

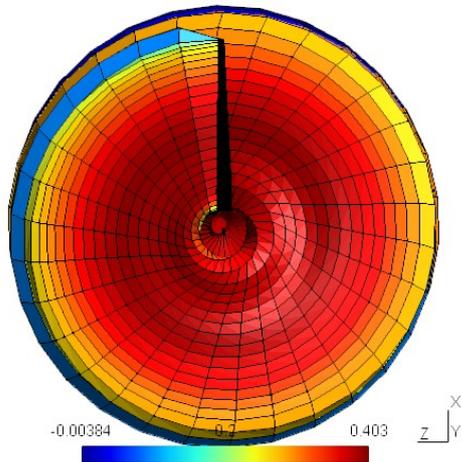
-0.00384 0.2 0.403

Z
Y

Elementos de Cálculo Numérico (M212)

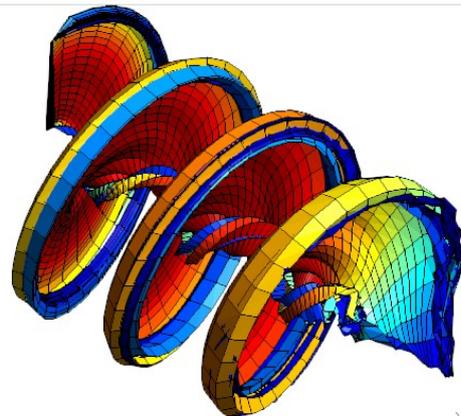
Unidad 3: Resolución de sistemas de ecuaciones lineales

<http://fcen.uncuyo.edu.ar/elementos-de-calculo-numerico>



-0.00384 0.2 0.403

X
Y



-0.00384 0.2 0.403

X
Z
Y

Unidad 3: Resolución de sistemas de ecuaciones lineales

Temario:

- Sistemas de Ecuaciones Lineales (SEL)
- Unicidad de solución y número de condición
- Métodos directos vs Iterativos
- Eliminación de Gauss
- Descomposición LU, Doolittle, Choleski
- Inversión de Matrices
- Método iterativo de Gauss-Seidel

Sistemas de ecuaciones lineales (SEL)

En general, la mayoría de los métodos numéricos produce un sistema de ecuaciones simultáneas.

Los sistemas que resultan de la representación de problemas reales suelen ser de gran tamaño y consumen una gran cantidad de recursos computacionales.

Es por esta razón que **la resolución de estos sistemas es quizás el tema más importante del cálculo numérico.**

En esta unidad nos concentraremos en la resolución de n ecuaciones algebraicas y lineales con n incógnitas.

Sistemas de ecuaciones lineales (SEL)

Los sistemas de ecuaciones tienen la forma de:

$$A_{11}x_1 + A_{12}x_2 + \dots + A_{1n}x_n = b_1$$

$$A_{21}x_1 + A_{22}x_2 + \dots + A_{2n}x_n = b_2$$

$$\vdots$$

$$A_{n1}x_1 + A_{n2}x_2 + \dots + A_{nn}x_n = b_n$$

En notación matricial:

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \rightarrow \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$$

Donde **b** es el vector de entrada del sistema y **x** es el vector de respuesta

Unicidad de la solución

Teorema:

Sea A una matriz de coeficientes cuadrada. La matriz se dice “invertible” o “no singular” si se cumplen las siguientes seis condiciones.

- 1) La inversa de A existe
- 2) No existe un vector no nulo x tal que $\mathbf{Ax} = 0$
- 3) Las columnas de A son linealmente independientes
- 4) Las filas de A son linealmente independientes
- 5) El determinante de A es no nulo
- 6) Dado un vector \mathbf{b} , existe un único vector x tal que $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$

Unicidad de la solución

Si A es invertible, la solución se puede obtener premultiplicando ambos lados de la ecuación por la inversa de A .

$$A^{-1}A \cdot x = A^{-1}b$$

$$Ix = A^{-1}b$$

Esta solución resuelve el problema, en teoría, sin embargo el método de solución (calcular la inversa de A y multiplicarla por b) es usualmente una mala idea. **Es más eficiente resolver la ecuación en forma directa.** Para problemas de gran tamaño, el ahorro de espacio y cálculo se vuelve crucial y evitar el uso de invertir una matriz resulta en ahorros espectaculares.

Número de condición de una matriz

Ya hemos establecido que si el determinante de la matriz de coeficientes es no nulo, el sistema tiene solución única.

