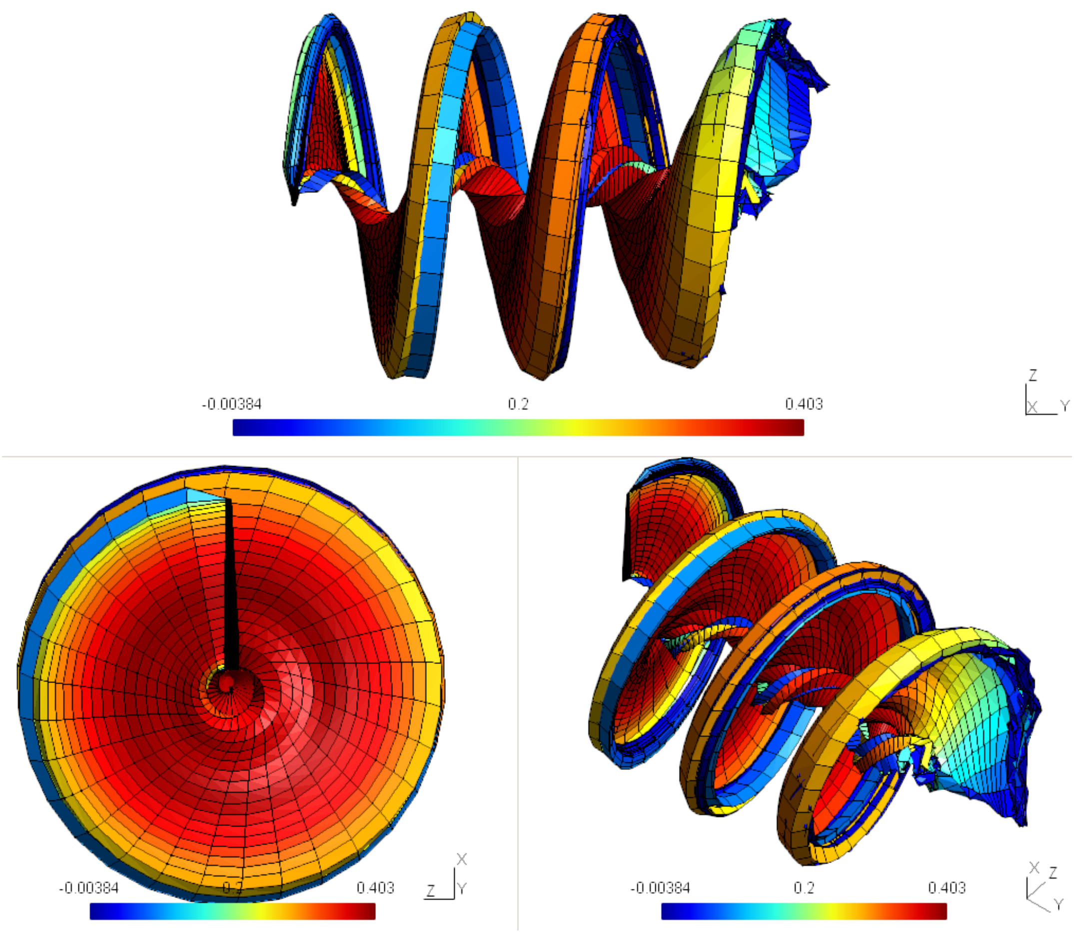
FCEN
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES



Elementos de Cálculo Numérico (M212)

Unidad 7: Ecuaciones diferenciales ordinarias

http://fcen.uncuyo.edu.ar/elementos-de-calculo-numerico

Unidad 7: Ecuaciones diferenciales ordinarias

FCEN
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES

Temario

- Soluciones numéricas de un paso
- Método de Euler de primer orden
- Métodos predictores-correctores de segundo orden
- Métodos Runge-Kutta
- Problemas de valores iniciales
- Métodos multipaso de Adams-Bashfort y Adams-Moulton
- Problemas de frontera

Soluciones numéricas de un paso

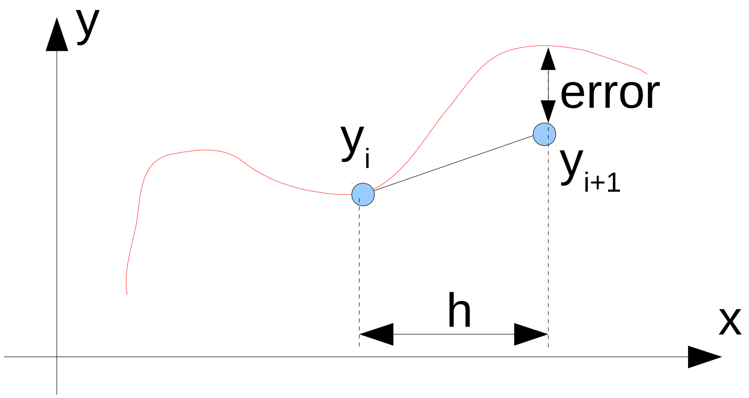
Se busca resolver ecuaciones diferenciales de la forma

$$\frac{dy}{dx}=f(x,y)$$

Los métodos de un paso extrapolan el valor de la imagen a partir de una aproximación de la pendiente. En forma general se pueden expresar así

$$y_{i+1}=y_i+\phi h$$

Esta fórmula se puede aplicar a partir de un valor inicial e ir avanzando de a un paso (h) a la vez.



