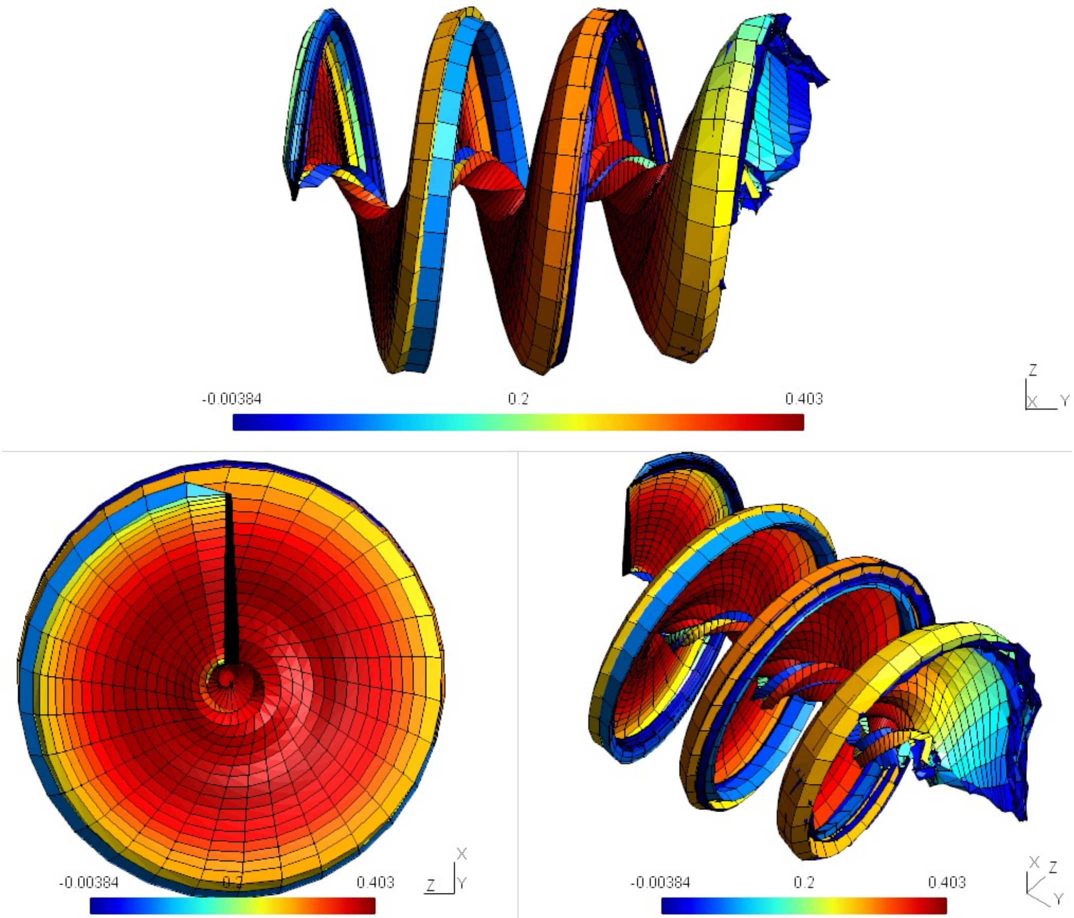
FCEN
FACULTAD DE CIENCIAS
EXACTAS Y NATURALES



Elementos de Cálculo Numérico (M212)

Unidad 2: Solución de ecuaciones de una variable

http://fcen.uncuyo.edu.ar/elementos-de-calculo-numerico

Unidad 2: Solución de ecuaciones de una variable

FCEN
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES

Temario:

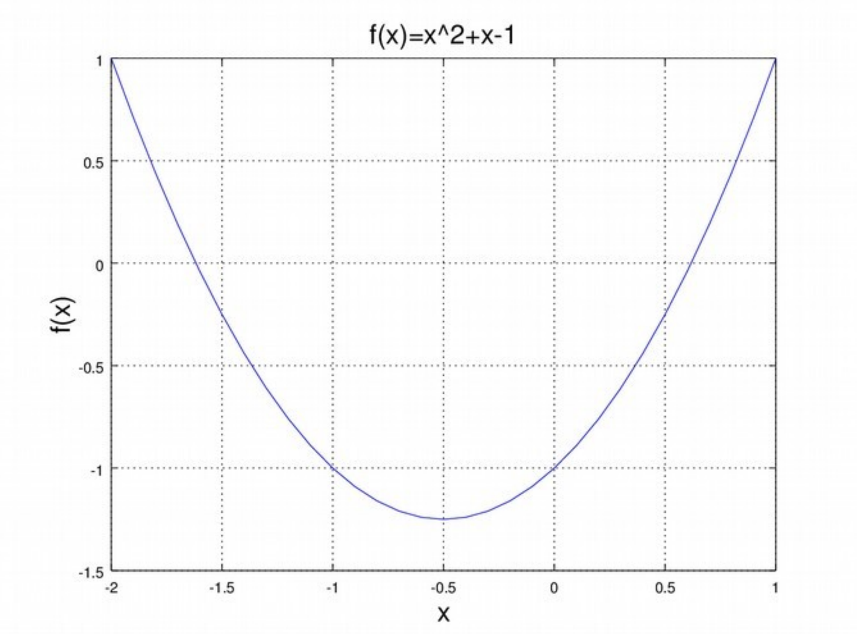
- Raíces de funciones
- Método de la Bisección
- Método de Regula Falsi
- Método de Iteración de Punto Fijo
- Método de Newton-Raphson
- Método de la Secante

Raíces (soluciones) de funciones

FCEN
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES

$$f(x) = x^2 + x - 1 = 0$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4(-1)}}{2} \rightarrow \begin{cases} x_1 = -\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{5}{4}} = 0,618033988749894848204586834365 64 \\ x_2 = -\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{5}{4}} = -1,61803398874989484820458683436 56 \end{cases}$$



x_1 y x_2 son las "raíces" o "ceros" de la ecuación cuadrática. Es decir son los valores de x que hacen cero a la función.

Para encontrar los ceros se puede:

- Graficar la función
- Hacer "prueba y error"
- Usar métodos numéricos

Raíces (soluciones) de funciones

FCEN
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES

Algunos conceptos previos

$$v=\frac{gm}{c}\left(1-e^{-(c/m)t}\right)$$

Función explícita (se puede despejar la incógnita “v”)

$$f(c)=\frac{gm}{c}\left(1-e^{-(c/m)t}\right)-v$$

Función implícita (no se puede despejar “c”)

$$f_n x^n+f_{n-1}x^{n-1}+\ldots+f_1 x+f_0=0$$

Función algebraica (los polinomios son funciones algebraicas)

Funciones trascendentes: trigonométricas, exponenciales, logarítmicas.

Raíces (soluciones) de funciones

Las raíces **pueden ser números reales o complejos**.

En general, las raíces complejas son de interés en los polinomios. Por lo tanto los métodos numéricos estándar de búsqueda de raíces se dividen en dos áreas:

- La determinación de las **raíces reales de funciones algebraicas y trascendentes**.
- La determinación de todas las **raíces reales y complejas de polinomios**.

