Límite de la suma de funciones

Enunciado: "El límite, para cierta tendencia, de la suma de dos funciones que tienen límite es igual a la suma de los respectivos límites de cada función, para la misma tendencia."

Hipótesis: $\lim_{x\to a} f(x) = F$; $\lim_{x\to a} g(x) = G$

Tesis:

$$\lim_{x\to a} (f+g)(x) = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x)$$

Demostración: de acuerdo con la definición de Límite, para los límites de la hipótesis se debe cumplir que para todo posible ε (arbitrariamente pequeño y positivo) debe existir un δ_1 y un δ_2 que dependan de ε (también arbitrariamente pequeños y positivos), tal que:

$0 < x-a < \delta_1 \Rightarrow |f(x)-F| < \varepsilon/2$

$0 < x-a < \delta_2 \Rightarrow |g(x)-G| < \varepsilon/2$

Llamando δ al más pequeño de los valores del par (δ_1, δ_2) tendremos:

$$0 < x-a < \delta \Rightarrow |f(x)+g(x)-(F+G)| < |[f(x)-F]+[g(x)-G]|$$

$$\leqslant |f(x)-F| + |g(x)-G|$$ Desigualdad triangular de valor absoluto

$$\leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\leqslant \varepsilon$$

El resultado indica entonces que a medida que le damos a la variable x valores lo suficientemente cercanos a "a", pueden obtenerse valores de $[f(x)+g(x)]$ cada vez más cercanos a $(F+G)$.

Por lo tanto, reemplazando los límites de la hipótesis en la tesis obtendremos:

$$\boxed{\lim_{x\to a} (f+g)(x) = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x) = F+G}$$

Límite del producto de dos funciones

Enunciado: si dos funciones tienen límite finito, el límite del producto de las mismas, para cierta tendencia, es igual al producto de los límites de cada una de ellas para la misma tendencia.

Hipótesis: $\lim_{x\to a} f(x) = L \qquad \lim_{x\to a} g(x) = M$

Tesis: $\lim_{x\to a}[f(x)\cdot g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) \cdot \lim_{x\to a} g(x) = L.M$

Demostración: si esta propiedad es cierta, al aplicar la definición de límite esta debe cumplirse, es decir: $\forall \varepsilon>0$, $\exists \delta>0$ que depende de ε / $\forall x \in a$ la intersección de los dominios de las funciones f y g se verifique:

$$0<|x-a|<\delta \Rightarrow |f(x)\cdot g(x) - LM| < \varepsilon$$

Escribimos: $f(x) = L + [f(x)-L] \qquad g(x) = M + [g(x)-M]$

Multiplicamos tales expresiones y les restamos L.M:

$$f(x)\cdot g(x) - LM = \Big\{L+[f(x)-L]\Big\}\cdot\Big\{M+[g(x)-M]\Big\} - L.M$$

$$= LM + L[g(x)-M] + M[f(x)-L] + [f(x)-L][g(x)-M] - L.M$$

$$= L[g(x)-M] + M[f(x)-L] + [f(x)-L][g(x)-M]$$

Las funciones f y g tienen límites L y M cuando $x\to a$, entonces existen números positivos $\delta_1, \delta_2, \delta_3$ y δ_4 $\forall x \in D$ tal que:

$$0<|x-a|<\delta_1 \Rightarrow |f(x)-L| < \sqrt{\frac{\varepsilon}{3}}$$

$$0<|x-a|<\delta_2 \Rightarrow |g(x)-M| < \sqrt{\frac{\varepsilon}{3}}$$

$$0<|x-a|<\delta_3 \Rightarrow |f(x)-L| < \frac{\varepsilon}{3(|M|+1)}$$

$$0<|x-a|<\delta_4 \Rightarrow |g(x)-M| < \frac{\varepsilon}{3(|L|+1)}$$

Llamando δ al más pequeño de los valores $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4$ entonces se cumple:

$$0<|x-a|<\delta \ (\forall x\in D) \Rightarrow |f(x)\cdot g(x)-LM| \leq |L||g(x)-M| + |M||f(x)-L| + |f(x)-L||g(x)-M|$$

$$\leq (|L|+1)|g(x)-M| + (|M|+1)|f(x)-L| + |f(x)-L||g(x)-M|$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \sqrt{\frac{\varepsilon}{3}}\cdot\sqrt{\frac{\varepsilon}{3}}$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3}$$

