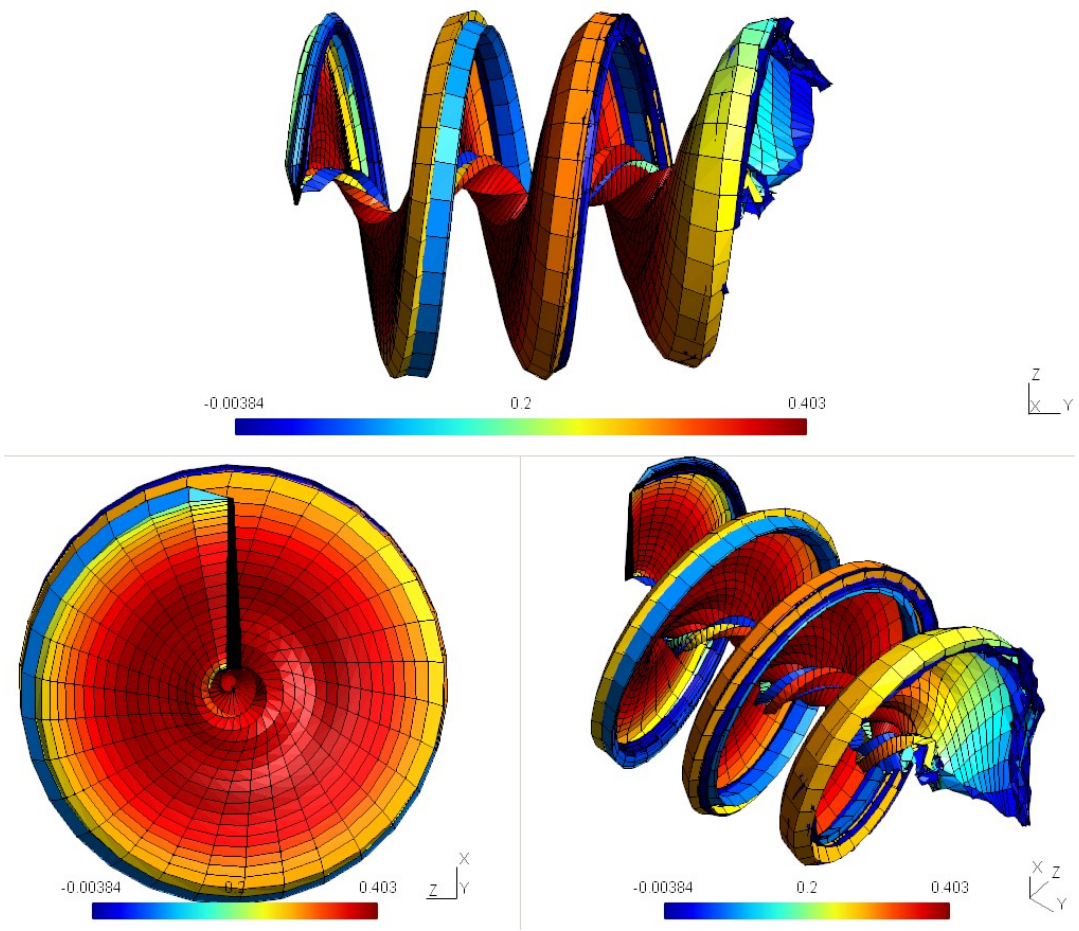
FCEN
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES



Elementos de Cálculo Numérico (M212)

Temas complementarios de Unidades 2 y 3

http://fcen.uncuyo.edu.ar/elementos-de-calculo-numerico

Temas complementarios Unidades 2 y 3

FCEN
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES

Temario

- Solución de sistemas de ecuaciones lineales con matrices de términos independientes
- Solución de sistemas de ecuaciones no lineales
- Determinación de raíces múltiples

Solución de SEL con matrices de términos independientes

FCEN
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES

Se busca resolver un conjunto de m sistemas de ecuaciones lineales, dado por una matriz de términos independientes.

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \vdots & & & \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_{11} & \dots & x_{1m} \\ x_{21} & \dots & x_{2m} \\ \vdots & & \\ x_{n1} & \dots & x_{nm} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{11} & \dots & b_{1m} \\ b_{21} & \dots & b_{2m} \\ \vdots & & \\ b_{n1} & \dots & b_{nm} \end{bmatrix}$$

Cada SEL está formado por un determinado vector independiente y su vector de incógnitas asociado.

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \vdots & & & \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_{1k} \\ x_{2k} \\ \vdots \\ x_{nk} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{1k} \\ b_{2k} \\ \vdots \\ b_{nk} \end{bmatrix}$$

Solución de SEL con matrices de términos independientes

FCEN
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES

Si se resuelve por eliminación de Gauss, durante la fase de **eliminación** se deben **considerar todas las columnas** de B. En la fase de **solución** se trabaja con **cada vector** independiente **por separado**.