Los métodos numéricos para raíces de funciones se clasifican en **cerrados** y **abiertos**.

En los **métodos cerrados** se necesita **conocer un entorno** que contiene la raíz. Los métodos cerrados que veremos son el método de “la bisección” y el de “regula falsi”.

Los **métodos abiertos** no requieren conocer el entorno de la raíz y son **más eficientes**, sin embargo **no siempre funcionan**. Los métodos que veremos son el método de “iteración de punto fijo”, el método de “Newton-Raphson” y el método de “la secante”.

1) Método de la bisección

Se comienza con un **intervalo cerrado de partida [a,b]** en el que **f(a) y f(b) tengan distinto signo**. Por el teorema del valor intermedio, la gráfica de (x,f(x)) deberá cruzar el eje x en un cero x=r dentro del intervalo [a,b].

El método de la bisección consiste en ir **reduciendo iterativamente el ancho del intervalo** hasta que se obtenga un determinado error. El **proceso de subdivisión** consiste en tomar el punto medio del intervalo c=(a+b)/2 y luego analizar las siguientes **posibilidades**:

- f(a) y f(c) tienen signos opuestos, entonces hay un cero dentro de [a,c]
- f(c) y f(b) tienen signos opuestos, entonces hay un cero dentro de [c,b]

De esta forma se redujo el intervalo original por la mitad, reduciendo el error a la mitad. Para continuar el proceso, **se renombra el intervalo [a,c] o [c,b] como [a,b]** y **se repite la subdivisión**. La sucesión de extremos izquierdos es creciente, mientras que la sucesión de extremos derechos es decreciente.

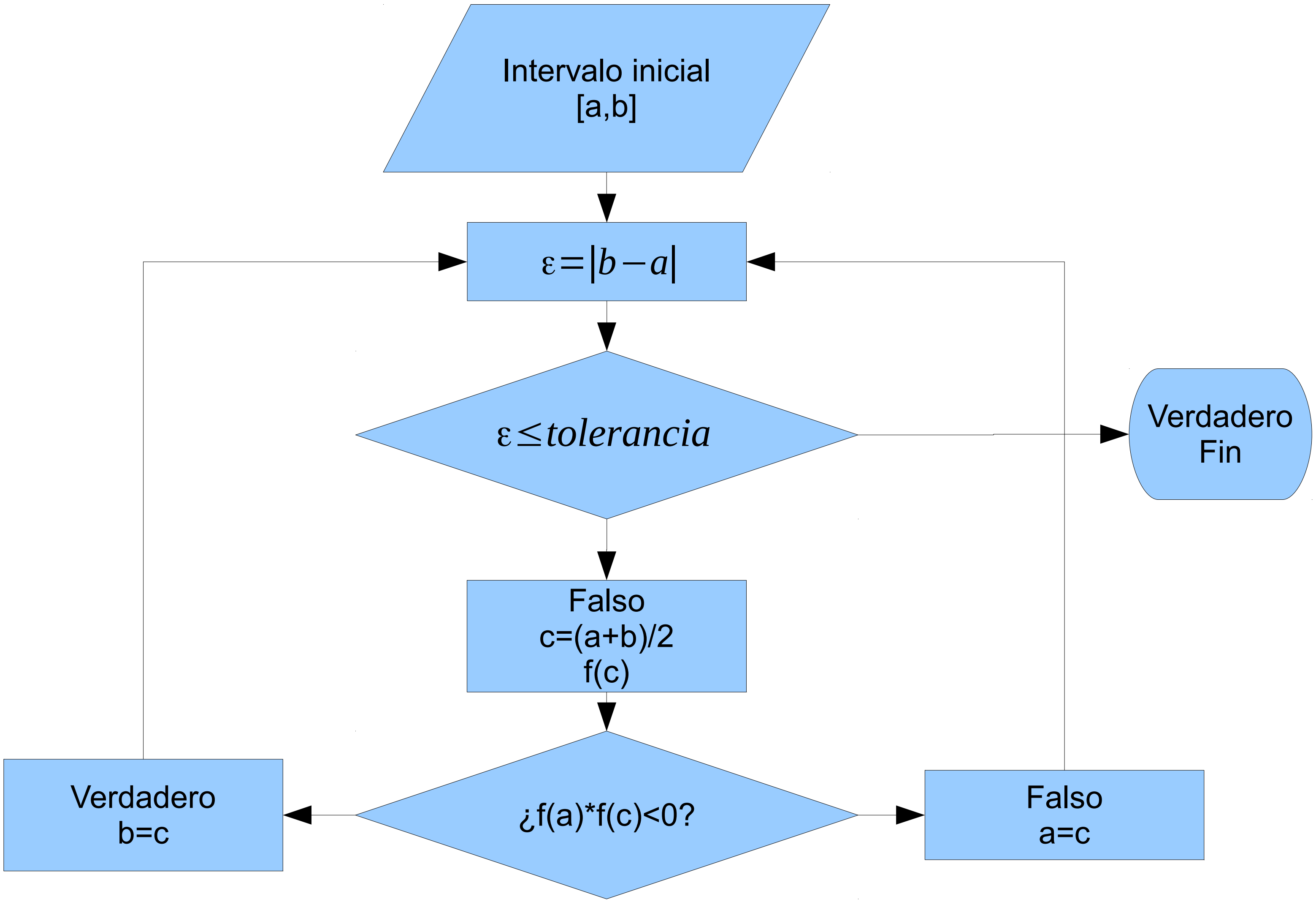
Teorema de la convergencia del método de la bisección:

Sea $f \in C[a,b] \wedge f(a) \cdot f(b) < 0$.

