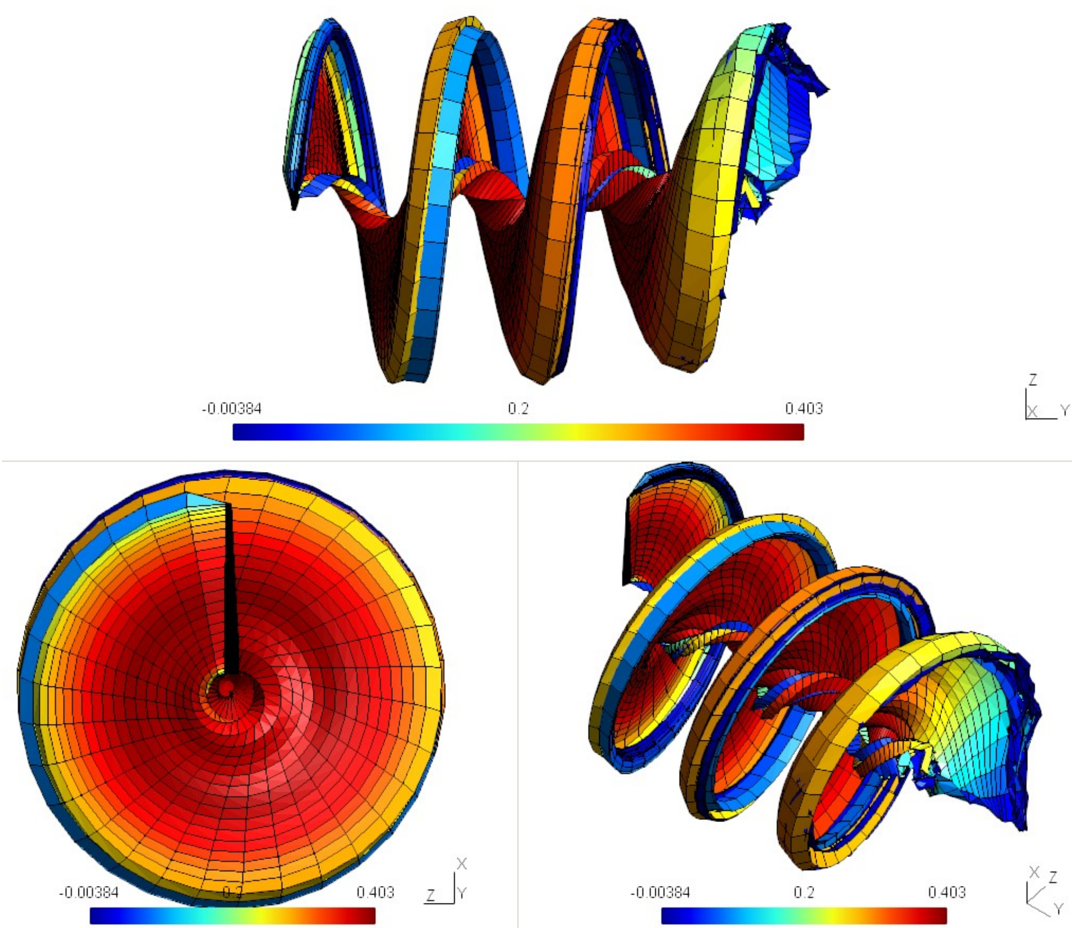
FCEN
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES



Elementos de Cálculo Numérico (M212)

Unidad 6: Problema de valores propios

http://fcen.uncuyo.edu.ar/elementos-de-calculo-numerico

Unidad 6: Problema de valores propios

FCEN
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES

Temario

- Repaso problema de autovalores
- Métodos numéricos para el problema de autovalores
- Método iterativo de la potencia
- Convergencia
- Obtención de autovalores
- Desborde y escalamiento
- Método de la potencia inversa
- Deflación

Problema de autovalores

Se busca resolver el problema $\lambda v = Av$, o $(A-\lambda I)v=0$

Donde A es una matríz de NxN, v es un vector de Nx1 y λ es un escalar

En este problema, si el determinante de $A-I\lambda$ es no nulo, la única solución es la trivial, por lo tanto **el determinante debe ser nulo**.