Método de Euler

Asumiendo que la derivada es constante en el intervalo h, se puede aproximar su valor a partir de la función f(x,y) **evaluada en el extremo inicial (xi,yi)**.

$$\phi = f(x_i, y_i) \rightarrow y_{i+1} = y_i + f(x_i, y_i)h$$

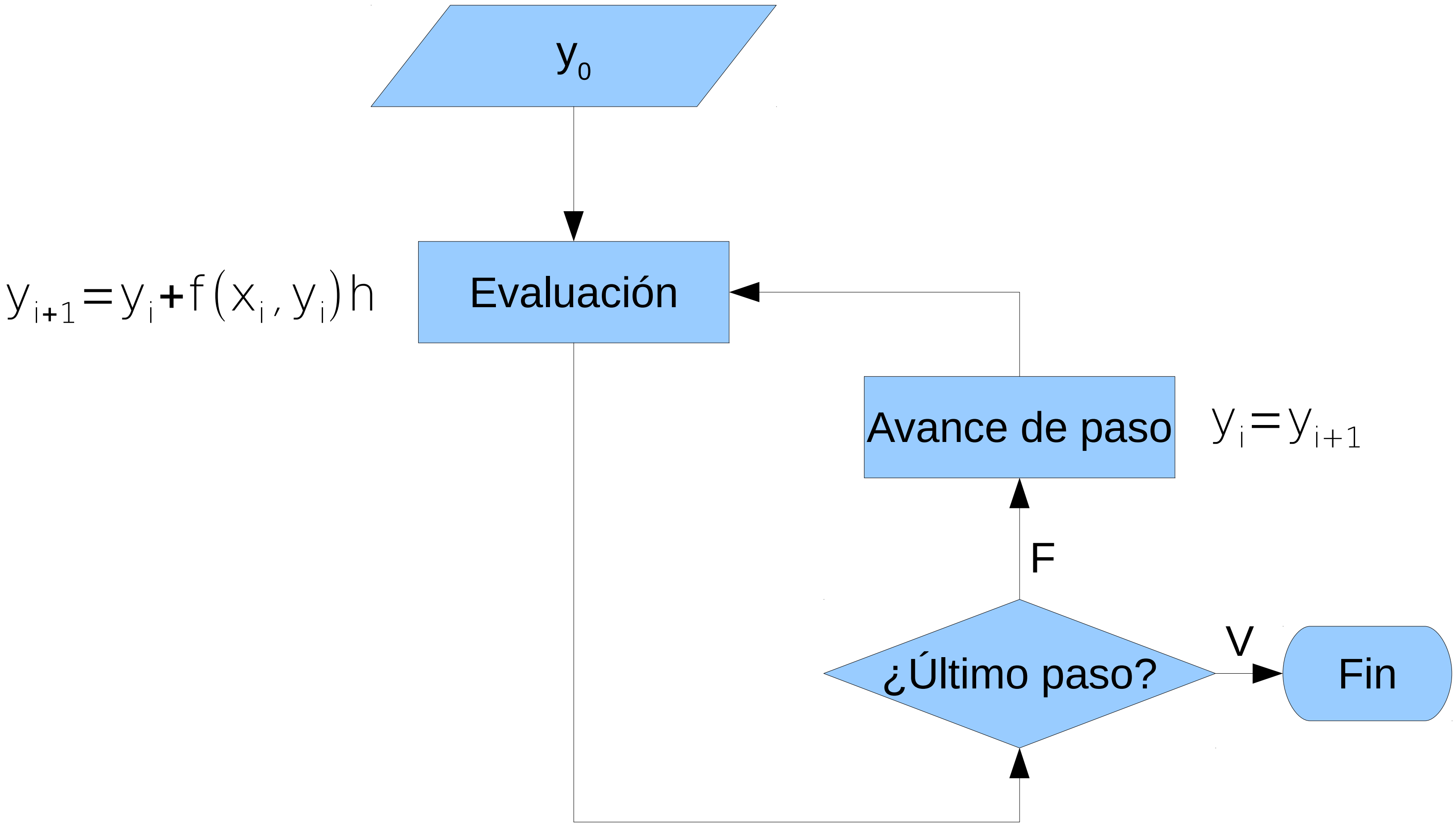
Esta fórmula se conoce como el método de Euler. Geométricamente se puede asociar a una recta cuya pendiente es la derivada en el extremo inicial.

Utilizando el método de expansión por series de Taylor se puede observar que **el método es de primer orden**, es decir es O(h).

A pesar de ser un método de primer orden, su sencillez hace del método de Euler una herramienta muy utilizada en soluciones numéricas.