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \vdots & & & \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x_{11} & \dots & x_{1m} \\ x_{21} & \dots & x_{2m} \\ \vdots & & \\ x_{n1} & \dots & x_{nm} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{11} & \dots & b_{1m} \\ b_{21} & \dots & b_{2m} \\ \vdots & & \\ b_{n1} & \dots & b_{nm} \end{bmatrix}$$

para la fila pivote p y la i-ésima fila resulta:

$$\lambda_p = \frac{A_{pi}}{A_{pp}} \rightarrow A_{ik} = A_{ik} - \lambda_p A_{pk} \wedge b_{ik} = b_{ik} - \lambda_p b_{pk}, \text{ con } k = p, \dots, n$$

Solución de SEL con matrices de términos independientes

FCEN
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES

Al obtenerse la matriz triangular la solución es por substitución hacia atrás, con la salvedad de que se debe resolver cada SEL por separado.

$$\begin{bmatrix} A''_{11} & A''_{12} & \dots & A''_{1n} \\ 0 & A''_{22} & \dots & A''_{2n} \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & \dots & A''_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_{1k} \\ x_{2k} \\ \vdots \\ x_{nk} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{1k} \\ b_{2k} \\ \vdots \\ b_{nk} \end{bmatrix}$$

Para el caso de transformaciones mediante matrices **A** ya conocidas, resulta **más eficiente** utilizar la **descomposición LU**, ya que se realiza la **descomposición una única vez** y luego simplemente se resuelven los sistemas triangulares para cada vector independiente.

Es decir, se considera el SEL A X = B , como A = LU entonces L(UX) = B. Llamando Y = UX quedan dos sistemas triangulares. L Y = B , U X = Y. Donde Y,X,B son matrices de n x m.

Solución de SEL con matrices de términos independientes

FCEN
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES

Ejemplo

$$\begin{bmatrix} 6 & -4 & 1 \\ -4 & 6 & -4 \\ 1 & -4 & 6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \\ x_{31} & x_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -14 & 22 \\ 36 & -18 \\ 6 & 7 \end{bmatrix}$$

Primera eliminación

$$\left[\begin{array}{ccc|cc} 6 & -4 & 1 & -14 & 22 \\ -4 & 6 & -4 & 36 & -18 \\ 1 & -4 & 6 & 6 & 7 \end{array}\right] \rightarrow \begin{array}{l} \lambda_1 = -2/3 \\ \lambda_2 = 1/6 \end{array} \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|cc} 6 & -4 & 1 & -14 & 22 \\ 0 & 10/3 & -10/3 & 80/3 & -10/3 \\ 0 & -10/3 & 35/6 & 25/3 & 10/3 \end{array}\right]$$

Segunda eliminación

$$\left[\begin{array}{ccc|cc} 6 & -4 & 1 & -14 & 22 \\ 0 & 10/3 & -10/3 & 80/3 & -10/3 \\ 0 & -10/3 & 35/6 & 25/3 & 10/3 \end{array}\right] \rightarrow \lambda_3 = 1 \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|cc} 6 & -4 & 1 & -14 & 22 \\ 0 & 10/3 & -10/3 & 80/3 & -10/3 \\ 0 & 0 & 5/2 & 35 & 0 \end{array}\right]$$

Solución de SEL con matrices de términos independientes

FCEN
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES

Fase de solución

$$\begin{bmatrix} 6 & -4 & 1 \\ 0 & 10/3 & -10/3 \\ 0 & 0 & 5/2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \\ x_{31} & x_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -14 & 22 \\ 80/3 & -10/3 \\ 35 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 6 & -4 & 1 \\ 0 & 10/3 & -10/3 \\ 0 & 0 & 5/2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ x_{31} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -14 \\ 80/3 \\ 35 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{matrix} x_{11} = 10 \\ x_{21} = 22 \\ x_{31} = 14 \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} 6 & -4 & 1 \\ 0 & 10/3 & -10/3 \\ 0 & 0 & 5/2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_{12} \\ x_{22} \\ x_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 22 \\ -10/3 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{matrix} x_{12} = 3 \\ x_{22} = -1 \\ x_{32} = 0 \end{matrix}$$

Solución sistemas de ecuaciones no lineales

FCEN
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES

Se busca resolver simultáneamente un sistemas de ecuaciones que no se puede presentar de la forma A x = b.

$$\begin{aligned} f_1(x_1, x_{2,}\ldots, x_n)&=0\\ f_2(x_1, x_{2,}\ldots, x_n)&=0\\ &\vdots\\ f_n(x_1, x_{2,}\ldots, x_n)&=0 \end{aligned}$$

Para resolver el sistema se utiliza un método iterativo basado en la versión linealizada de las ecuaciones.

$$f_i(x_1+\Delta x_1, x_2+\Delta x_{2,}\ldots, x_n+\Delta x_n)=f_i(x_1, x_{2,}\ldots, x_k, \ldots, x_n)+\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial f_i(x_j)}{\partial x_j}\Delta x_j$$