¿Qué sucede si el determinante da un número muy pequeño, cercano a 0?



Número de condición de una matriz

Para determinar que tan próxima está la matriz a la singularidad, se utiliza el **número de condición**.

Formalmente el número de condición se define como:

$$\text{cond}(A) = \|A\| \|A^{-1}\|$$

Si el número es cercano a 1, la matriz está bien condicionada y si crece hacia infinito significa que la matriz es singular.

Los resultados obtenidos a través de **matrices mal condicionadas no deben ser considerados**, ya que **los pequeños errores** numéricos que aparecen por aritmética de punto flotante **se amplifican** en la solución.

Métodos directos vs iterativos

Existen dos clases de métodos para resolver un SEL, los **directos** y los **iterativos**.

En los directos, **se transforman las ecuaciones** en otras equivalentes, **más simples de resolver**.

En los iterativos se inicia con una **suposición inicial** de la solución **x** y se repite un **proceso iterativo** hasta alcanzar la **convergencia**. Estos métodos son menos eficientes pero son más efectivos si los problemas son de gran tamaño.

Métodos directos

Las transformaciones se realizan mediante tres “operaciones elementales” que no alteran la solución pero sí al determinante de la matriz.

- 1) Intercambiar dos ecuaciones (cambia el signo del determinante)
- 2) Multiplicar una fila por una constante no nula (multiplica el determinante por la misma constante)
- 3) Multiplicar una fila por una constante no nula y restarla de otra fila (no altera el determinante)

Matrices triangulares

Matriz triangular superior U (upper):

$$U = \begin{bmatrix} U_{11} & U_{12} & U_{13} \\ 0 & U_{22} & U_{23} \\ 0 & 0 & U_{33} \end{bmatrix}$$

Matriz triangular inferior L (lower):

$$L = \begin{bmatrix} L_{11} & 0 & 0 \\ L_{21} & L_{22} & 0 \\ L_{31} & L_{32} & L_{33} \end{bmatrix}$$

Matrices triangulares

Las matrices triangulares son fundamentales en álgebra lineal porque simplifican los cálculos.

$$\mathbf{L} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{c}$$

$$\begin{bmatrix} L_{11} & 0 & 0 \\ L_{21} & L_{22} & 0 \\ L_{31} & L_{32} & L_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{array}{l} L_{11} x_1 = c_1 \\ L_{21} x_1 + L_{22} x_2 = c_2 \\ L_{31} x_1 + L_{32} x_2 + L_{33} x_3 = c_3 \end{array}$$

Si se comienza por la primer ecuación se pueden ir resolviendo “**progresivamente**” todas las ecuaciones, de a una por vez. Este esquema se llama **sustitución hacia adelante** o **progresiva**. De igual manera se puede resolver un sistema $Ux=c$ de forma **regresiva**, atribuyéndose el nombre de **sustitución regresiva** o **hacia atrás** a esta práctica.

Eliminación de Gauss

El método de eliminación de Gauss, es el más común para la resolución de SEL.

El método consta de dos fases, la **fase de eliminación** y la **fase de resolución**.

En la fase de eliminación se busca **transformar el problema en uno de la forma $Ux = c$**

En la fase de resolución se aplica la **sustitución regresiva**.

Eliminación de Gauss

Fase de eliminación

Se utiliza la tercer operación elemental. La ecuación que es eliminada se denomina ecuación de pivote. Se busca ir transformando la matriz \mathbf{A} en una matriz triangular superior \mathbf{U} .

Eliminación de Gauss

Ejemplo:

$$4x_1 - 2x_2 + x_3 = 11$$

$$-2x_1 + 4x_2 - 2x_3 = -16$$

$$x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 17$$

1) Se elige la ecuación 1 como pivote.

2) Se multiplica el pivote por $(-1/2)$ y se resta de la ecuación 2 para eliminar x_1 .

3) Se multiplica el pivote por $(1/4)$ y se resta de la ecuación 3 para eliminar x_1 .

Eliminación de Gauss

Ejemplo:

$$4x_1 - 2x_2 + x_3 = 11$$

$$4x_1 - 2x_2 + x_3 = 11$$

$$(4-4)x_1 + (4-1)x_2 + (-2+1/2)x_3 = (-16+11/2) \rightarrow 3x_2 - 1,5x_3 = -10,5$$

$$(1-1)x_1 + (-2+2/4)x_2 + (4-1/4)x_3 = (17-11/4) \quad -1,5x_2 + 3,75x_3 = 14,25$$

1) Se elige la nueva ecuación 2 como pivote.