V

Método de Euler



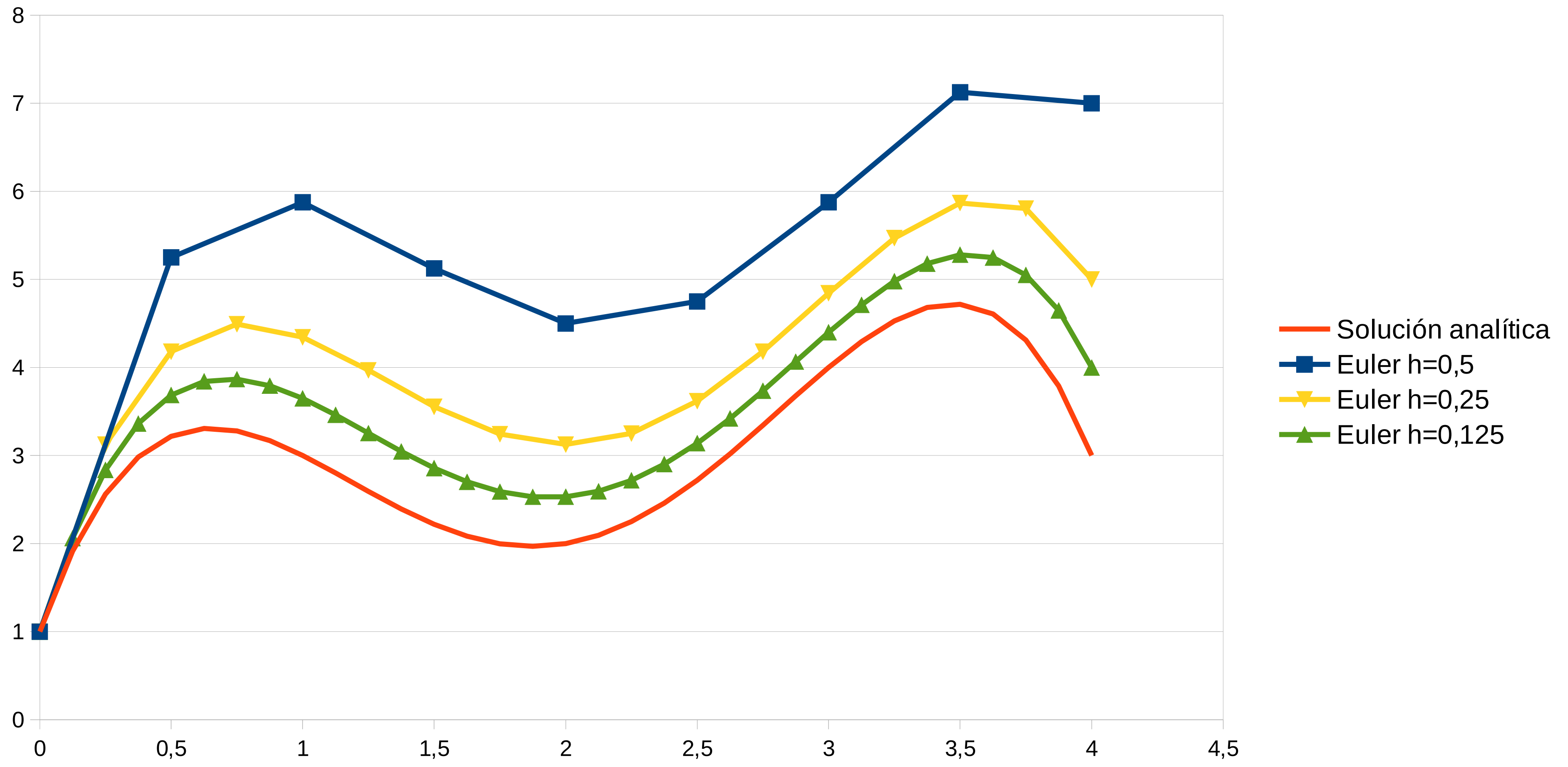
Ejemplo

Utilizando el método de Euler integre numéricamente la siguiente ecuación diferencial ordinaria de primer orden.

$$\frac{dy}{dx}=-2x^3+12x^2-20x+8,5 \text{ con } x\in[0,4]\wedge y(0)=1$$

xi	yanalitica	f(xi,yi)	Y1 (h=0,5)	f(xi,yi)	Y2 (h=0,25)	f(xi,yi)	Y3 (h=0,125)
0	1	8,5	1	8,5	1	8,5	1
0,125	1,9139404297					6,18359375	2,0625
0,25	2,560546875			4,21875	3,125	4,21875	2,8354492188
0,375	2,9822998047					2,58203125	3,3627929688
0,5	3,21875	1,25	5,25	1,25	4,1796875	1,25	3,685546875
0,625	3,3065185547					0,19921875	3,841796875
0,75	3,279296875			-0,59375	4,4921875	-0,59375	3,8666992188
0,875	3,1678466797					-1,15234375	3,7924804688
1	3	-1,5	5,875	-1,5	4,34375	-1,5	3,6484375

Ejemplo



0
1
2
3
4
5
6
7
8
0
0,5
1
1,5
2
2,5
3
3,5
4
4,5
Solución analítica
Euler h=0,5
Euler h=0,25
Euler h=0,125

Incremento del orden del método

Si se desea incrementar el orden, manteniendo el esquema de un solo paso, una forma es incorporando derivadas de orden superior evaluadas en el punto de la expansión de Taylor. Por ejemplo, para obtener una aproximación de segundo orden:

$$\phi = f(x_i, y_i) + \frac{1}{2!} f'(x_i, y_i) h \rightarrow y_{i+1} = y_i + f(x_i, y_i) h + \frac{1}{2!} f'(x_i, y_i) h^2$$

Esta metodología, si bien resulta atractiva, tiene la dificultad de tener que evaluar las derivadas de ordenes superiores.

Una alternativa que evita el problema de evaluar derivadas de órdenes superiores, es aproximar la derivada dentro de todo el intervalo con un **promedio entre la derivada evaluada en el punto inicial y la evaluada en el punto final**. Este método se conoce como **método de Heun**. El método de Heun **es de segundo orden**.

Métodos predictor-corrector

Para poder utilizar el método se debe realizar en etapas.