La solución del determinante nulo da origen a un **polinomio característico de grado N,** cuyas raíces son los autovalores de la matriz A.

Para matrices “grandes”, la búsqueda de las raíces del polinomio no es rápida y resulta conveniente utilizar otros métodos.

Soluciones numéricas para el problema de autovalores

FCEN
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES

Los métodos disponibles se pueden agrupar en tres:

- Métodos de solución del polinomio característico
- Métodos de transformación
- Métodos iterativos

Encontrar las **raíces de polinomios** de forma **analítica** es posible **únicamente hasta grado 4**. Por lo tanto se necesitan métodos iterativos para resolver matrices mayores a 4x4.

En los métodos de transformación se **aplican rotaciones y traslaciones** para **transformar la matriz en otra equivalente diagonal**, de manera que la obtención de los autovalores es más simple.

Métodos iterativos

Un método iterativo es aquél que produce una **secuencia de aproximaciones** que convergen a la solución del problema.

En principio la cantidad de aproximaciones necesarias es infinita. Además del método **se debe definir un criterio de convergencia** para aceptar una aproximación como la solución.

Para evaluar el **error** en cada iteración **se utiliza una norma**.

Además de asegurar la convergencia del método **es necesario determinar la tasa de la convergencia**. No es útil disponer de un método que alcance la convergencia en millones de iteraciones.

Existen varios métodos iterativos. En los más simples se producen secuencias de vectores que convergen a los autovectores de la matriz. Otros métodos más avanzados producen secuencias de matrices que poseen los mismos autovalores de la matriz original y convergen a una forma más simple de la matriz.

Método iterativo de la potencia fundamento

FCEN
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES

Suponemos que $A \in R^{NxN}$ y que posee un conjunto de autovectores v_i linealmente independientes que a su vez forman una base.

Sean $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ los autovalores asociados a los autovectores de **A**.

Suponemos que los autovalores están ordenados: $|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \cdots \geq |\lambda_n|$

Si $|\lambda_1| > |\lambda_2|$ entonces se denomina autovalor dominante.

La base del método consiste en generar, a partir de un vector inicial q, una secuencia de vectores multiplicando el vector original q por la matriz **A**: $(q, Aq, A^2 q, A^3 q, \cdots)$

Como los autovectores de **A** forman una base, se puede escribir el vector inicial como una combinación lineal de los autovectores de **A**. $q = c_1 v_1 + \cdots + c_n v_n$

Premultiplicando por la matriz **A**: $A\, q = c_1 A v_1 + \cdots + c_n A v_n = c_1 \lambda_1 v_1 + \cdots + c_n \lambda_n v_n$

Repitiendo la multiplicación j veces: $A^j q = c_1 \lambda_1^j v_1 + \cdots + c_n \lambda_n^j v_n = \lambda_1^j \left(c_1 v_1 + \cdots + c_n \left(\frac{\lambda_n}{\lambda_1}\right)^j v_n \right)$

Se puede ver que el único término del paréntesis que permanece constante durante las iteraciones es el primero, el resto se reduce ya que el autovalor dominante es el primero

Método iterativo de la potencia convergencia

FCEN
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES

Para determinar si el vector de la iteración j se acerca al autovector dominante se utiliza la norma.

$$\frac{\mathrm{A}^j q}{\lambda_1^j} = \left(c_1 v_1 + c_2 \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^j v_2 + \cdots + c_n \left(\frac{\lambda_n}{\lambda_1}\right)^j v_n\right) \rightarrow \frac{\mathrm{A}^j q}{\lambda_1^j} - c_1 v_1 = \left(c_2 \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^j v_2 + \cdots + c_n \left(\frac{\lambda_n}{\lambda_1}\right)^j v_n\right)$$