2) Se multiplica el pivote por $(-1/2)$ y se resta de la ecuación 3 para eliminar x_2 .

Eliminación de Gauss

Ejemplo:

$$4x_1 - 2x_2 + x_3 = 11$$

$$3x_2 - 1,5x_3 = -10,5$$

$$(-1,5 + 1,5)x_2 + (3,75 - 0,75)x_3 = (14,25 - 5,25)$$

$$4x_1 - 2x_2 + x_3 = 11$$

$$\rightarrow 3x_2 - 1,5x_3 = -10,5$$

$$3x_3 = 9$$

$$\begin{bmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & -1,5 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ -10,5 \\ 9 \end{pmatrix}$$

Eliminación de Gauss

Fase de solución

Se utiliza la sustitución regresiva. Se empieza resolviendo la última ecuación y se reemplaza el resultado en la anterior. El proceso se repite hasta llegar a la primera ecuación.

$$\begin{bmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & -1,5 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ -10,5 \\ 9 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{array}{l} x_3 = 9/3 = 3 \\ 3x_2 - 1,5(3) = -10,5 \rightarrow x_2 = -2 \\ 4x_1 - 2(-2) + (3) = 11 \rightarrow x_1 = 1 \end{array}$$

Eliminación de Gauss

Algoritmo

Generalización de la fase de eliminación

Supongamos que se han transformado las primeras k líneas. La línea pivote es la k -ésima. El primer elemento no nulo es el A_{kk} . La fila debajo del pivote es la i -ésima. Se busca eliminar el elemento A_{ik} .

El multiplicador para la fila i -ésima será: $\lambda = \frac{A_{ik}}{A_{kk}}$

La transformación será: $A_{ij} \leftarrow (A_{ij} - \lambda A_{kj}), b_i \leftarrow (b_i - \lambda b_k)$

Eliminación de Gauss

Algoritmo

Generalización de la fase de solución

Supongamos que se han resuelto las últimas $k-1$ líneas. La línea a resolver es la k -ésima.

$$A_{kk} x_k + A_{k,k+1} x_{k+1} + \dots + A_{kn} x_n = b_k \rightarrow x_k = \frac{1}{A_{kk}} \left(b_k - \sum_{j=k+1}^n A_{kj} x_j \right)$$

Eliminación de Gauss

```

function [x] = gauss(A,b)
n = length(b);
#Fase de eliminación
for k = 1:n-1 #k indica la columna
  for i= k+1:n #i indica fila
    if A(i,k) != 0
      lambda = A(i,k)/A(k,k); #Calcula constante de multiplicación
      A(i,k+1:n) = A(i,k+1:n) - lambda*A(k,k+1:n); #Resta pivote de matriz A
      b(i)= b(i) - lambda*b(k); #Resta pivote del vector b
    endif
  endfor
Endfor
# Fase de solución regresiva
for k = n:-1:1
  b(k) = (b(k) - A(k,k+1:n)*b(k+1:n))/A(k,k);
endfor
x = b;
endfunction
  
```

Eliminación de Gauss

Pivoteo

Para que la eliminación de Gauss funcione, es importante que haya un orden óptimo de las filas.

Se busca que la matriz sea predominantemente diagonal. Es decir que los mayores valores relativos de las constantes en cada fila estén en la columna diagonal.

Si se encuentran valores relativos máximos alejados de la diagonal, se cambia el orden de las filas.

Si hay ceros en la diagonal siempre conviene realizar el pivoteo.

Inversión de Matrices

Inversión de matrices

Siempre que sea posible se debe evitar invertir una matriz debido al alto costo computacional involucrado.

De ser necesaria, la forma más económica de resolverla es mediante la siguiente ecuación:

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X_{11} & X_{12} & \dots & X_{1n} \\ X_{21} & X_{22} & \dots & X_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ X_{n1} & X_{n2} & \dots & X_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{I} \rightarrow (\mathbf{A}^{-1} \mathbf{A}) \cdot \mathbf{X} = (\mathbf{A}^{-1} \mathbf{I}) \rightarrow \mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1}$$

Descomposición LU

Toda matriz cuadrada se puede descomponer en el producto de una matriz L por una matriz U de modo que $A = LU$

El proceso por el cual se determinan las matrices L y U se llama **descomposición o factorización LU**.

La descomposición necesita algunas **restricciones adicionales** para ser única. Estas restricciones producen métodos de descomposición LU distintos: el método de **Doolittle**, el de **Crout** y el de **Choleski**.