1) Etapa de **predicción** (Euler de primer orden hacia adelante):

$$y_{i+1}^{p} = y_i + f(x_i, y_i)h$$

2) Etapa de **evaluación**

$$f(x_{i+1}, y_{i+1}^{p})$$

3) Etapa de **corrección** (Euler de primer orden con el promedio de las derivadas)

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}[f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_{i+1}^{p})]$$

Este esquema de integración se conoce como **método predictor-corrector**. En general se utiliza de forma iterativa, resultando en un método **robusto** y "**simpléctico**" (no produce amortiguamiento numérico).

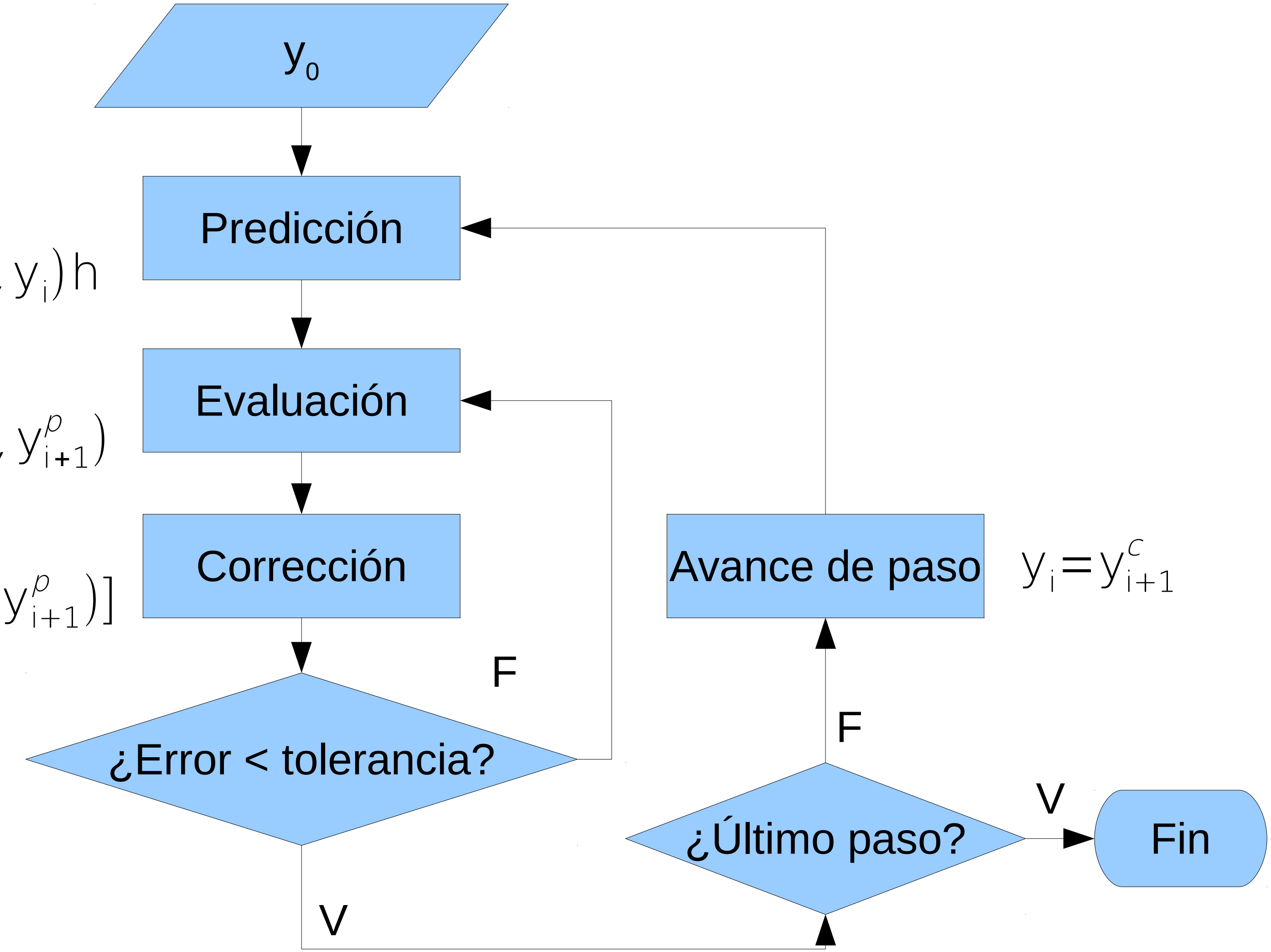
Métodos predictor-corrector

$$y^{p}_{i+1} = y_i + f(x_i, y_i)\,h$$

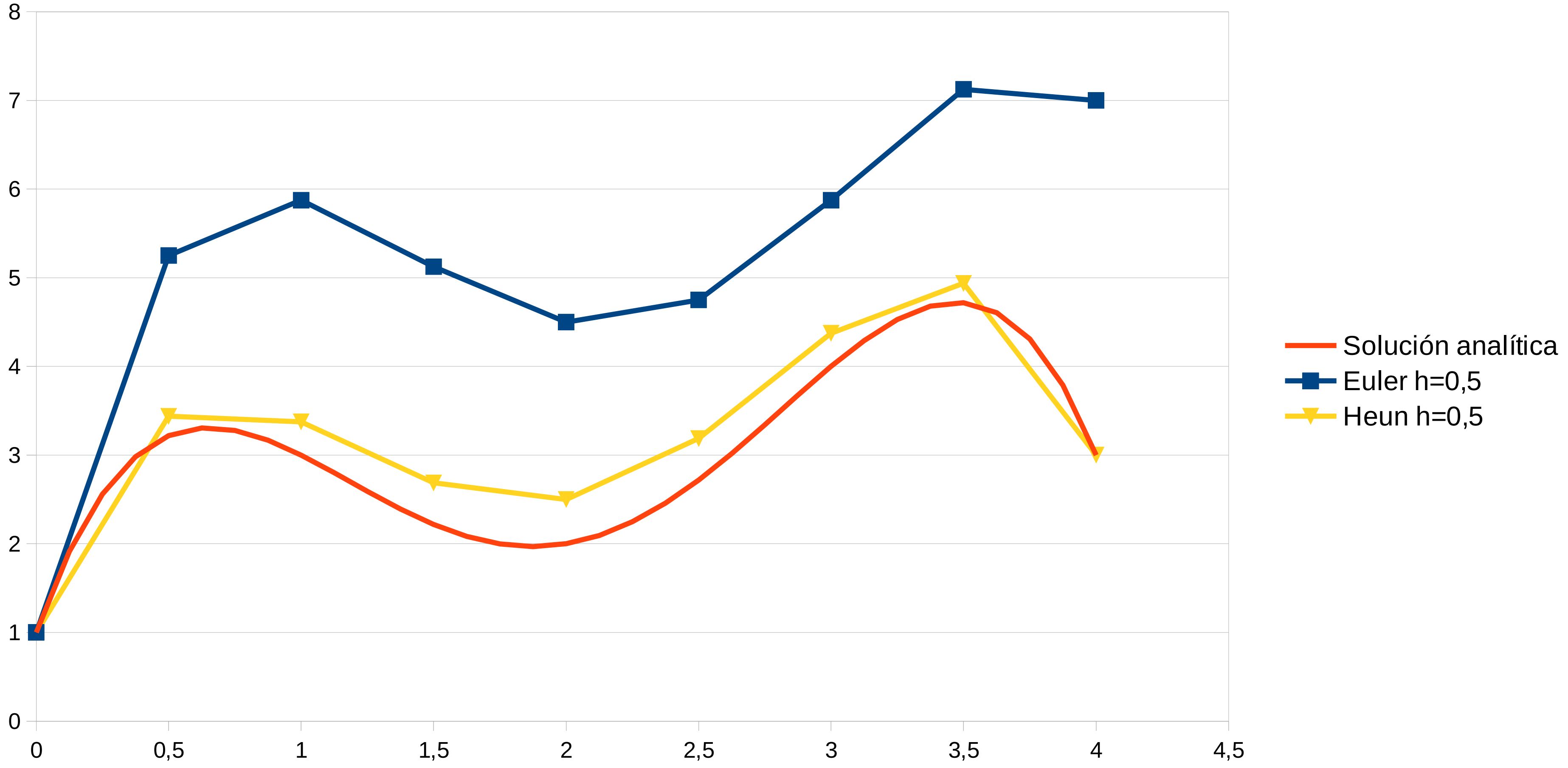
$$f(x_{i+1}, y^{p}_{i+1})$$

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}\left[f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y^{p}_{i+1})\right]$$

$$y_i = y^{c}_{i+1}$$



Métodos predictor-corrector



Métodos Runge-Kutta

FCEN FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES

Tanto el método de Euler como el de Heun, pueden verse como un caso particular de **una clase más amplia de métodos de un paso**. Esta clase general se conoce como métodos de Runge-Kutta.