En forma matricial resulta $\mathbf{f}(x+\Delta x)=\mathbf{f}(x)+\mathrm{J}(x)\Delta \mathbf{x}$

Donde $\mathrm{J}(x)$ es la matriz Jacobiana

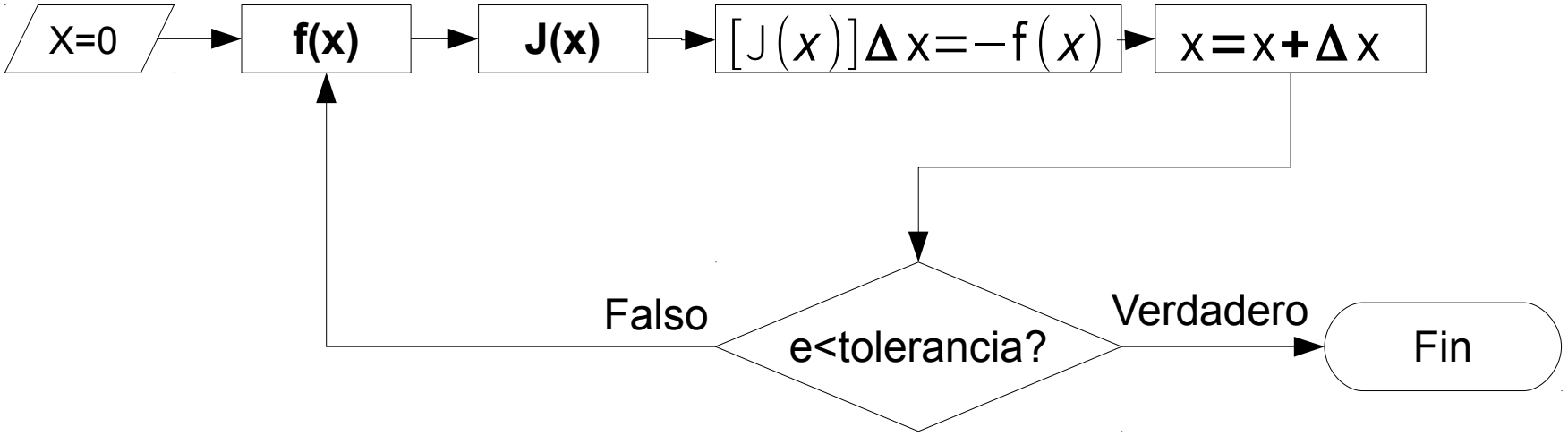
Solución sistemas de ecuaciones no lineales

FCEN
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES

Para encontrar la fórmula iterativa, se busca que la nueva iteración alcance la solución de las ecuaciones, por lo tanto las funciones evaluadas en el nuevo valor deben valer cero.

$$f(x+\Delta x)=0 \rightarrow J(x)\Delta x=-f(x)$$

Proponiendo un vector solución inicial, se utiliza la fórmula iterativa hasta alcanzar un error menor a la tolerancia.



Múltiples raíces

FCEN
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES

Cuando se buscan las raíces de una función algebraica, en particular polinomios, hay más de una raíz. Si utilizamos los métodos abiertos o cerrados en forma directa, siempre se encontrará la misma raíz. Para poder dar con las demás soluciones se debe factorizar la función y resolver otra de grado menor. Este proceso se denomina **deflación**.

Regla de Descartes para determinar la cantidad de raíces positivas y negativas de polinomios:

1) La cantidad de raíces reales positivas es igual a la cantidad de cambios de signo en Pn(x), o menos, por una cantidad par.

2) La cantidad de raíces reales negativas es igual a la cantidad de cambios de signo en Pn(-x), o menos, por una cantidad par.

$$P_3(x) = x^3 - 2x^2 - 8x + 27 \rightarrow P_3(-x) = -x^3 - 2x^2 + 8x + 27$$

Contando los cambios de signo se puede ver que hay 2 raíces reales positivas y 1 negativa

Múltiples raíces

FCEN
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES

Método de Horner para deflación de polinomios

Sea Pn(x) un polinomio y sea x=r una raíz conocida. Se puede factorizar el polinomio original de la siguiente forma:

$$P_n(x)=a_1x^n+a_2x^{n-1}+\ldots+a_nx+a_{n+1}=(x-r)(b_1x^{n-1}+b_2x^{n-2}+\ldots+b_{n-1}x+b_n)$$

Examinando el lado derecho se puede expresar de la siguiente forma:

$$(x-r)(b_1x^{n-1}+b_2x^{n-2}+\ldots+b_{n-1}x+b_n)=b_1x^n-rb_1x^{n-1}+b_2x^{n-1}-rb_2x^{n-2}+\ldots$$

De modo que el término de mayor grado será b_1

y los demás tendrán la forma b_k-rb_{k-1}

Se pueden igualar los polinomios del mismo orden y obtener los coeficientes b

$$b_1=a_1$$

$$b_k=a_k+rb_{k-1}, \text{ para } k=2,\ldots,n$$