Considerando la desigualdad triangular de la norma y el orden de los autovalores:

$$\left\|\frac{\mathrm{A}^j q}{\lambda_1^j} - c_1 v_1\right\| = \left\|\left(c_2 \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^j v_2 + \cdots + c_n \left(\frac{\lambda_n}{\lambda_1}\right)^j v_n\right)\right\| \leq (|c_2|\|v_2\| + \cdots + |c_n|\|v_n\|) \left|\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^j\right|$$

En esta inecuación se observa la convergencia del método. Como los autovalores están ordenados, el término de la derecha (el error) se reduce en cada iteración debido a $\left|\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right|$ (tasa de convergencia). Esto quiere decir que en cada iteración j, el autovector encontrado $\frac{\mathrm{A}^j q}{\lambda_1^j}$ está más próximo, o más alineado, al autovector dominante v_1.

Método iterativo de la potencia obtención del autovalor

Hasta aquí se ha demostrado que la aplicación del método de la potencia produce un vector que converge al autovector dominante.

¿Cómo se obtiene el autovalor asociado?

Si se dividen dos iteraciones sucesivas: $\alpha^{j+1} = \frac{q^{j+1}}{q^{j}} = \frac{\lambda_1^{j+1}\left(c_1 v_1 + \cdots + c_n \left(\frac{\lambda_n}{\lambda_1}\right)^{j+1} v_n\right)}{\lambda_1^{j}\left(c_1 v_1 + \cdots + c_n \left(\frac{\lambda_n}{\lambda_1}\right)^{j} v_n\right)}$

A medida que se produce la convergencia, el cociente tiende a: $\alpha^{j+1} = \frac{q^{j+1}}{q^{j}} = \frac{\lambda_1^{j+1}(c_1 v_1)}{\lambda_1^{j}(c_1 v_1)} = \lambda_1$

Método iterativo de la potencia escalamiento

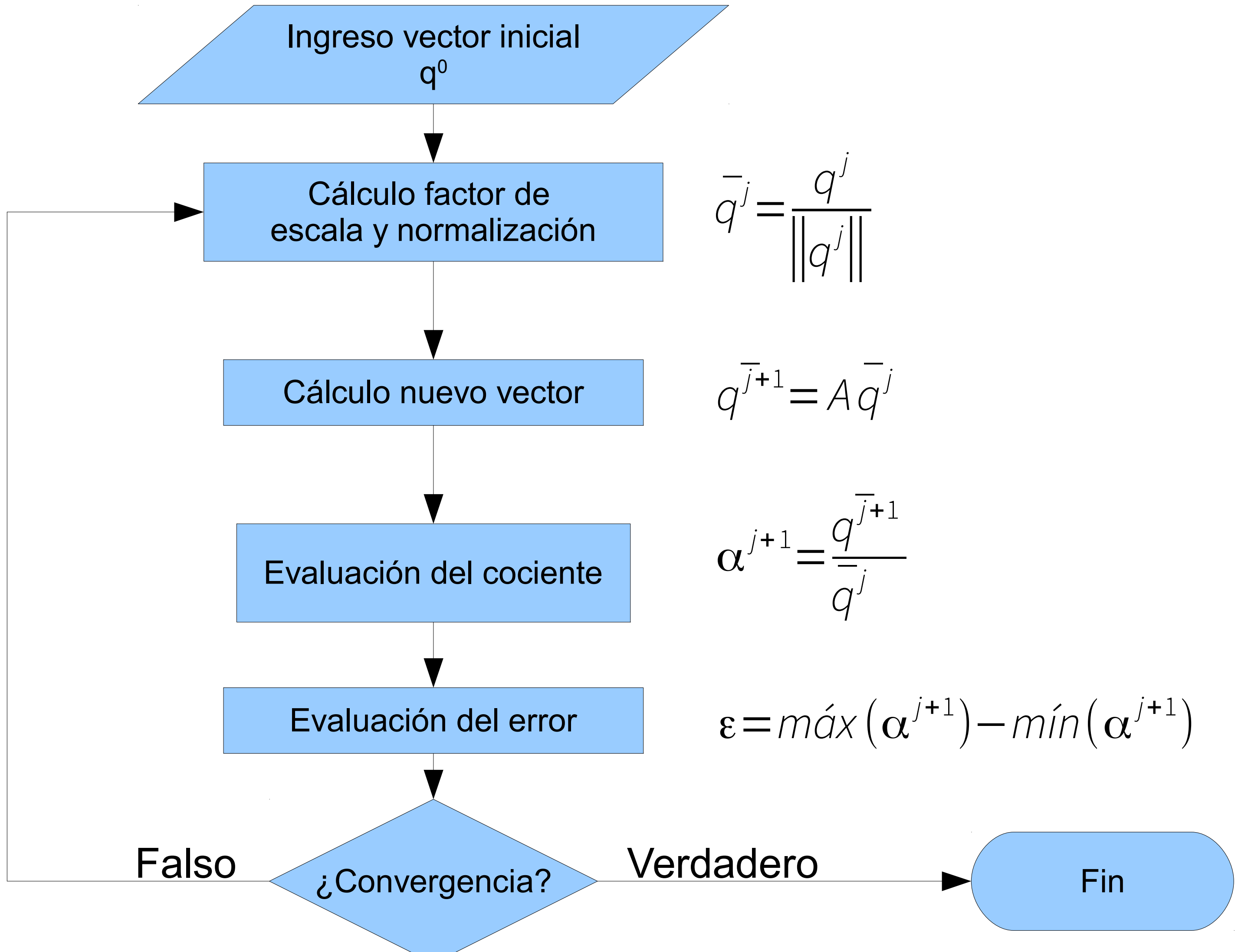
FCEN
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES

A medida que el método evoluciona, las sucesivas multiplicaciones aumentan el vector calculado (si $|\lambda_1| > 1$) o lo reducen (si $|\lambda_1| < 1$). Esta situación puede dar a lugar a desbordes numéricos (overflow o underflow) por lo tanto es necesario controlar la magnitud del vector calculado.

Por lo tanto se utiliza un escalamiento: $\overline{q^{j+1}} = \frac{\mathrm{A}q^j}{\sigma_{j+1}}$

La elección exacta del factor σ_{j+1} no es relevante. Una regla simple es elegir el máximo valor del vector $\mathrm{A}q^j$, ya que asegura que la secuencia converge a un vector cuya máxima componente valdrá 1.

Resumen método de la potencia



$$\bar{q}^j = \frac{q^j}{\left\| q^j \right\|}$$

$$q^{j+1} = A\,\bar{q}^j$$

$$\alpha^{j+1} = \frac{q^{j+1}}{\bar{q}^j}$$

$$\varepsilon = \mathrm{máx}\left(\alpha^{j+1}\right) - \mathrm{mín}\left(\alpha^{j+1}\right)$$

Ejemplo 1

FCEN
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES

Dada la matriz $\mathrm{A} = \begin{bmatrix} 9 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ se desean obtener los autovectores de la matriz.

1) Polinomio característico: $\det|\mathrm{A} - \lambda \mathrm{I}| = \mathbf{0}$

$$\det\left|\begin{bmatrix} 9 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}\right| = \det\left|\begin{bmatrix} 9-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{bmatrix}\right| = (9-\lambda)(2-\lambda) - 1 = 17 - 11\lambda + \lambda^2 = 0$$

Las raíces del polinomio son: 9,140055 y 1,859945. La tasa de convergencia es $\left|\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right|$=**0,203**

El autovector asociado al autovalor dominante es: $(\mathrm{A} - \lambda_1 \mathrm{I})\mathbf{v}_1 = 0$

$$\begin{bmatrix} -0{,}14006 & 1 \\ 1 & -7{,}14006 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} v_{11} \\ v_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \mathrm{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0{,}14006 \end{pmatrix}$$

El autovector asociado al segundo autovalor es: $(\mathrm{A} - \lambda_2 \mathrm{I})\mathbf{v}_2 = 0$

$$\begin{bmatrix} 7{,}14006 & 1 \\ 1 & 0{,}14006 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} v_{11} \\ v_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \mathrm{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -7{,}14006 \end{pmatrix}$$

Ejemplo 1

Dada la matriz $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 9 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ se desea obtener el autovector dominante de la matriz.