Los métodos Runge-Kutta **logran la precisión de la aproximación por series de Taylor sin necesitar calcular derivadas de orden superior**. En forma general se pueden expresar de la siguiente forma:

$y_{i+1} = y_i + \phi(x_i, y_i, h)h$, donde ϕ se denomina función de incremento

La función de incremento puede verse como una aproximación de la derivada dentro del intervalo y en general se puede expresar de la forma:

$$\phi(x_i, y_i, h) = a_1 k_1 + a_2 k_2 + \ldots + a_n k_n$$
$$k_1 = f(x_i, y_i)$$
$$k_2 = f(x_i + p_1 h, y_i + q_{11} k_1 h)$$
$$k_n = f(x_i + p_{n-1} h, y_i + q_{n-1,1} k_1 h + q_{n-1,2} k_2 h + \ldots + + q_{n-1,n-1} k_{n-1} h)$$

Métodos Runge-Kutta

Los valores a,p,q se determinan según el orden (n) del método.

Veamos como encontrar los valores para un método de orden 2:

$$y_{i+1}=y_i+(a_1 k_1+a_2 k_2)h$$
$$k_1=f(x_i, y_i)$$
$$k_2=f(x_i+p_1 h, y_i+q_{11} k_1 h)$$

Expandimos por series de Taylor $k_2(x,y)$:

$$f(x_i+p_1 h, y_i+q_{11} k_1 h)=f(x_i, y_i)+p_1 h\frac{\partial}{\partial x}f(x_i, y_i)+q_{11} k_1 h\frac{\partial}{\partial y}f(x_i, y_i)+O(h^2)$$

Reemplazando k_1 y k_2 en la expresión de y_{i+1}:

$$y_{i+1}=y_i+(a_1 h f(x_i, y_i)+a_2[h f(x_i, y_i)+p_1 h^2\frac{\partial}{\partial x}f(x_i, y_i)+q_{11} k_1 h^2\frac{\partial}{\partial y}f(x_i, y_i)+O(h^3)])$$

