Cálculo II

9. Integrales de Línea y de Superficie.
Teorema de Green. Teorema de Gauss y de Stokes.

La bibliografía que utilizaremos para este tema es:

- Principal: Capítulo 8 y 9 de las Notas de clase.
- Principal: Capítulo 7 y 8 , Marsden-Tromba , "Cálculo vectorial", 5 ed. Pearson Addison-Wesley.

1 Integrales de trayectoria y de línea.

1. Calcule en cada caso la integral de trayectoria $\int_\sigma f\,ds$

   (a) $f(x,y,z) = x + y + z$, $r(t) = (\cos t, sent, t)$, $t \in [0, 2\pi]$

   (b) $f(x,y,z) = 12x.\cos z$, $r(t) = \left(t, t^2, 0\right)$, $t \in [0,1]$

2. Encuentre la longitud de las siguientes curvas:

   (a) $\gamma(t) = (t, \log(\cos t))$, $t \in [0,1]$

   (b) $x^2 + y^2 = R^2$, para $R > 0$.

3. Calcule en cada caso la integral de línea.

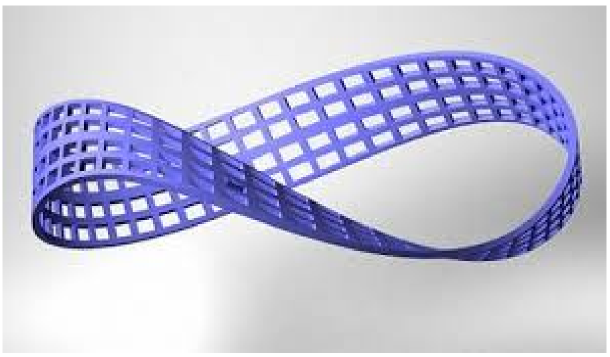
   (a) $\int_\sigma \left(x^2 - 2xy\right) dx + \left(y^2 - 2xy\right) dy$ siendo σ el arco de parábola $y = x^2$ que une los puntos $(-2,4)$ y $(1,1)$.

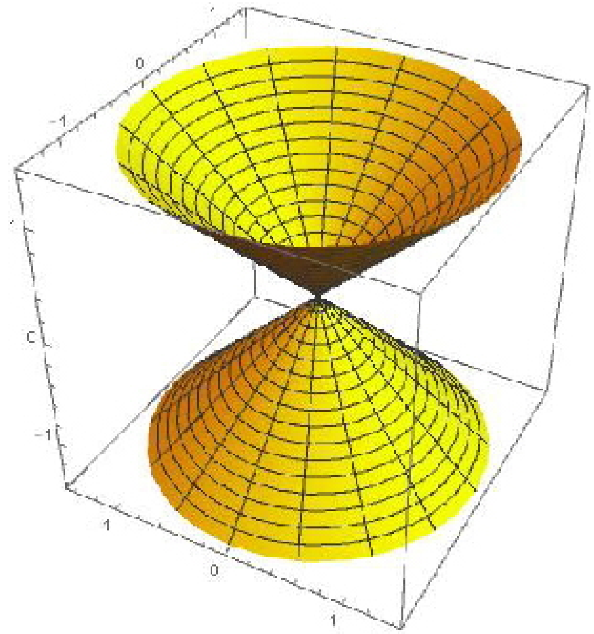
   (b) $\int_\sigma \frac{(x+y)dx-(x-2)dy}{x^2+y^2}$ siendo σ la circunferencia de radio $a > 0$ y centro en $(0,0)$.

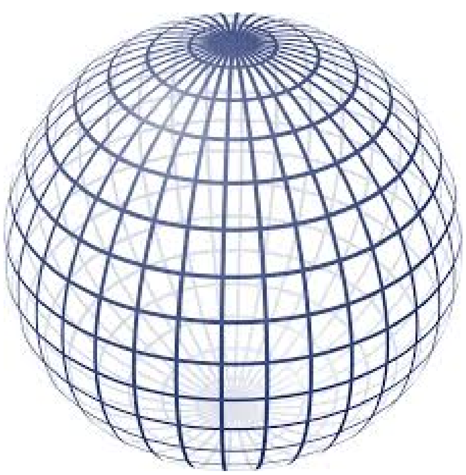
4. Encuentre el trabajo realizado al mover una partícula a lo largo de la curva $C(t) = (t,t,t^2)$ con $0 \le t \le 2$, bajo la influencia del campo $F(x,y,z) = (x+y, y, y)$.

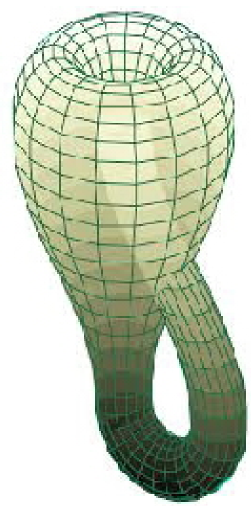
2 Integral de Superficie.

1. Indique cuales de estas imágenes son superficies orientadas y cuales no lo son.









2. Obtenga una parametrización para cada una de las superficies. Halle la expresión general del vector normal exterior a cada una de ellas.

   (a) $z = \sqrt{x^2 + y^2}$

   (b) $z = x^2 + y^2$

3. Halle el área de la:

   (a) superficie $y^2 + x^2 = 4$, $0 \leq z \leq x$.

   (b) superficie $x^2 - y^2 - z^2 = 0$, $0 \leq x$, $0 \leq y$, $0 \leq z$, $x \leq 1 - z$.