2) Método de la potencia **sin escalamiento**.

Iteración	q^j	$\lVert q^j \rVert$	$\overline{q^j}$	$\overline{q^{j+1}}$	α^{j+1}	error
0	[1 1]	1	[1 1]	[10 3]	[10 3]	7
1	[10 3]	1	[10 3]	[93 16]	[9,33 5,33]	3,967
2	[93 16]	1	[93 16]	[853 125]	[9,172 7,8125]	1,3595
3	[853 125]	1	[853 125]	[7802 1103]	[9,1465 8,824]	0,323
4	[7802 1103]	1	[7802 1103]	[71321 10008]	[9,1414 9,073]	0,068
5	[71321 10008]	1	[71321 10008]	[651897 91337]	[9,1403 9,1264]	0,014

Analítico: [1 0,14006]

Analítico: 9,140055

Ejemplo 1

FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES

Dada la matriz $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 9 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ se desea obtener el autovector dominante de la matriz.

2) Método de la potencia **con escalamiento**.

Iteración	q^j	$\|q^j\|$	$\overline{q^j}$	$\overline{q^{j+1}}$	α^{j+1}	error
0	[1 1]	1	[1 1]	[10 3]	[10 3]	7
1	[10 3]	10	[1 0,3]	[9,3 1,6]	[9,3 5,33]	3,967
2	[9,3 1,6]	9,3	[1 0,172]	[9,172 1,344]	[9,172 7,813]	1,359
3	[9,172 1,344]	9,172	[1 0,1465]	[9,1465 1,293]	[9,1465 8,824]	0,3225
4	[9,1465 1,293]	9,1465	[1 0,14137]	[9,1414 1,2828]	[9,1414 9,0734]	0,0679
5	[9,1414 1,2828]	9,1414	[1 0,14032]	[9,1403 1,2806]	[9,1403 9,1264]	0,0139

Analítico: [1 0,14006]

Analítico: 9,140055

Ejemplo 2

Dada la matriz $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 8 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$ se desea obtener el autovector dominante de la matriz.

1) Polinomio característico: $\det|\mathbf{A} - \lambda \mathrm{I}| = \mathbf{0}$

$$\det\left|\begin{bmatrix} 8-\lambda & 1 \\ -2 & 1-\lambda \end{bmatrix}\right| = (8-\lambda)(1-\lambda) + 2 = 10 - 9\lambda + \lambda^2 = 0$$

Las raíces del polinomio son: 7,70156 y 1,29844. La tasa de convergencia es $\left|\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right|$=**0,1686**

El autovector asociado al autovalor dominante es: $(\mathbf{A} - \lambda_1 \mathrm{I})\mathbf{v}_1 = 0$

$$\begin{bmatrix} 0{,}29844 & 1 \\ -2 & -6{,}70156 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} v_{11} \\ v_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -0{,}29844 \end{pmatrix}$$

Ejemplo 2

Dada la matriz $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 8 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$ se desea obtener el autovector dominante de la matriz.

2) Método de la potencia.

Iteración	q^j	$\|q^j\|$	$\overline{q^j}$	$\overline{q^{j+1}}$	α^{j+1}	error
0	[1 1]	1	[1 1]	[9 -1]	[9 -1]	10
1	[9 -1]	9	[1 -0,111]	[7,889 -2,111]	[7,889 19]	-11,11
2	[7,889 -2,111]	7,889	[1 -0,2676]	[7,7324 -2,2676]	[7,7324 8,4737]	-0,741
3	[7,7324 -2,2676]	7,7324	[1 -0,2932]	[7,7067 -2,2933]	[7,7067 7,8199]	-0,113
4	[7,7067 -2,2933]	7,7067	[1 -0,2976]	[7,7024 -2,2976]	[7,7024 7,7212]	-0,0188

Analítico: [1 -0,29844]

Analítico: 7,70156

Ejemplo 3

FCEN
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES

Dada la matriz $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 9 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ se desea obtener el autovector dominante de la matriz.