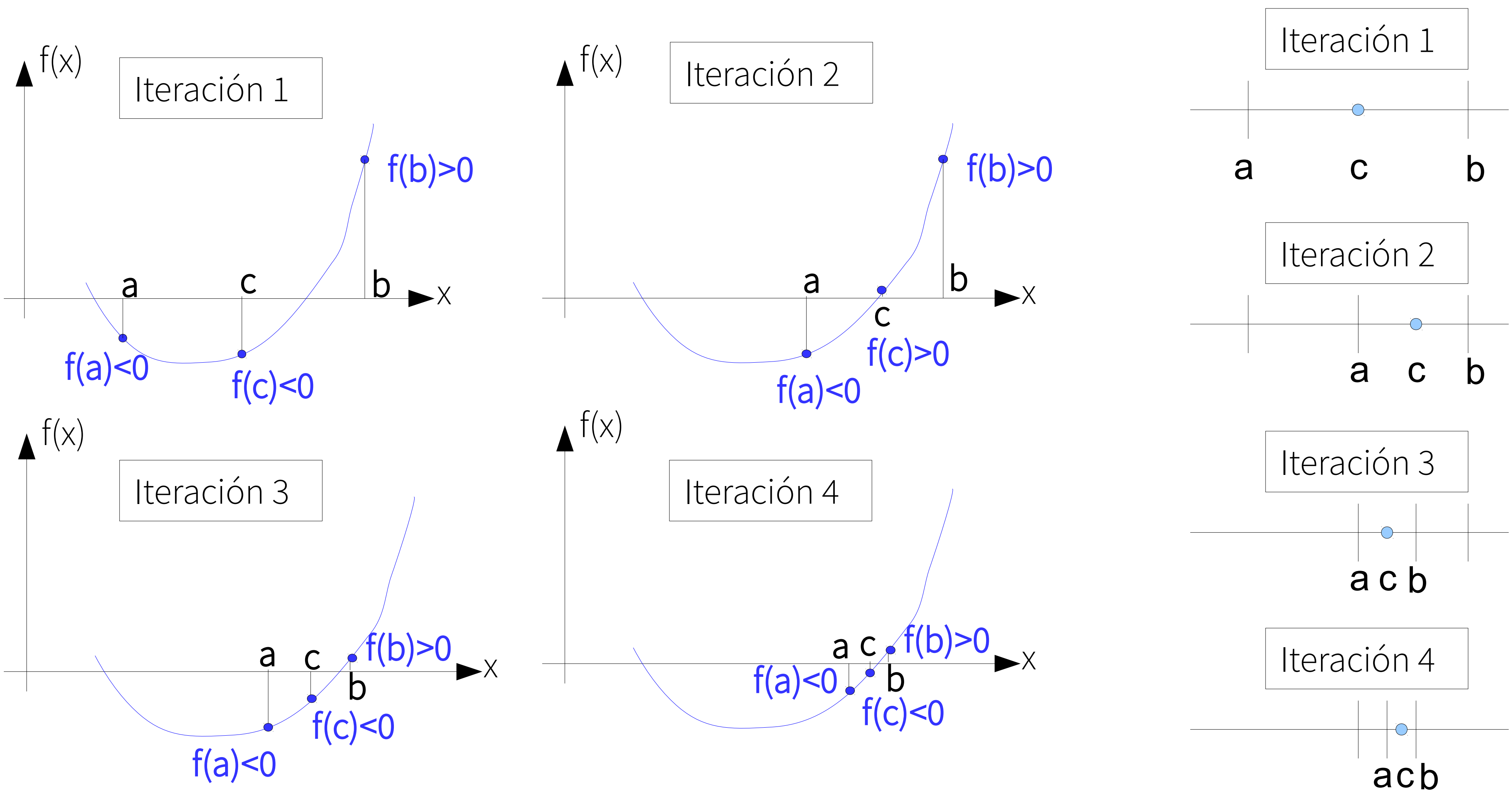
Sea $\{c_n\}_{n=0}^{\infty}$ la sucesión de puntos medios generados por el método de la bisección.

Entonces $\exists r \in [a,b] / f(r) = 0 \wedge |r - c_n| \leq \dfrac{b-a}{2^{n+1}}$ para $n = 0, 1, \ldots$

1) Método de la bisección



1) Método de la bisección



1) Método de la bisección

Ejemplo: $f(x)=x^2+x-1 = 0$ con una tolerancia de 0,001

$$c=\frac{(a+b)}{2}$$

iteración	a	b	e	f(a)	f(b)	c	f(c)
1	0	1	1	-1	1	0,5	-0,25
2	0,5	1	0,5	-0,25	1	0,75	0,3125
3	0,5	0,75	0,25	-0,25	0,3125	0,625	0,0156
4	0,5	0,625	0,125	-0,25	0,0156	0,5625	-0,1211
5	0,5625	0,625	0,0625	-0,1211	0,0156	0,5938	-0,05371
6	0,5938	0,625	0,0312	-0,0537	0,0156	0,6094	-0,0193
7	0,6094	0,625	0,0156	-0,0193	0,0156	0,6172	-0,0019
8	0,6172	0,625	0,0078	-0,0019	0,0156	0,6211	0,0069
9	0,6172	0,6211	0,0039	-0,0019	0,0069	0,6192	0,0026
10	0,6172	0,6192	0,002	-0,0019	0,0026	0,6182	0,0004
11	0,6172	0,6182	0,001	-0,0019	0,0004	0,6177	-0,0007

Medida del error $e=b-a$

Solución analítica $x_1=-0,5+\sqrt{1,25}=0,61803$

1) Método de la bisección

FCEN
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES

Ejemplo: $f(x)=x^2+x-1=0$ con una tolerancia de 0,001

$$c=\frac{(a+b)}{2}$$

iteración	a	b	e	f(a)	f(b)	c	f(c)
1	0	1	1	-	+	0,5	-
2	0,5	1	0,5	-	+	0,75	+
3	0,5	0,75	0,25	-	+	0,625	+
4	0,5	0,625	0,125	-	+	0,5625	-
5	0,5625	0,625	0,0625	-	+	0,5938	-
6	0,5938	0,625	0,0312	-	+	0,6094	-
7	0,6094	0,625	0,0156	-	+	0,6172	-
8	0,6172	0,625	0,0078	-	+	0,6211	+
9	0,6172	0,6211	0,0039	-	+	0,6192	+
10	0,6172	0,6192	0,002	-	+	0,6182	+
11	0,6172	0,6182	0,001	-	+	0,6177	-

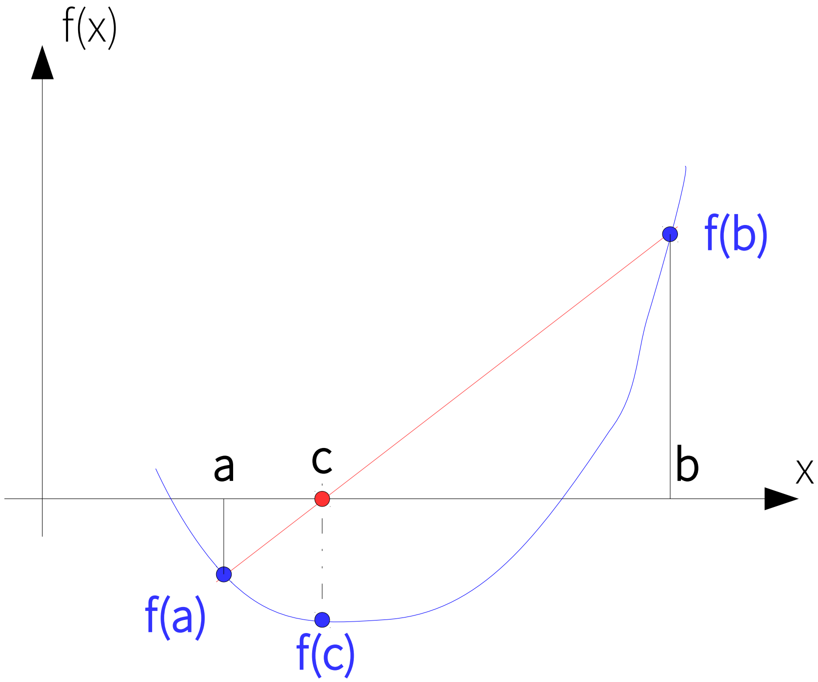
Solución analítica $x_1=-0,5+\sqrt{1,25}=0,61803$