Una vez factorizada la matriz, la resolución es sencilla.

$A \cdot x = (LU) \cdot x = c \rightarrow$ Definiendo el vector y como $y = U \cdot x$
 Reemplazando en la ecuación original queda $Ly = c$

Descomposición de Doolittle

Se considera que la matriz L tiene 1 en la diagonal.

$$A = LU = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ L_{21} & 1 & 0 \\ L_{31} & L_{32} & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_{11} & U_{12} & U_{13} \\ 0 & U_{22} & U_{23} \\ 0 & 0 & U_{33} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_{11} & U_{12} & U_{13} \\ U_{11}L_{21} & U_{12}L_{21} + U_{22} & U_{13}L_{21} + U_{23} \\ U_{11}L_{31} & U_{12}L_{31} + U_{22}L_{32} & U_{13}L_{31} + U_{23}L_{32} + U_{33} \end{bmatrix}$$

Descomposición de Doolittle

Se aplica la eliminación de Gauss en ambas matrices.

$$A' = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} - L_{21}A_{11} & A_{22} - L_{21}A_{12} & A_{23} - L_{21}A_{13} \\ A_{31} - L_{31}A_{11} & A_{32} - L_{31}A_{12} & A_{33} - L_{31}A_{13} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_{11} & U_{12} & U_{13} \\ 0 & U_{22} & U_{23} \\ 0 & U_{22}L_{32} & U_{23}L_{32} + U_{33} \end{bmatrix}$$

$$\lambda_2 = L_{21} = \frac{A_{21}}{A_{11}}$$

$$\lambda_3 = L_{31} = \frac{A_{31}}{A_{11}}$$

Descomposición de Doolittle

Se aplica la eliminación de Gauss nuevamente.

$$A'' = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ 0 & A_{22}' & A_{23}' \\ 0 & A_{32}' - L_{32} A_{22}' & A_{33}' - L_{32} A_{23}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_{11} & U_{12} & U_{13} \\ 0 & U_{22} & U_{23} \\ 0 & 0 & U_{33} \end{bmatrix}$$

$$\lambda_3 = L_{32} = \frac{A_{32}'}{A_{22}'}$$

Descomposición de Doolittle

Se guardan las constantes de multiplicación en los ceros de la matriz.

$$A'' = \begin{bmatrix} U_{11} & U_{12} & U_{13} \\ L_{21} & U_{22} & U_{23} \\ L_{31} & L_{32} & U_{33} \end{bmatrix}$$

Eliminación de Gauss

```

function A = LUdec(A)
n = size(A,1);
for k = 1:n-1
    for i = k+1:n
        if A(i,k) ~= 0.0
            lambda = A(i,k)/A(k,k);
            A(i,k+1:n) = A(i,k+1:n) - lambda*A(k,k+1:n);
            A(i,k) = lambda;
        endif
    endfor
endfor
endfunction
  
```

Eliminación de Gauss

Ejemplo:

$$\begin{aligned}
 4x_1 - 2x_2 + x_3 &= 11 \\
 -2x_1 + 4x_2 - 2x_3 &= -16 \\
 x_1 - 2x_2 + 4x_3 &= 17
 \end{aligned}
 \quad A = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & -2 \\ 1 & -2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & -2 \\ 1 & -2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_{11} & & \\ U_{11}L_{21} & U_{12} & \\ U_{11}L_{31} & U_{12}L_{31} + U_{22}L_{32} & U_{13} \\ & & U_{13}L_{21} + U_{23} \\ & & U_{13}L_{31} + U_{23}L_{32} + U_{33} \end{bmatrix}$$

Eliminación de Gauss

Ejemplo:

$$A' = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 1 \\ -2 - L_{21}(4) & 4 - L_{21}(-2) & -2 - L_{21}(1) \\ 1 - L_{31}(4) & -2 - L_{31}(-2) & 4 - L_{31}(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_{11} & U_{12} & U_{13} \\ 0 & U_{22} & U_{23} \\ 0 & U_{22}L_{32} & U_{23}L_{32} + U_{33} \end{bmatrix}$$

$$\lambda_2 = L_{21} = \frac{A_{21}}{A_{11}} = -\frac{2}{4}$$

$$\lambda_3 = L_{31} = \frac{A_{31}}{A_{11}} = \frac{1}{4}$$

$$A' = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & -1,5 \\ 0 & -1,5 & 3,75 \end{bmatrix}$$