4. Calcule las siguientes integrales de superficie.

   (a) $\int\int_S \frac{xy}{z+1/4} dS$ siendo $S : z = x^2 + y^2$, $x^2 + y^2 \leq 4$.

(b) $\int\int_S \left(z^2 - 4xy^2\right) dS$ siendo $S : z = x^2 + y^2,\ \ 0 \leq x,\ z \leq 9.$

5. Calcule el flujo de los siguientes campos vectoriales sobre las superficies indicadas en cada caso.

   (a) $\overrightarrow{F}(x, y, z) = \left(x^2, y^2, z^2\right)$, $S : x + y + z = 3$, en el primer octante.

   (b) $\overrightarrow{F}(x, y, z) = (x + z)\,\mathbf{k}$, $S : x^2 + y^2 + z^2 = 144$, $9 \leq x^2 + y^2 \leq 16$.

   (c) $\overrightarrow{F}(x, y, z) = (y, z, x)$, $S : x^2 + y^2 = (25 - z)^2$, $9 \leq z \leq 16$.

3 Teoremas de Integración.

1. Si una particula está sometida a la fuerza $\overrightarrow{F}(x, y) = \left(-x^2 y, xy^2\right)$, calcule el trabajo realizado por la partícula al girar una vez, en sentido antihorario, a lo largo de la circunferencia $x^2+y^2 = 4$

2. Aplique el Teorema de Green para determinar el momento de inercia de una arandela homogénea de radio interno a, radio externo b y masa M, respecto a uno de sus diámetros.

3. Calcule el área de:

   (a) la región encerrada por $x^2 + y^2 = 1$, $y \geq x$, $y = 0$.

   (b) un arco de cicloide $x = a(\theta - sen\theta)$, $y = a(1 - \cos\theta)$, $a > 0$, $\theta \in [0, 2\pi]$ y el eje x.

4. Sea $P(x, y) = -\frac{y}{x^2+y^2}$ y $Q(x, y) = \frac{x}{x^2+y^2}$. donde $D : x^2 + y^2 \leq 1$.

   (a) Calcule la integral de línea $\int_{x^2+y^2=1} \overrightarrow{F} \cdot ds$

   (b) Calcule la integral $\int\int_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\, dy$.

   (c) ¿Los resultados obtenidos en (a) y (b) contradicen el Teorema de Green? Justifique su respuesta.

5. Calcule, de dos formas distintas, la integral de superficie $\int_S rot\overrightarrow{F} dS$ para el campo vectorial $\overrightarrow{F}$ y la superficie S dados a continuación:

   (a) $\overrightarrow{F}(x, y, z) = \left(y^2, z^2, x^2\right)$, S es la parte del plano $x+y+z = 1$ que se encuentra en el primer octante, la normal exterior apunta en la dirección donde crecen los valores de las variables.

   (b) $\overrightarrow{F}(x, y, z) = (2y, -z, 3)$, S es la parte del paraboloide $z = 4 - x^2 - y^2$ que se encuentra dentro del cilindro $x^2 + y^2 = 1$.

   (c) $\overrightarrow{F}(x, y, z) = (-3y, x, zsen(z - 2)\, sen(z - 2))$, S es la parte del cono $z^2 = x^2 + y^2$ que se encuentra entre los planos $z = 1$ y $z = 2$.

6. Calcule, de dos formas distintas, el flujo del campo $\overrightarrow{F}(x, y, z) = \left(x^2, y^2, z^2\right)$, sobre la superficie $S : x + y + z = 3$, en el primer octante .

7. Calcule $\int_V \operatorname{div} \overrightarrow{F} dV$, de dos formas distintas.

   (a) $\overrightarrow{F}(x, y, z) = \left(3x^2 y, xy^2, 0\right)$, $V = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y \leq 1, x \geq 0, y \geq 0, 0 \leq z \leq 1\right\}$

   (b) $\overrightarrow{F}(x, y, z) = (x, y, z)$, $V = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 16, z \geq 1\right\}$

8. Determine si los siguientes campos vectoriales son conservativos. En caso afirmativo, halle la función potencial.

   (a) $\overrightarrow{F}(x,y) = (y.e^{xy}, x.e^{xy})$ (c) $\overrightarrow{F}(x,y) = (x + y\cos x, senx)$
   (b) $\overrightarrow{F}(x,y) = \left(2xy, -x^2\right)$ (d) $\overrightarrow{F}(x,y,z) = (x+z, -y-z, x-y)$

9. Calcule el trabajo realizado por el campo vectorial $\overrightarrow{F}(x,y) = \left(\sqrt{y}, x-y\right)$ a lo largo de la curva γ que une los puntos $(0,0)$ y $(1,1)$ siguiendo : (i) $y = x$, (ii) $y^2 = x^3$ ¿el trabajo realizado depende de la trayectoria recorrida? ¿y de la parametrización utilizada?

10. Pruebe que los siguientes campos vectoriales son conservativos y, mediante el uso de su función potencial, calcule las integrales de línea.

    (a) $\int_{(0,0)}^{(1,2)} \left(3x^2 + y\right) dx + (x-4y)\, dy$ (b) $\int_{(1,1,2)}^{(3,5,0)} (yz)\, dx + (xz)\, dy + (xy)\, dz$

11. Sea el campo vectorial $F(x,y) = (2x, 2y)$.

    (a) Grafique el campo $F(x,y)$ y bozqueje algunas líneas de flujo ¿Qué gráfica parece seguir las líneas de flujo? Encuentre en particular la línea de flujo $r(t)$ con $r(0) = (1,1)$.
    (b) Encuentre,si existe, la función potencial g tal que $F = \nabla g$

2020, FCEN, UNCuyo