Agrupando por orden de h:

$$y_{i+1}=y_i+(a_1+a_2)h f(x_i, y_i)+(a_2 p_1\frac{\partial}{\partial x}f(x_i, y_i)+a_2 q_{11} k_1\frac{\partial}{\partial y}f(x_i, y_i))h^2+O(h^3) \qquad (1)$$

Métodos Runge-Kutta

FCEN FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES

Considerando una expansión en series de Taylor de la ecuación original:

$$y_{i+1}=y_i+hf(x_i,y_i)+\frac{1}{2!}[\frac{\partial}{\partial x}f(x_i,y_i)+\frac{\partial}{\partial y}f(x_i,y_i)]h^2 \quad (2)$$

Finalmente se pueden comparar (1) y (2) y se obtienen los valores de a,p,q.

$$(1) \quad y_{i+1}=y_i+(a_1+a_2)hf(x_i,y_i)+(a_2 p_1\frac{\partial}{\partial x}f(x_i,y_i)+a_2 q_{11} k_1\frac{\partial}{\partial y}f(x_i,y_i))h^2$$

$$(2) \quad y_{i+1}=y_i+hf(x_i,y_i)+(\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}f(x_i,y_i)+\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial y}f(x_i,y_i))h^2$$

$$a_1+a_2=1,\ a_2 p_1=1/2,\ a_2 q_{11}=1/2$$

Se puede ver que hay tres condiciones para cuatro constantes. Por lo tanto resulta en un sistema de ecuaciones subdeterminado y da origen a una **familia de métodos de segundo orden**.

Métodos Runge-Kutta

Veamos algunos ejemplos clásicos:

Si elegimos $a_2=1/2$ se obtiene el **método de Heun** ya visto.

$$a_1=1/2,\ p_1=q_{11}=1$$

$$y_{i+1}=y_i+(a_1 k_1+a_2 k_2)h=y_i+1/2(k_1+k_2)h$$

$$k_1=f(x_i,y_i)$$

$$k_2=f(x_i+p_1 h, y_i+q_{11} k_1 h)=f(x_i+h, y_i+k_1 h)$$

Si elegimos $a_2=1$ se obtiene el **método del punto medio**.

$$a_1=0,\ p_1=q_{11}=1/2$$

$$y_{i+1}=y_i+(a_1 k_1+a_2 k_2)h=y_i+k_2 h$$

$$k_1=f(x_i,y_i)$$

$$k_2=f(x_i+p_1 h, y_i+q_{11} k_1 h)=f(x_i+1/2 h, y_i+1/2 k_1 h)$$

Métodos Runge-Kutta

Veamos el método más popular de los RK, el **método RK de cuarto orden o RK4**:

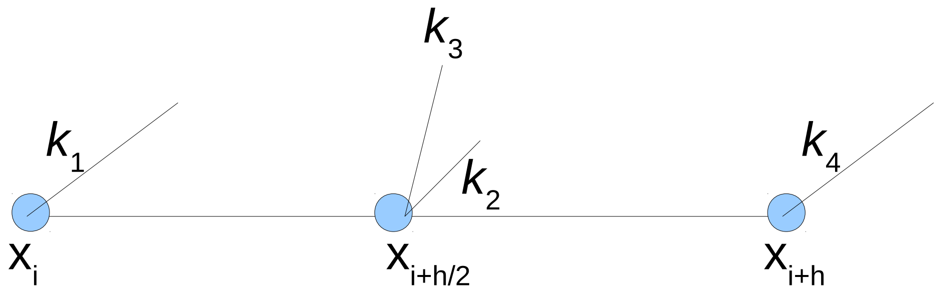
$$y_{i+1}=y_i+\frac{1}{6}(k_1+2k_2+2k_3+k_4)h$$