2) Método de la potencia. **Inicio con el segundo autovector**

Iteración	q^j	$\|q^j\|$	$\overline{q^j}$	$\overline{q^{j+1}}$	α^{j+1}	error
0	[1 -7,14006]	7,14006	[0,14005 -1]	[0,26049 -1,8599]	[1,85994 1,859945]	-5E-6

Analítico: [1 0,14006]

Analítico: 9,140055

¿Por qué no converge al dominante?

Al ser el vector inicial paralelo al segundo autovector, y los autovectores forman una base, el vector es ortogonal al primer autovector y siempre da 0 la componente c_1

Método iterativo de la potencia inversa

FCEN
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES

Mediante el método de la potencia se obtiene una aproximación al autovector y autovalor dominantes asociados a la matriz A.

Si la matriz no es singular, se puede utilizar la inversa para generar la secuencia de vectores, lo cual arrojará como resultado la inversa del mínimo autovalor de la matriz A.

Observación: el proceso es idéntico al del método de la potencia, sin embargo, la inversión de la matriz A no es eficiente del punto de vista numérico. Por lo tanto conviene resolver un SEL mediante la factorización LU.

$q^{j+1} = A^{-1} q^{j} \rightarrow$ Premultiplicando por A: $A q^{j+1} = A A^{-1} q^{j} \rightarrow A q^{j+1} = q^{j}$

$(L U) q^{j+1} = L(U q^{j+1}) = q^{j} \rightarrow L y = q^{j}$ siendo $U q^{j+1} = y$

De esta forma, se determinan las matrices L y U una única vez al principio y luego se resuelven sistemas triangulares, actualizando el valor del término independiente.

Ejemplo 4

FCEN
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES

Dada la matriz $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 9 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ se desea obtener el mínimo autovector de la matriz.

Método de la **potencia inversa**.

Iteración	q^j	$\|q^j\|$	$\overline{q^j}$	$\overline{q^{j+1}}$	α^{j+1}	error
0	[1 1]	1	[1 1]	[0,0588 0,4706]	[0,0588 0,4706]	-0,412
1	[0,0588 0,4706]	0,4706	[0,125 1]	[-0,0441 0,522]	[0,3529 0,522]	-0,875
2	[-0,0441 0,522]	0,522	[-0,0845 1]	[-0,06876 0,5344]	[0,8137 0,5344]	0,279
3	[-0,06876 0,5344]	0,5344	[-0,1287 1]	[-0,07396 0,53698]	[0,5748 0,53698]	0,0378
4	[-0,07396 0,53698]	0,53698	[-0,1377 1]	[-0,07502 0,53751]	[0,5447 0,5375]	0,0072
			[1 -7,262]		1,848	

Analítico: [1 -7,14006]

Analítico: 1,859945

Método para encontrar otros autovalores

FCEN
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES

Un método para encontrar los demás autovalores consiste en, primero eliminar del sistema original el autovalor dominante que ya se conoce, y luego repetir el método de la potencia para encontrar el siguiente autovalor dominante. Es una estrategia similar a la deflación de polinomios y se denomina **Método de Hotelling.**

Nueva matriz $B = A - \lambda_1 x_1 x_1^T$

Se resuelve el nuevo problema de autovalores $B x_i = \lambda_i x_i$ con i=2,3,...,n

Idealmente, la deflación permite obtener todos los autovalores de la matriz A, sin embargo, la aritmética de punto flotante y el error de convergencia del proceso iterativo, van degradando la solución ya que el autovalor "conocido" en realidad no es exacto. De modo que al eliminar el autovalor aproximado de la matriz, no se elimina de forma exacta y quedan residuos. Por lo tanto, se pueden determinar solamente algunos de los autovalores restantes, hasta que la precisión numérica se degrada por completo.