Descomposición de Doolittle

Ejemplo

$$A'' = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & -1,5 \\ 0 & -1,5 - L_{32} \cdot 3 & 3,75 - L_{32}(-1,5) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_{11} & U_{12} & U_{13} \\ 0 & U_{22} & U_{23} \\ 0 & 0 & U_{33} \end{bmatrix}$$

$$\lambda_3 = L_{32} = \frac{A_{32}'}{A_{22}'} = -\frac{1,5}{3}$$

$$A'' = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & -1,5 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} = U$$

Descomposición de Doolittle

Finalmente

$$U = A'' = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & -1,5 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}, L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1 & 0 \\ 1/4 & -1/2 & 1 \end{bmatrix}$$

Descomposición de Choleski

Se considera que la matriz A es simétrica y definida positiva.

$$A = LL^T = \begin{bmatrix} L_{11} & 0 & 0 \\ L_{21} & L_{22} & 0 \\ L_{31} & L_{32} & L_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} L_{11} & L_{21} & L_{31} \\ 0 & L_{22} & L_{32} \\ 0 & 0 & L_{33} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{11}^2 & L_{11}L_{21} & L_{11}L_{31} \\ L_{11}L_{21} & L_{21}^2 + L_{22}^2 & L_{21}L_{31} + L_{22}L_{32} \\ L_{11}L_{31} & L_{21}L_{31} + L_{22}L_{32} & L_{31}^2 + L_{32}^2 + L_{33}^2 \end{bmatrix}$$

Descomposición de Choleski

Como las matrices son simétricas, igualando las matrices elemento a elemento y considerando solamente un lado de la diagonal, se pueden calcular directamente los coeficientes de la matriz L.

$$\begin{bmatrix} A_{11} & \dots & \dots \\ A_{21} & A_{22} & \dots \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{11}^2 & \dots & \dots \\ L_{11}L_{21} & L_{21}^2 + L_{22}^2 & \dots \\ L_{11}L_{31} & L_{21}L_{31} + L_{22}L_{32} & L_{31}^2 + L_{32}^2 + L_{33}^2 \end{bmatrix}$$

Método iterativo de Gauss-Seidel

Los métodos directos logran resolver el SEL en una cantidad finita de pasos. En contraposición, los métodos iterativos comienzan con una solución de partida e iteran hasta que se encuentra la convergencia. Por lo tanto, **son más lentos** que los métodos directos. Sin embargo, poseen las siguientes ventajas:

- Al ser métodos que van corrigiendo la solución, **pueden reducir los errores** asociados a la aritmética de punto flotante.
- Pueden almacenar solamente los valores no nulos de las matrices, con lo cual **permiten trabajar con SEL de mayor tamaño** respecto a los métodos directos.

Método iterativo de Gauss-Seidel

Sea el sistema:

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

En notación escalar:

$$\sum_{j=1}^n A_{ij} x_j = b_i \rightarrow A_{ii} x_i + \sum_{j=1, j \neq i}^n A_{ij} x_j = b_i \rightarrow x_i = \frac{1}{A_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=1, j \neq i}^n A_{ij} x_j \right)$$

Se comienza con un vector x de partida y se calcula uno nuevo.

El proceso se repite hasta que la diferencia entre $x_{\text{nuevo}} - x_{\text{viejo}}$ sea aceptable

Método iterativo de Gauss-Seidel

Mejora de la convergencia:

Se agrega un factor de relajación ω que permite combinar la solución previa con la actualizada por la fórmula de iteración.

$$x_i = \frac{\omega}{A_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=1, j \neq i}^n A_{ij} x_j \right) + (1 - \omega) x_i$$

$\omega = 1$ indica que no hay relajación.

$\omega < 1$ indica sub relajación

$\omega > 1$ indica sobre relajación

Comandos en GNU Octave

`cond(A)` Número de condición de la matriz

`x=A\b` Solución automática de SEL

`[L, U] = lu (A)` descomposición LU

`L = chol (A)` descomposición de Cholesky

The selection tree for how the linear equation is solved or a matrix inverse is formed is given by:

- 1) If the matrix is upper or lower triangular sparse use a forward or backward substitution.
- 2) If the matrix is square, Hermitian with a real positive diagonal, attempt Cholesky factorization.
- 3) If the Cholesky factorization failed or the matrix is not Hermitian with a real positive diagonal, and the matrix is square, factorize using the LAPACK xGETRF function.
- 4) If the matrix is not square, or any of the previous solvers flags a singular or near singular matrix, find a least squares solution