$$k_1=f(x_i,y_i)$$

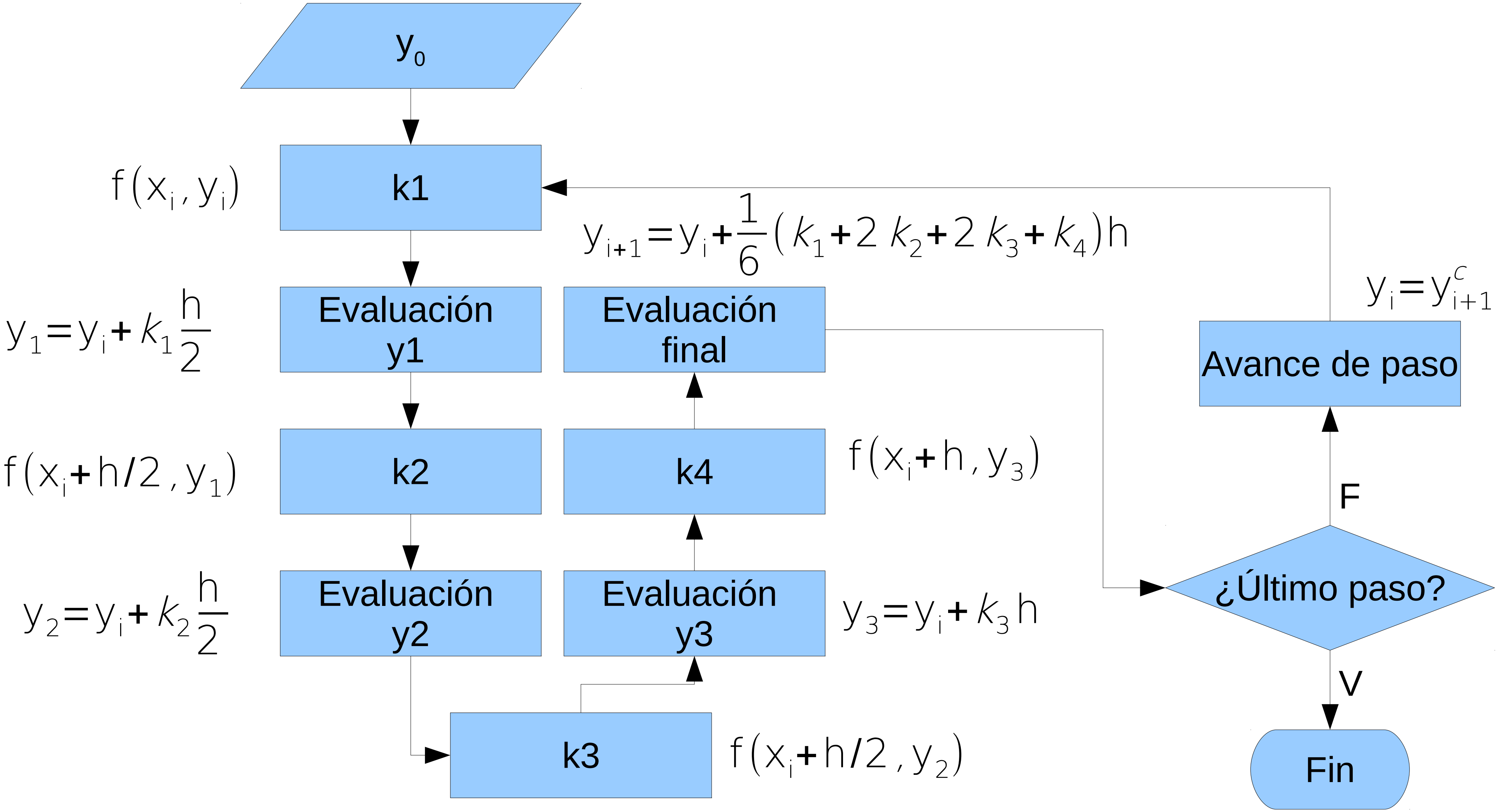
$$k_2=f(x_i+h/2,y_i+k_1h/2)$$

$$k_3=f(x_i+h/2,y_i+k_2h/2)$$

$$k_4=f(x_i+h,y_i+k_3h)$$



Método RK4

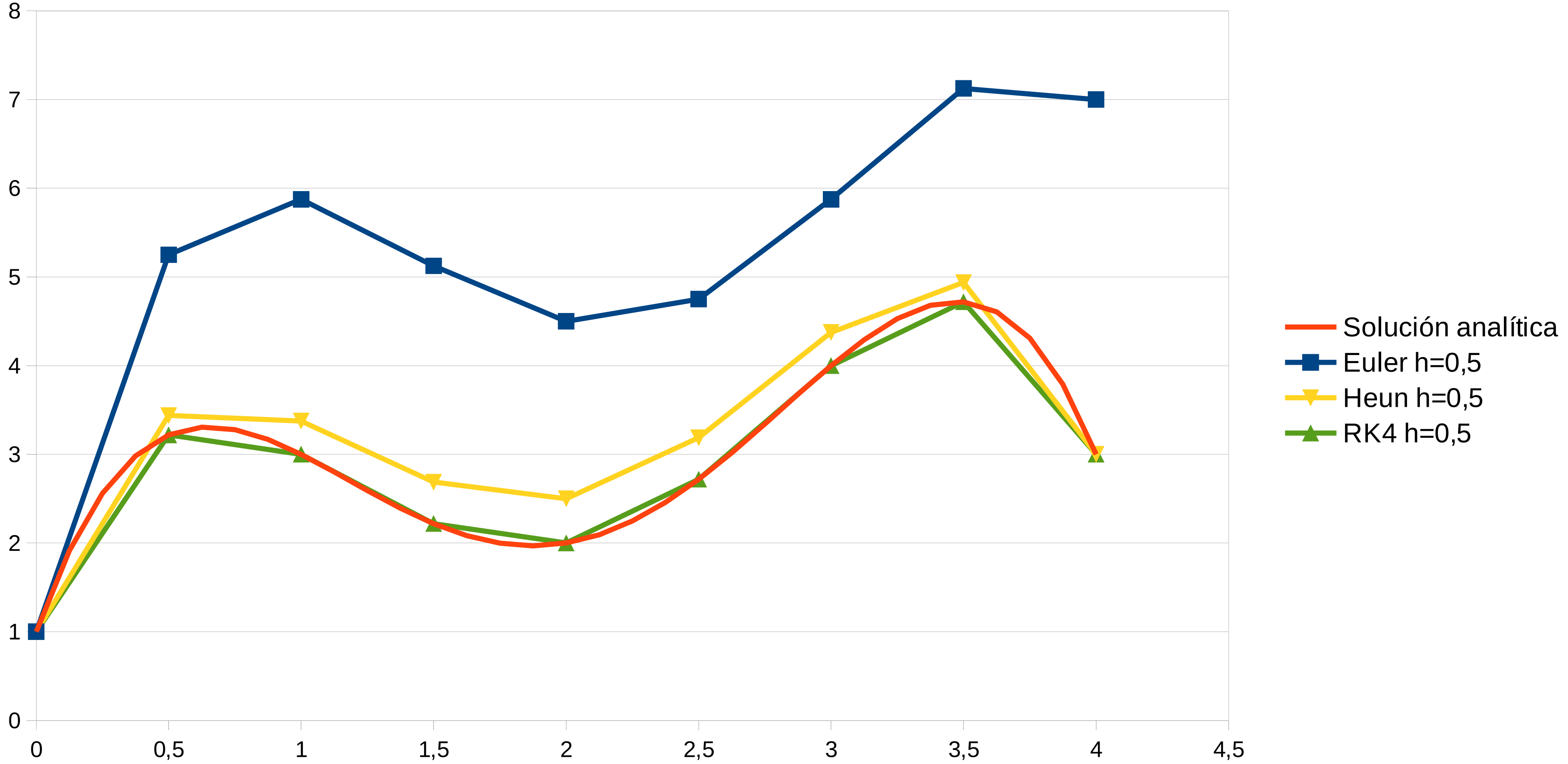

y_0
$f(x_i, y_i)$
k1
$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)h$
$y_i = y^c_{i+1}$
$y_1 = y_i + k_1 \frac{h}{2}$
Evaluación y1
Evaluación final
Avance de paso
$f(x_i + h/2, y_1)$
k2
k4
$f(x_i + h, y_3)$
F
$y_2 = y_i + k_2 \frac{h}{2}$
Evaluación y2
Evaluación y3
$y_3 = y_i + k_3 h$
¿Último paso?
V
k3
$f(x_i + h/2, y_2)$
Fin

Ejemplo

$$\frac{dy}{dx} = -2x^3 + 12x^2 - 20x + 8{,}5 \text{ con } x \in [0{,}4] \wedge y(0) = 1$$

xi	yi	k1	y1	k2	y2	k3	y3	k4	Yi+1
0	1	8,5	3,125	4,21875	4,1796875	4,21875	6,2890625	1,25	3,21875
0,5	3,21875	1,25	3,53125	-0,59375	3,3828125	-0,59375	3,0859375	-1,5	3
1	3	-1,5	2,625	-1,65625	2,2109375	-1,65625	1,3828125	-1,25	2,21875
1,5	2,21875	-1,25	1,90625	-0,46875	1,7890625	-0,46875	1,5546875	0,5	2
2	2	0,5	2,125	1,46875	2,4921875	1,46875	3,2265625	2,25	2,71875
2,5	2,71875	2,25	3,28125	2,65625	3,9453125	2,65625	5,2734375	2,5	4
3	4	2,5	4,625	1,59375	5,0234375	1,59375	5,8203125	-0,25	4,71875
3,5	4,71875	-0,25	4,65625	-3,21875	3,8515625	-3,21875	2,2421875	-7,5	3
4	3	-7,5	1,125	-13,28125	-2,1953125	-13,28125	-8,8359375	-20,75	-3,78125

Ejemplo



8
7
6
5
4
3
2
1
0
0
0,5
1
1,5
2
2,5
3
3,5
4
4,5
Solución analítica
Euler h=0,5
Heun h=0,5
RK4 h=0,5

Problemas de valores iniciales

Cuando se resuelven problemas de avance en el tiempo, las ecuaciones "marchan" a partir de un valor inicial. En algunas ecuaciones puede ocurrir que la solución sea una combinación de soluciones que evolucionen a distinta velocidad. Esta situación da origen a un problema de estabilidad numérica conocido como "rigidez". Para poder evitarlo, **se deben utilizar pasos de integración muy pequeños en los esquemas vistos hasta ahora (que se conocen como explícitos)**.