2) Método de Regula Falsi

FCEN
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES

Se mejora la velocidad de convergencia de la bisección, utilizando la recta secante que une los extremos del intervalo para predecir la raíz. “Regula Falsi” proviene del latín y significa “posición falsa” debido a que c corresponde a la raíz de la recta, en vez de la función.

$$c = b - \frac{f(b)(b-a)}{f(b)-f(a)}$$



2) Método de Regula Falsi

FCEN
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES

Ejemplo: $f(x)=x^2+x-1 = 0$ con una tolerancia de 0,001

$$c=b-\frac{f(b)(b-a)}{f(b)-f(a)}$$

iteración	a	b	e	f(a)	f(b)	c	$e_{relativo}$	f(c)
1	0	1	1	-1	1	0,5	0,5	-0,25
2	0,5	1	0,5	-0,25	1	0,6	0,1	-0,04
3	0,6	1	0,4	-0,04	1	0,6154	0,0154	-0,0059
4	0,6154	1	0,3846	-0,0059	1	0,6176	0,0022	-0,0009
5	0,6176	1	0,3824	-0,0009	1	0,618	0,0003	-0,0001

Medida del error $e_{relativo}=c_i-c_{i-1}$

Solución analítica $x_1=-0,5+\sqrt{1,25}=0,61803$

Métodos abiertos

FCEN
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES

En los **métodos cerrados**, la raíz se encuentra encerrada dentro de un **intervalo definido** por una cota inferior y una cota superior. La aplicación reiterada del método **siempre resulta en una aproximación más cercana** al verdadero valor de la raíz. Estos métodos se denominan **"convergentes"** porque siempre se desplazan hacia el valor verdadero a medida que el método progresa.

Por otro lado, los **métodos abiertos** se basan en fórmulas que **solamente requieren uno o dos puntos iniciales que no necesitan encerrar a la raíz**. Esta ventaja no es gratis ya que, a veces, el método se aleja del valor verdadero de la raíz, es decir, **"diverge"**. Sin embargo, cuando un método abierto converge, lo hace **más rápido** que un método cerrado.

3) Método de iteración de punto fijo

FCEN
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES

Definiciones:

1. Un **punto fijo** de una función g(x) es un número real P tal que P = g(P). Geométricamente los puntos fijos son los puntos de intersección de la función y=g(x) con la recta y=x.
2. La iteración $p_{n+1} = g(p_n)$ para n=0,1,… se llama **iteración de punto fijo**.

Teoremas de existencia:

1) Sea g una funcion continua y $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$ es una sucesión generada por iteración de punto fijo. Si $\lim_{n\to\infty} p_n = P$, entonces P es un punto fijo de $g(x)$

2) Si la imagen de $y=g(x)$ verifica que $y\in[a,b]\,\forall\, x\in[a,b] \rightarrow g$ tiene un punto fijo en $[a,b]$

3) Si $g'(x)$ está definida en $(a,b) \wedge |g'(x)|<1\,\forall\, x\in(a,b) \rightarrow g$ tiene un único punto fijo P en $[a,b]$

Teoremas de convergencia:

4) Sean g, g' funciones $\in C[a,b], K$ una constante positiva $, p_0\in(a,b)$ y $g(x)\in[a,b]\,\forall\, x\in[a,b]$. Entonces hay un punto fijo P de g en $[a,b]$.

Si $|g'(x)|\leq K<1\,\forall\, x\in[a,b] \rightarrow P$ es el único punto fijo de g $\in[a,b] \wedge p_n = g(P_{n-1})$ converge a P

Si $|g'(x)|>1 \wedge p_0\neq P \rightarrow p_n = g(P_{n-1})$ no converge a P

3) Método de iteración de punto fijo

FCEN
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES

Aplicación del método

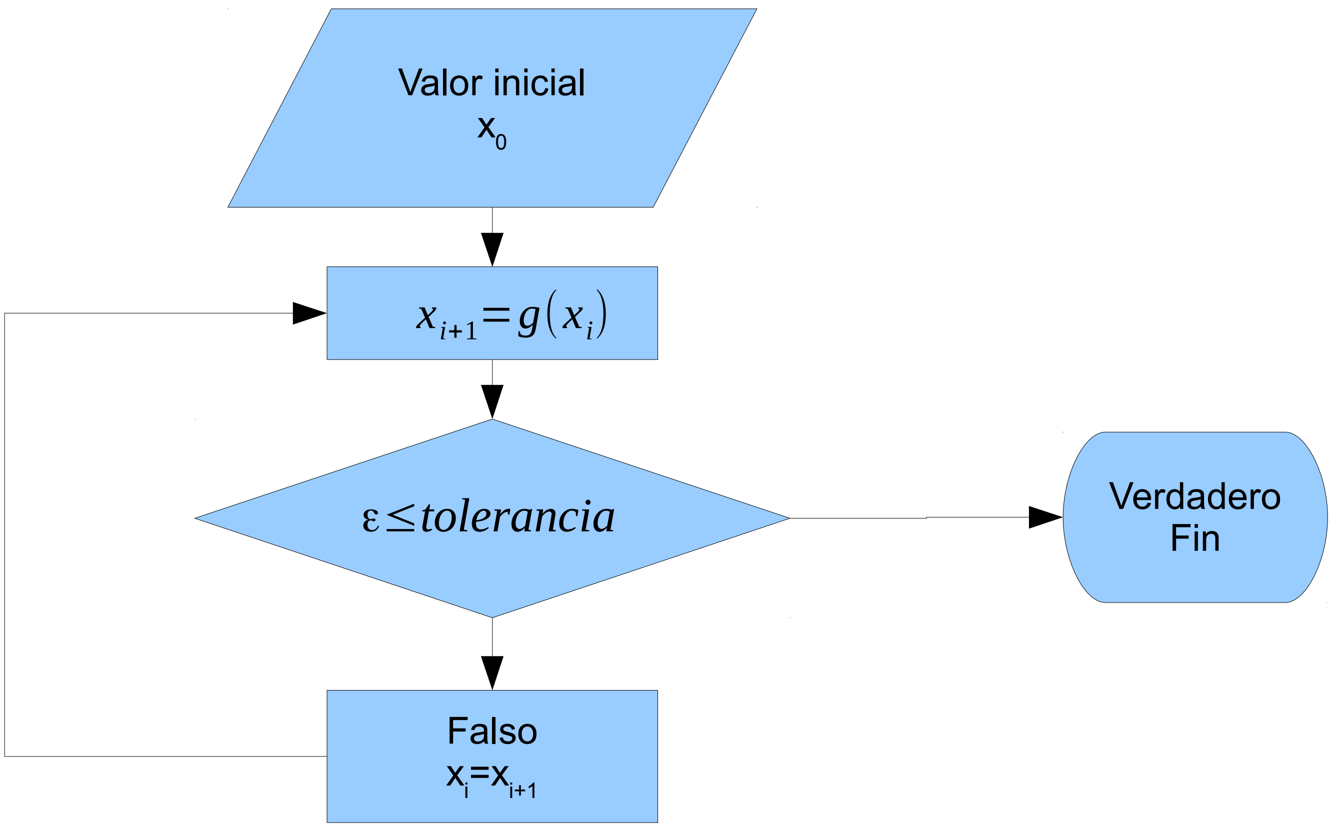
$1)$ Se reacomoda la ecuación $f(x)=0$ de modo que quede de la forma $x=g(x)$
Esta transformación se puede realizar por despeje algebraico o simplemente sumando la variable en ambos miembros.

