Cálculo II
8. Integrales Dobles y Triples.

La bibliografía que utilizaremos para este tema es:

- Principal: Capítulo 8 de las Notas de clase.
- Principal: Capítulo 5, 6, Marsden-Tromba , "Cálculo vectorial", 5 ed. Perason Addison-Wesley.
- Complementario: Capítulo 15, G. Thomas, "Cálculo. Varias variables." 11ed. Pearson Educación.

1 Integrales dobles.

1. Resuelva las siguientes integrales iteradas.

   (a) $\int_2^3 \int_{-1}^1 \left(3x^2y + 2x\right)\, dx\, dy$ (b) $\int_0^1 \int_{-1}^2 \frac{x^2+2}{x^3+6x+1} 3y^2 dy\, dx$

2. Para cada una de las integrales dobles:

   (a) dibuje la región de integración,
   (b) escriba los límites de integración $\int\int_D f(x,y)\, dxdy$ y calcule su valor
   (c) invierta el orden de integración y calcule su valor

      i. $\int\int_D \left(x^2 + 3xy\right)\, dA,\ \ D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 \leq y \leq 4x + 5\right\}$
      ii. $\int\int_D y\, dA,\ \ D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + (y-1)^2 \leq 1 \ \wedge\ 2 - x \leq y\right\}$
      iii. $\int\int_D e^{x/y}\, dA,\ \ D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \leq x \leq y^3 \ \wedge\ 1 \leq y \leq 2\right\}$
      iv. $\int\int_D \frac{x-y}{(x+y)^2}\, dA, D = [0,1] \times [0,1]$
      v. $\int\int \frac{e^{tx/y}}{y^3} dA,\ D = [0,t] \times [1,t]\, ,\ t > 0$

3. Evalue la integral
$$\int_0^4 \int_{\sqrt{x}}^2 \frac{1}{\sqrt{x+y^2}} dydx$$

4. Para cada una de las siguientes funciones $f(x,y)$ definida sobre el cuadrado $D = [0,1] \times [0,1]$, se pide determinar el conjunto
$$C = \{(x,y) \in D : \ f \ \text{ no es continua en } \ (x,y)\}$$
y calcular la integral $\int\int_D f(x,y)\, dA$.
$$f(x,y) = \begin{cases} 1 - (x+y) & x + y \leq 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \qquad f(x,y) = \begin{cases} x^2 + y^2 & x^2 + y^2 \leq 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

5. Dibuje la región de integración, estudie la existencia de la integral y calcule su valor en cada uno de los siguientes casos. Piense una estrategia para resolver estas integrales de la manera más sencilla posible.

   (a) $\int\int_D x\cos(x+y)\, dxdy$ donde D es el triángulo de vértices $(0,0)\, , (\pi, 0)\, , (\pi,\pi)\, .$
   (b) $\int\int_D e^{x+y}$ donde $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \|(x,y)\|_1 \leq 1\right\}$.

(c) $\int\int_D x^2y^2dxdy$ siendo D la porción acotada del primer cuadrante situada entre las dos hipérbolas $xy=1$ y $xy=2$ y las líneas rectas $y=x$ e $y=4x$.

(d) $\int\int_D (x-y)^2 .sen\,(x+y)\;dx\,dy$ donde D es el paralelogramo de vértices $(\pi,0)$, $(2\pi,\pi)$, (π,π) y $(2\pi,2\pi)$.

(e) $\int\int_D (x+y)^2\;dx\,dy,\;\; D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2\leq 1\right\}$

(f) $\int\int_D \log\left(x^2+y^2\right)\;dx\,dy,$ donde D es la región en el primer cuadrante comprendida entre las circunferencias $x^2+y^2=a^2$ y $x^2+y^2=a^2$, con $0<a<b$.

6. Graficar las siguientes regiones y calcular sus áreas por doble integración.

(a) $D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2\leq y\leq x+2\right\}$

(b) $D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2\leq 9\;\wedge 9-x^2\leq 6y\right\}$

7. (Para final) Es sabido, aunque difícil de demostrar, que una primitiva de la función e^{-x^2} no puede expresarse en términos de las funciones elementales usuales. Esto dificulta el cálculo $\int_a^b e^{-x^2}dx$. Sin embargo, el siguiente truco notable permite calcular de manera simple la integral impropia

$$I=\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}dx=\lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R} e^{-x^2}dx$$

(a) Observe que $I^2=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2-y^2}dxdy$.

(b) Calcule la integral de (a) como límite de integrales en círculos utilizando coordenadas polares.

2 Integrales triples

1. Calcule las siguientes integrales triples.

(a) $\int_0^2\int_0^x\int_0^{x+y} 6e^x\,(y+2z)\;dz\,dy\,dx$

(b) $\int_1^2\int_0^z\int_0^{\sqrt{3}x} \frac{2x}{x^2+y^2}\;dy\,dx\,dz$

2. Encuentre el volumen bajo el gráfico de $f(x,y)=|x+y|$ sobre el disco de centro en $(0,0)$ y radio 1.

3. Grafique los siguientes sólidos y calcule su volumen.

(a) D es la región limitada por los planos coordenados y el plano π que contiene al punto $(0,0,1)$ y es generado por los vectores $(1,0,2)$ y $(3,2,0)$.

(b) D es el interior del elipsoide $x^2+4y^2+9z^2=1$.

(c) $D=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x^2+y^2\leq 1\;\wedge\; x+z\leq 2\;\wedge\; 0\leq z\right\}$

(d) $D=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x^2+y^2\leq z\leq 8-x^2-y^2\right\}$

(e) D es el interior de la esfera de centro en $(0,0,0)$ y radio R.

(f) El volumen común de la esfera $x^2+y^2+z^2=4a^2$ y el cilindro $x^2+y^2=a^2$.

3 Aplicaciones

1. La temperatura en los puntos del cubo $Q = [-1,1] \times [-1,1] \times [-1,1]$ es proporcional al cuadrado de la distancia al origen.

   (a) ¿Cuál es la temperatura media? sabiendo que el valor medio está definido por

   $$[T]_m = \frac{\int\int\int_Q T(x,y,z)\,dV}{\int\int\int_Q dV}$$

   (b) ¿En qué puntos del cubo es la temperatura igual a la temperatura media?

2. (Tercer parcial 2019) Sea una lámina ubicada sobre el plano XY dada por $D = A - B$, donde

   $$\begin{aligned} A &= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -x^2 + 1 \leq y \leq 5 - x, 0 \leq x \leq 3\right\} \\ B &= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \|(x,y) - (2,1)\|_\infty \leq r\right\} \end{aligned}$$

   Teniendo en cuenta que la lámina tiene una densidad de masa $\delta(x,y) = x + 1$, calcule

   (a) Si $r = 1/2$, la masa total de D

   $$m(D) = \int\int_D \delta(x,y)\,dxdy$$

   (b) Si $r = 1/2$, calcule el centro de masa o de gravedad de $D : (\overline{x}, \overline{y})$

   $$\begin{aligned} \overline{x} &= \frac{1}{m(D)} \int\int_D x.\delta(x,y)\,dxdy \\ \overline{y} &= \frac{1}{m(D)} \int\int_D y.\delta(x,y)\,dxdy \end{aligned}$$

   (c) ¿Cómo varía el centro de masa, de acuerdo a dónde se ubica el "agujero" con centro en $(2,1)$ y radio r?. (Ayuda: analice casos extremos) Interprete el resultado obtenido.

2020,FCEN, UNCuyo