Una alternativa es utilizar **esquemas implícitos** ya que **son incondicionalmente estables**, es decir, no producen oscilaciones numéricas para todo paso de integración que se elija.

La versión implícita del método de Euler, se denomina Euler hacia atrás y es de la siguiente forma:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{dy_{i+1}}{dt} h$$

Métodos multipaso ABAM45

Una estrategia numérica muy eficiente resulta de incluir la información de puntos que ya se han calculado, de modo que se puede incrementar el orden de integración a medida que el cálculo va evolucionando.

Uno de los métodos más utilizados es el método de Adams-Bashforth (predictor) + Adams-Moulton (Corrector) de cuarto orden.

$$y_{i+1}^{p}=y_i+h\left(55/24 f_i-59/24 f_{i-1}+37/24 f_{i-2}-9/24 f_{i-3}\right)$$

$$y_{i+1}^{j}=y_i+h\left(9/24 f_{i+1}^{j-1}+19/24 f_i-5/24 f_{i-1}+1/24 f_{i-2}\right)$$

Para poder utilizar el método ABAM45 se requieren al menos 4 puntos determinados previamente mediante cualquier otro método numérico.

Problemas de contorno

Cuando las ecuaciones **solo dependen del espacio**, pertenecen a un dominio acotado y poseen condiciones de borde. La solución de estos problemas no evoluciona desde un valor inicial, por lo tanto no sufren de los problemas de estabilidad.

Existen varios métodos numéricos diseñados para discretizar el dominio y resolver estos problemas, como por ejemplo las diferencias finitas, los elementos finitos y los volúmenes finitos.

Para el caso de **las diferencias finitas**, el esquema del método es el siguiente:

1)**Discretización del dominio:** Se plantea la ecuación a resolver en posiciones fijas discretas (llamadas nodos). También se plantean las condiciones de borde.

2)**Aproximación de las derivadas:** Se reemplazan las derivadas con diferencias finitas, vinculando cada nodo central con sus nodos vecinos.

3)**Se resuelven en simultáneo las ecuaciones nodales** armando un sistema de ecuaciones lineales cuyas incógnitas son los valores en cada nodo.