$2)$ Se parte de un valor inicial x_0

$3)$ Se utiliza la fórmula para predecir la nueva aproximación de la raíz $x_{n+1}=g(x_n)$

$4)$ El error se determina como $\varepsilon=\left|\dfrac{x_{n+1}-x_n}{x_n}\right|100\,\%$

3) Método de iteración de punto fijo



3) Método de iteración de punto fijo

Ejemplo: $f(x)=x^2+x-1 = 0$ con una tolerancia de 0,001

iteración	x_n	x_{n+1}	e
1	0	1	#DIV/0!
2	1	0	1
3	0	1	#DIV/0!
4	1	0	1
5	0	1	#DIV/0!

$$x_{n+1}=g(x_n)=1-x_n^2$$

Medida del error $\varepsilon=\left|\frac{x_{n+1}-x_n}{x_n}\right|$

Solución analítica $x_1=-0,5+\sqrt{1,25}=0,61803$

3) Método de iteración de punto fijo

FCEN
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES

¿¿¿Qué pasó??? Explotó!

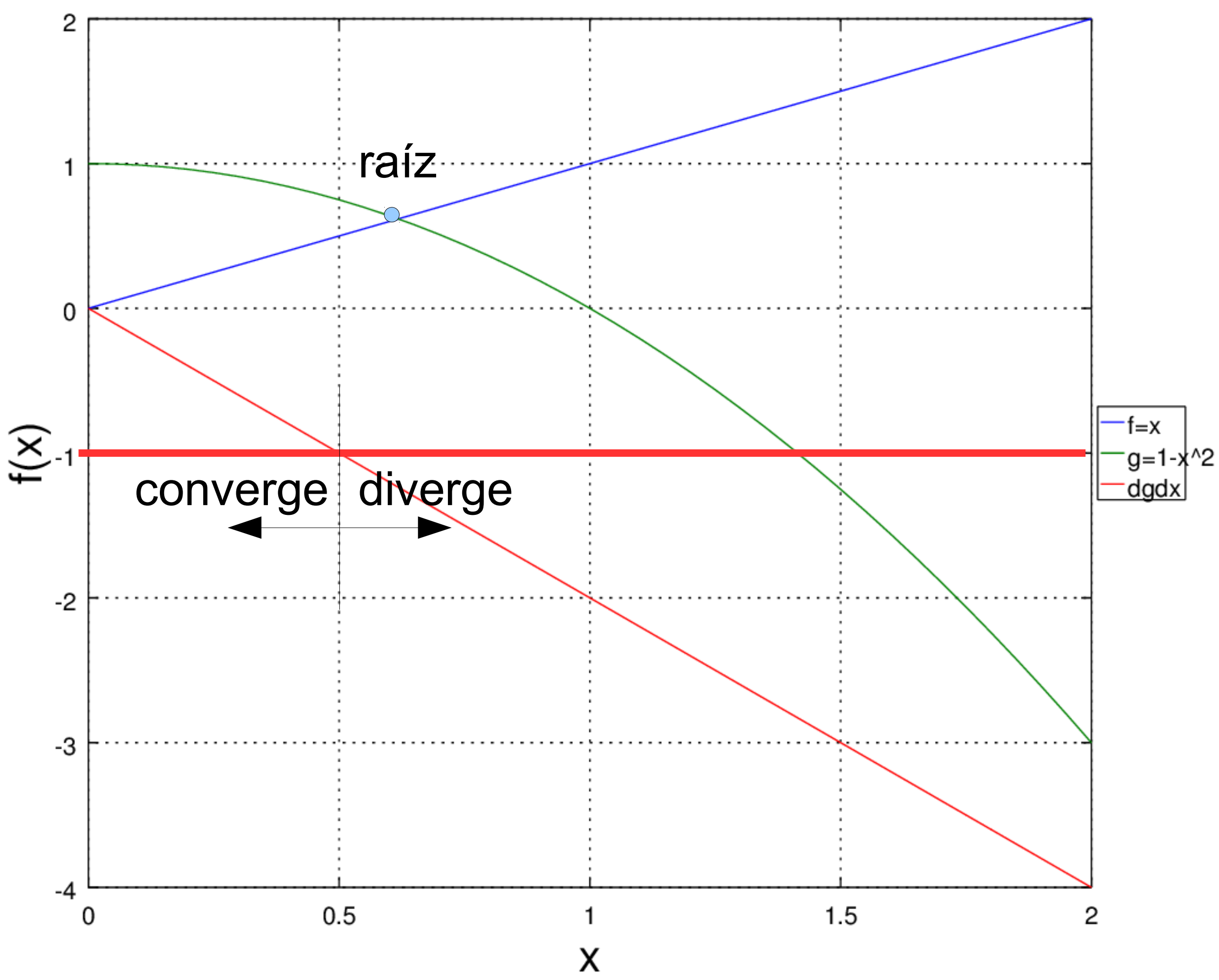
¿Hubo un error en el programa? ¿está mal el valor inicial?

Revisemos los teoremas de convergencia...

Sean g, g' funciones $\in C[a,b]$, K una constante positiva , $p_0 \in (a,b)$
y $g(x) \in [a,b] \forall x \in [a,b]$. Entonces hay un punto fijo P de g en $[a,b]$.
Si $|g'(x)| \leq K < 1 \forall x \in [a,b] \rightarrow P$ es el único punto fijo de g $\in [a,b] \wedge p_n = g(P_{n-1})$ converge a P
Si $|g'(x)| > 1 \wedge p_0 \neq P \rightarrow p_n = g(P_{n-1})$ no converge a P

