+2)^2}{(x-1)^2-(y+2)^2}$

f) $\lim\limits_{\overline{\mathbf{x}}\to\overline{\mathbf{0}}}\frac{sen(xy)}{xy}$

g) $\lim\limits_{\mathbf{x}\to(1,1)}\frac{xy-x-y+1}{x^2+y^2-2x-2y+2}$

h) $\lim\limits_{\overline{\mathbf{x}}\to\overline{\mathbf{0}}}\frac{x^2y^2}{x^2-y^2}$

8. Calcule, si existen, los siguientes límites. Justifique su respuesta.

a) $\lim\limits_{t\to 2}\left[e^{-t}\mathbf{i}+\frac{t^2-4}{t^2-2t}\mathbf{j}+\frac{1}{t}\mathbf{k}\right]$ b) $\lim\limits_{(x,y)\to\mathbf{0}}\left[\frac{x^2-y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}\mathbf{i}+(x+y)\,\mathbf{j}\right]$ c) $\lim\limits_{(x,y)\to\mathbf{0}}\left[\frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}\mathbf{i}+6\mathbf{j}+\frac{sen(xy)}{xy}\mathbf{k}\right]$

9. Utilice coordenadas esféricas para calcular los siguientes límites.

a) $\lim\limits_{(x,y,z)\to\mathbf{0}}\frac{xyz}{x^2+y^2+z^2}$ b) $\lim\limits_{(x,y,z)\to\mathbf{0}}\arctan\left(\frac{1}{x^2+y^2+z^2}\right)$

10. Analice la continuidad de las siguientes funciones. Justifique su respuesta.

a) $g(x,y,z)=\frac{1}{z.e^{xy}}$

b) $f(x,y)=\sqrt{x^2-y^2}$ en $(1,4)$ y $(4,1)$

c) $f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} & (x,y)\neq(0,0)\\ 1 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$

d) $f(x,y)=\begin{cases}\frac{3xy}{x^2+y^2} & |x|\neq|y|\\ 1 & |x|=|y|\end{cases}$

11. En los incisos del ejercicio anterior, indique si la discontinuidad es evitable o no. En caso afirmativo, redefina la función. Justifique su respuesta.

12. Determine si cada una de las siguientes proposiciones es verdadera o falsa. Justifique su respuesta.

(a) Si $\lim\limits_{\mathbf{x}\to(1,2)} f(x,y)=3$ entonces $\lim\limits_{x\to 1} f(x,2)=3$.

(b) Si $\lim\limits_{x\to 1} f(x,2)=3$ entonces $\lim\limits_{\mathbf{x}\to(1,2)} f(x,y)=3$.

(c) Si $f(1,2)=4$ entonces $\lim\limits_{\mathbf{x}\to(1,2)} f(x,y)=4$.

2020, FCEN, UNCuyo