Elementos de Cálculo II
6. Derivadas Parciales. Diferenciabilidad.

La bibliografía que utilizaremos para este tema es:

- Principal: Capítulo 5 de las Notas de clase.
- Principal: Sección 2.3 y 2.5 , Marsden-Tromba , "Cálculo vectorial", 5 ed. Perason Addison-Wesley.
- Complementario: Sección 14.3 y 14.4 G. Thomas, "Cálculo. Varias variables." 11ed. Pearson Educación.

1. Sea la función $f(x,y) = 9 - x^2 - y^2$.

   (a) Halle las curvas intersección de esta superficie con los planos $\pi_1 : x = 1$ y $\pi_2 : y = 2$.

   (b) Calcule la pendiente de la recta tangente a cada una de las curvas halladas en el inciso (a) en los puntos $y = 2$ y $x = 1$, respectivamente.

   (c) Calcule las derivadas parciales $\frac{\partial f}{\partial x}(1,2)$ y $\frac{\partial f}{\partial y}(1,2)$.

   (d) Compare los resultados, grafique e interprete geométricamente.

2. (a) Calcule las derivadas parciales primeras de las siguientes funciones.

   (i) $f(x,y,z) = xy + 3zx^2$ (ii) $f(x,y) = \frac{\cos(x-2y)}{\cos(x+2y)}$ (iii) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy.(x^2-y^2)}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$

   (b) Calcule la matriz $Df(\mathbf{x})$ y $Df(\mathbf{x}_0)$ de derivadas parciales de las siguientes funciones en los puntos dados.

   i. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $f(x,y) = (seny, e^x + y, x + 3y)$, $\mathbf{x}_0 = (1,0)$.

   ii. $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $f(x,y,z) = (xy, z^x)$, $\mathbf{x}_0 = (1,2,3)$.

3. Sea la función

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{2xy}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

   (a) Analice la continuidad de la función en el punto $(0,0)$.

   (b) Calcule las derivadas parciales $f_x(0,0)$ y $f_y(0,0)$.

   (c) De los incisos (a) y (b), ¿se puede concluir alguna relación entre las derivadas parciales y la continuidad?

   (d) Grafique simultáneamente la función $z = f(x,y)$ y el plano tangente.

4. Sea la función f definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{\sqrt{x^2+y^2}} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

(a) Demuestre que es continua en $(0,0)$

(b) Demuestre que existen $f_x(0,0)$ y $f_y(0,0)$.

(c) ¿Es diferenciable en $(0,0)$?

(d) Grafique simultáneamente la función $z = f(x,y)$ y el plano tangente.

5. En cada caso, calcule la derivada $\frac{df}{dt}$ o las derivadas parciales $\frac{\partial f}{\partial u}$, $\frac{\partial f}{\partial v}$ (según corresponda) usando la regla de la cadena.. Además, calcule el diferencial df.

   (a) $f(x,y) = \frac{x}{y}$ con la curva $C(t) = \left(e^t, \ln t\right)$.

   (b) $f(x,y) = e^{xy}$ con la superficie $S(u,v) = (u.senv, u.\cos v)$.

6. Halle las derivadas parciales de segundo orden para las funciones
   (i) $f(x,y) = \frac{1}{x^2+y^2}$ (ii) $f(x,y,z) = x^2 + y - z^3$.

2020, FCEN, UNCuyo