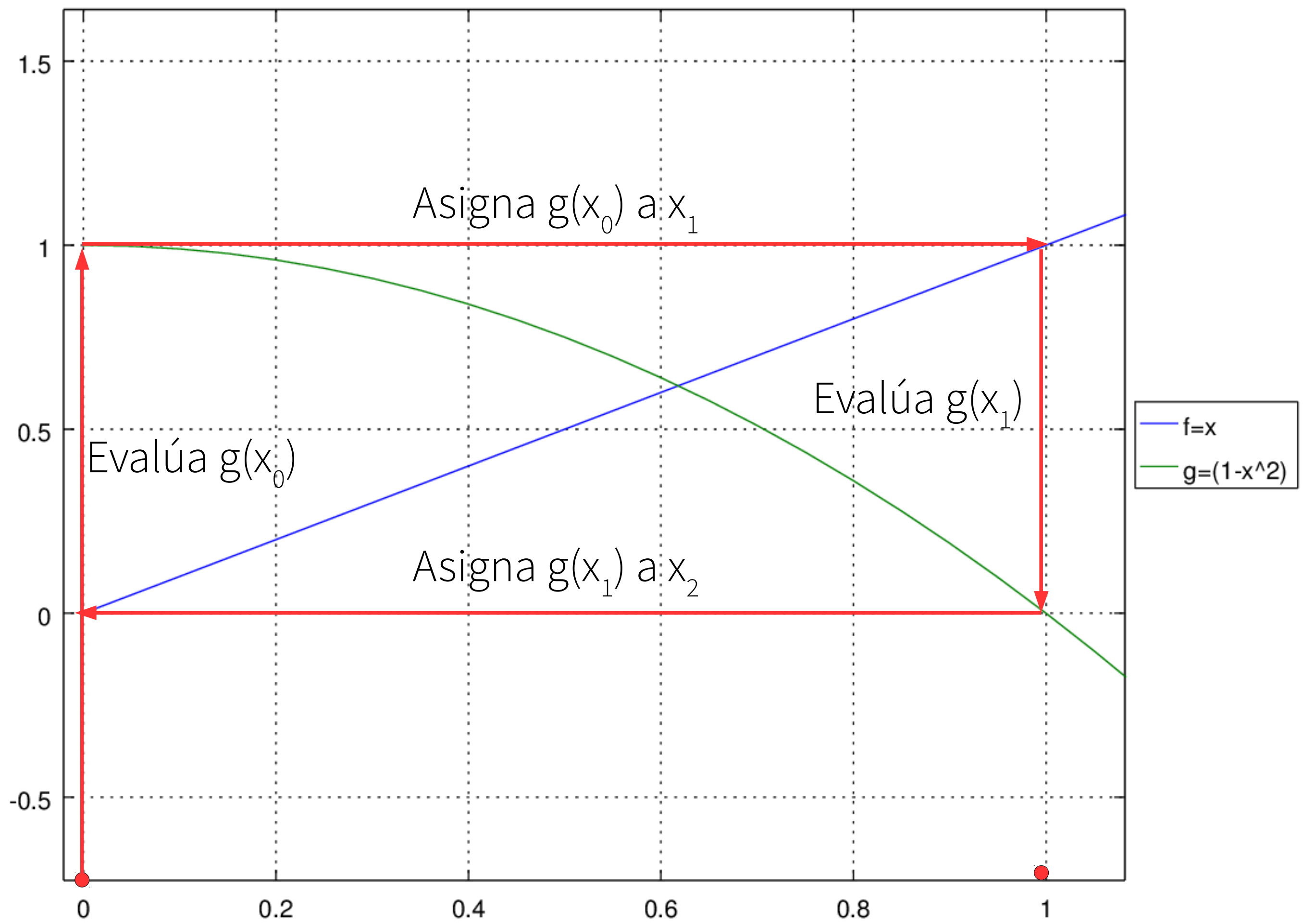
$g(x) = 1 - x^2$
$g'(x) = -2x \rightarrow |g'(x)| = |-2x| \leq 1 \rightarrow -0{,}5 \leq x \leq 0{,}5$ El intervalo de convergencia excluye a la raíz

3) Método de iteración de punto fijo



3) Método de iteración de punto fijo

Veamos la evolución del proceso en forma gráfica



3) Método de iteración de punto fijo

FCEN
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES

Ejemplo: $f(x)=x^2+\mathbf{4}x-1=0$ con una tolerancia de 0,001

iteración	x_n	x_{n+1}	e
1	0	0,25	#DIV/0!
2	0,25	0,2344	0,0625
3	0,2344	0,2363	0,0080729167
4	0,2363	0,23604	0,0009422568
5	0,23604	0,23607	0,0001113646

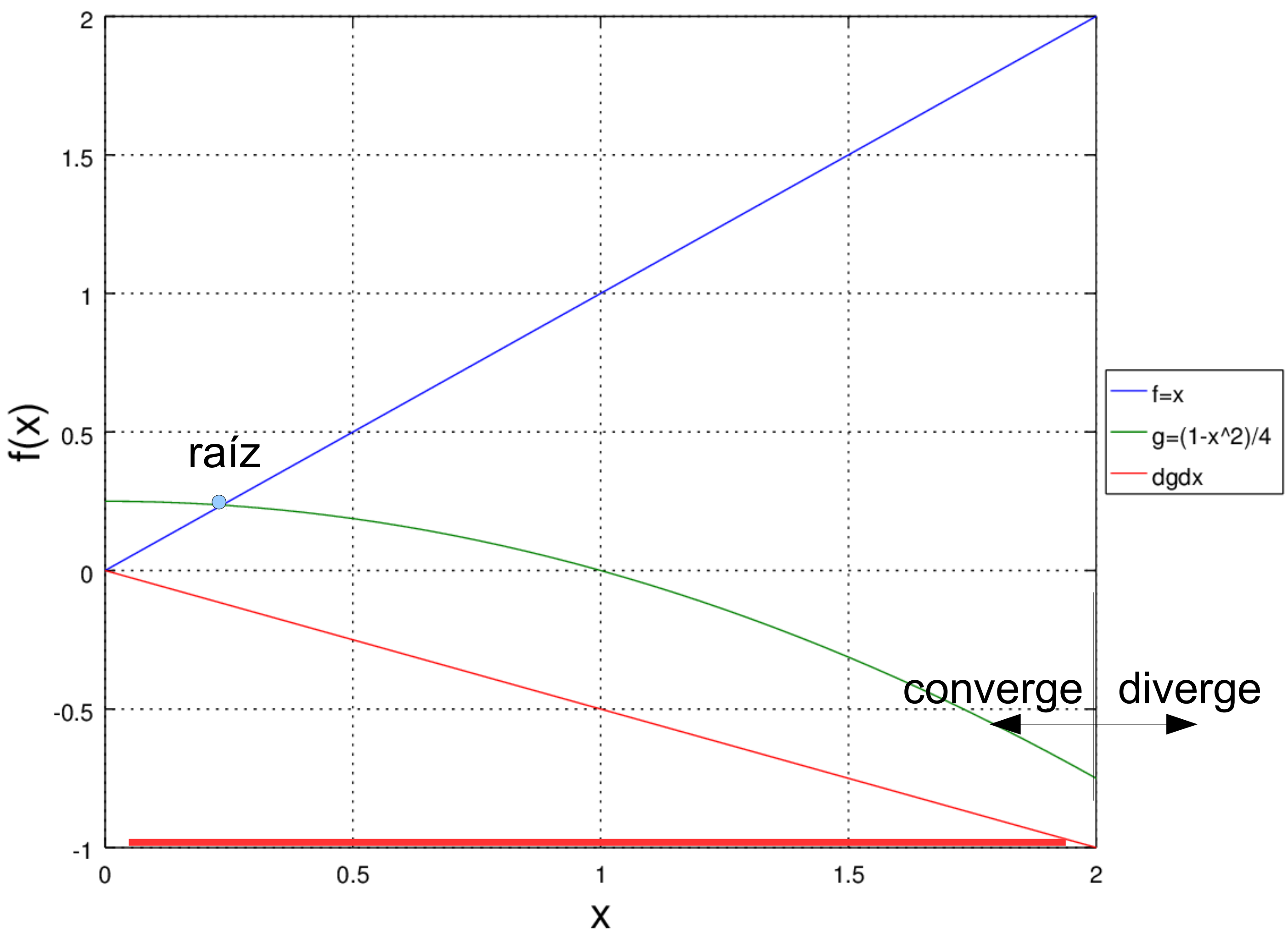
$$x_{n+1}=g(x_n)=\frac{1-x_n^2}{4}$$

Solución analítica $x_1=-2+\sqrt{5}=0,236068$

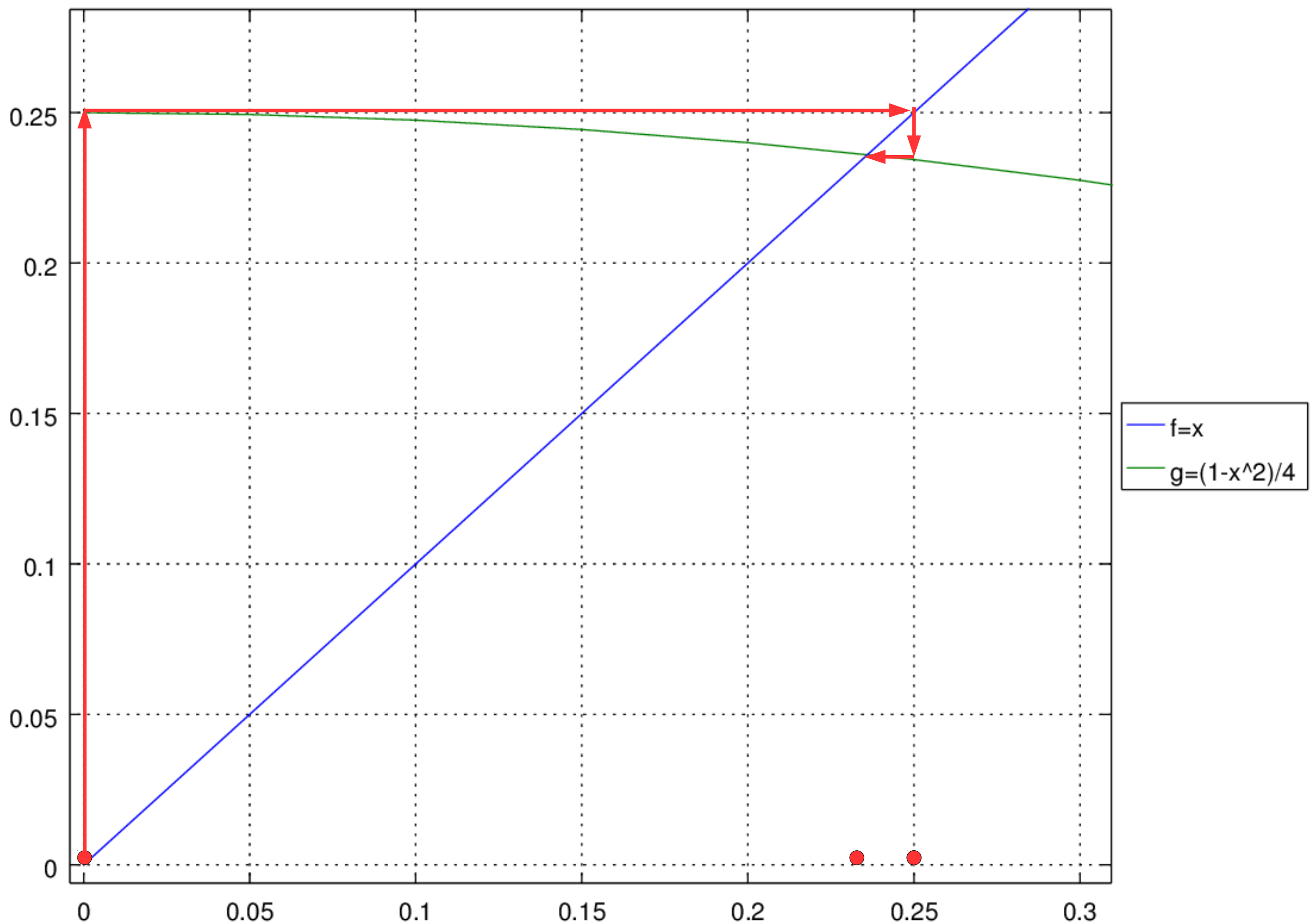
$$g'(x)=-\frac{1}{2}x \rightarrow |g'(x)|=\left|-\frac{1}{2}x\right|\leq 1 \rightarrow -2\leq x\leq 2$$

El intervalo de convergencia incluye a la raíz

3) Método de iteración de punto fijo



3) Método de iteración de punto fijo



4) Método de Newton-Raphson

Teorema de Newton-Raphson

Sea f una función $\in C^2[a,b] \wedge \exists$ un número $p \in [a,b] / f(p)=0$

Si $f'(p) \neq 0 \rightarrow \exists \delta > 0 / \{p_k\}_{k=0}^{\infty}$ definida por el proceso iterativo

$$p_k = g(p_{k-1}) = p_{k-1} - \frac{f(p_{k-1})}{f'(p_{k-1})} \quad \text{para } k=1,2,\ldots$$

converge a p cualquiera que sea la aproximación inicial $p_0 \in [p-\delta, p+\delta]$

La función $g(x) = x - \dfrac{f(x)}{f'(x)}$ se llama **función de iteración de Newton-Raphson**

Derivación de la función de Newton-Raphson

La linealización de la función $f(x)$ por series de Taylor resulta $f(x_{i+1}) \approx f(x_i) + f'(x_i)(x_{i+1} - x_i)$

Si consideramos el cero de la función $0 \approx f(x_i) + f'(x_i)(x_{i+1} - x_i) \rightarrow x_{i+1} = x_i - f\dfrac{(x_i)}{f}'(x_i)$

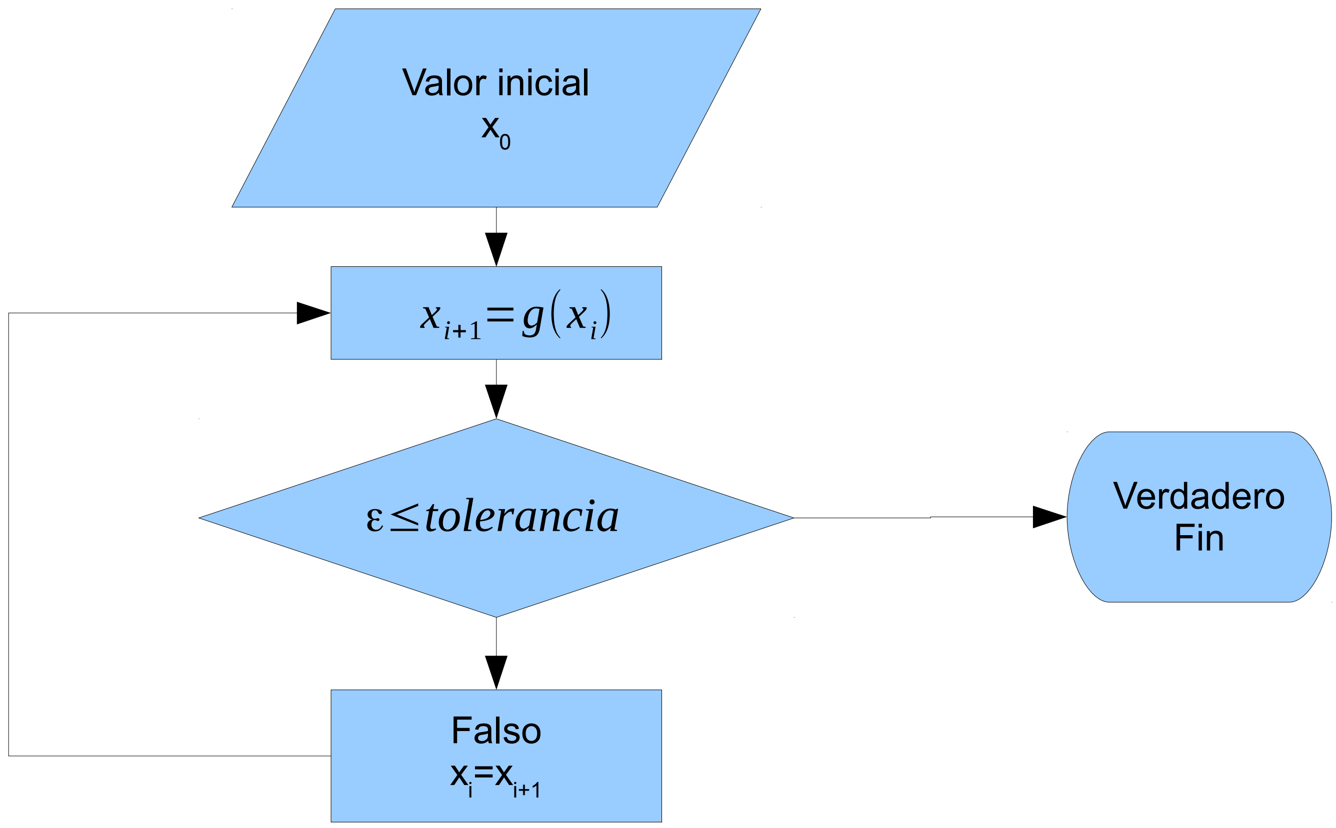
Error de la aproximación de Newton-Raphson

La expansión completa de la función $f(x)$ por series de Taylor, evaluada en la raíz x_r resulta

$$f(x_r) = 0 = f(x_i) + f'(x_i)(x_r - x_i) + \frac{f''(\epsilon)}{2!}(x_r - x_i)^2$$

Restando la linealización y considerando $E_{i+1} = x_r - x_{i+1}$ se obtiene $E\,i+1 = \dfrac{-f''(x_r)}{2f'(x_r)} E_i^2$

4) Método de Newton-Raphson



4) Método de Newton-Raphson

Ejemplo: $f(x)=x^2+x-1 = 0$ con una tolerancia de 0,001

iteración	x_i	f	f'	x_{i+1}	e
1	0	-1	1	1	#DIV/0!
2	1	1	3	0,6667	0,3333
3	0,6667	0,1111	2,333	0,6190	0,0714
4	0,6190	0,0023	2,2381	0,61803	0,0016
5	0,61803	1,0265E-06	2,2361	0,61803	7,4279E-07

4) Método de Newton-Raphson

FCEN
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES

Ejemplo: $f(x)=e^{-x}=0$ con una tolerancia de 0,001

iteración	x_i	f	f'	x_{i+1}	e
1	1	0,3679	-0,3679	2	1
2	2	0,1353	-0,1353	3	0,5
3	3	0,0498	-0,0498	4	0,3333333333
4	4	0,0183	-0,0183	5	0,25
5	5	0,0067	-0,0067	6	0,2
100	1,00E+02	3,72E-44	-3,72E-44	101	0,01
500	5,00E+02	7,12E-218	-7,12E-218	501	0,002
745	7,45E+02	1E-323	-1E-323	746	0,0013422819
746	746	0	0	#DIV/0!	#DIV/0!

Explota por aritmética de punto flotante. Además la convergencia es lenta debido a que f y f' son muy parecidas

4) Método de Newton-Raphson

FCEN FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES

Ejemplo: f(x)=atan(x)=0 con una tolerancia de 0,001

iteración	x_i	f	f'	x_{i+1}	e
1	1,4500	0,9670	0,3223	-1,5503	2,0691
2	-1,5503	-0,9979	0,2938	1,8459	-2,1907
3	1,8459	1,0743	0,2269	-2,8891	2,5651
4	-2,8891	-1,2376	0,1070	8,6784	-4,0038
5	8,6784	1,4561	0,0131	-102,4426	12,8042
6	-102,4426	-1,5610	0,0001	16281,3694	-159,9317
7	16281,3694	1,5707	0,0000	-416358823,9128	25573,7153
8	-416358823,9128	-1,5708	0,0000	272304878428811000,0000	-654014910,2309

Oscila alrededor de la solución y luego explota

4) Método de Newton-Raphson

FCEN
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES

Ejemplo: $f(x)=atan(x)=0$ con una tolerancia de 0,001

iteración	x_i	f	f'	x_{i+1}	e
1	0,5000	0,4636	0,8000	-0,0796	1,1591
2	-0,0796	-0,0794	0,9937	0,0003	-1,0042
3	0,0003	0,0003	1,0000	0,0000	1,0000
4	0,0000	0,0000	1,0000	0,0000	0

Si el punto inicial es próximo a la raíz, converge

Conclusión, el método de Newton-Raphson es más rápido pero es más inestable, dependiendo del valor inicial que se utilice y de las propiedades de la función.

5) Método de la secante

Un inconveniente adicional del método de Newton-Raphson es la evaluación de la derivada. A veces la función es muy compleja para su evaluación. Una solución es aproximar la derivada de la función con una **“diferencia finita hacia atrás”**.

$$f'(x_i) \approx \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{(x_i - x_{i-1})}$$

La fórmula de iteración resultante es:

$$x_{i+1} = x_i - f(x_i)\frac{(x_i - x_{i-1})}{(f(x_i) - f(x_{i-1}))}$$

Para iniciar el método se requiere proponer dos puntos x_0 y x_1.

5) Método de la secante

FCEN
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES

Ejemplo: $f(x)=x^2+x-1 = 0$ con una tolerancia de 0,001

iteración	x_i	f	x_{i+1}	e
	0,0000	-1,0000		
1	1,0000	1,0000	0,5000	0,5000
2	0,5000	-0,2500	0,6000	0,2000
3	0,6000	-0,0400	0,6190	0,0317
4	0,6190	0,0023	0,6180	0,0017
5	0,6180	0,0000	0,6180	0,0000