$$\leq \varepsilon$$

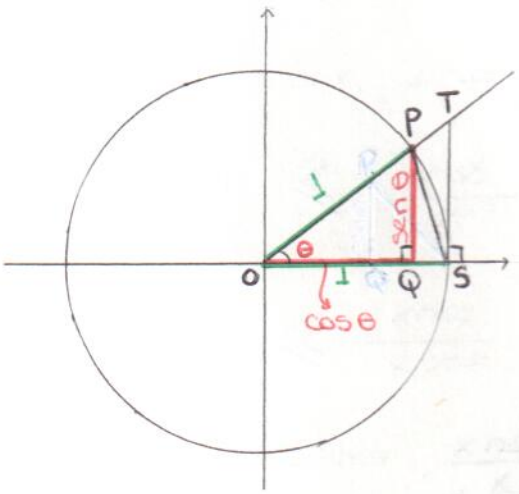
El resultado obtenido muestra que a medida que le damos a "x"

valores más cercanos a "a", $F(x).G(x)$ tiende a acercarse cada vez más a L.M, esto quiere decir que la definición de Límite se verifica y por lo tanto la tesis también se verifica.

EQUIVALENCIA DEL ARCO, EL SEN x Y TG x PARA $x \to 0$

Demostraremos ahora que cuando el ángulo $x \to 0$ el sen x y la tg x son infinitésimos equivalentes, es decir que pueden reemplazarse, el lím para $x \to 0$, del cociente de cada dos de ellos por 1 o sea:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1 \quad ; \quad \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1 \quad ; \quad \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{tg} x} = 1$$



$\theta = x$ (en radianes)

Demostraremos la equivalencia de sen x y x para $x \to 0$.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$$

En forma similar se demuestra para tg x y x.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1$$

Usaremos para ello el círculo trigonométrico indicando el ángulo x (arco PS) el sen x = PQ y la tangente x = TS.

En la figura vemos que la superficie del triángulo $\overset{\Delta}{OPS}$ es menor que la del sector circular $\overset{\frown}{OPS}$ y ésta a su vez es menor que la del triángulo $\overset{\Delta}{OST}$.

Será: $\text{Sup } \overset{\Delta}{OPS} < \text{Sup } \overset{\frown}{OPS} < \text{Sup } \overset{\Delta}{OST}$

Aplicando las fórmulas de superficie será:

$$\frac{OS \cdot PQ}{2} < \frac{OS \cdot PS}{2} < \frac{OS \cdot ST}{2}$$

$$PQ < PS < ST$$

o sea $\operatorname{sen} x < x < \operatorname{tg} x$ ①

dividiendo por $\operatorname{sen} x$

$$\frac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} x} < \frac{x}{\operatorname{sen} x} < \frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{sen} x}$$

o lo que es lo mismo:

$$1 < \frac{x}{\operatorname{sen} x} < \frac{1}{\cos x} \qquad \text{Pero si: } a<b \Leftrightarrow \frac{1}{a} > \frac{1}{b}$$

$$1 > \frac{\operatorname{sen} x}{x} > \cos x$$

Tomando el límite para $x \to 0$ tendremos:

$$\lim_{x\to 0} 1 \geq \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} \geq \lim_{x\to 0} \frac{1}{\cos x}$$

$$1 \geq \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} \geq 1$$

Luego la función $\frac{\operatorname{sen} x}{x}$ está comprendida entre otras dos funciones que tienen límite 1 (uno) para $x \to 0$, luego su límite será también 1 (uno) para $x \to 0$ por el Teorema del emparedado:

$$\therefore \boxed{\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1} \quad \text{ó también} \quad \boxed{\lim_{x\to 0} \frac{x}{\operatorname{sen} x} = 1}$$

Quedando demostrado qué $\operatorname{sen} x$ y x son infinitésimos equivalentes.

De ① $\operatorname{sen} x < x < \operatorname{tg} x$ dividiendo por $\operatorname{tg} x$

$$\frac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{tg} x} < \frac{x}{\operatorname{tg} x} < \frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} x}$$

$$\cos x < \frac{x}{\operatorname{tg} x} < 1$$

$$\frac{1}{\cos x} > \frac{\operatorname{tg} x}{x} > 1 \qquad \text{Tomando límite para } x \to 0$$

$$\operatorname{Lím}_{x\to 0} \frac{1}{\cos x} \geq \operatorname{Lím}_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} \geq \operatorname{Lím}_{x\to 0} 1$$

$$1 \geq \operatorname{Lím}_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} \geq 1$$

Luego la función $\operatorname{tg} x / x$ está comprendida entre otras dos funciones que tienen límite uno para $x \to 0$, luego su límite será 1 para $x \to 0$ por el Teorema del emparedado.

Teorema: Derivabilidad implica continuidad

Hipótesis: $f(x)$ es continua en todo punto donde tenga una derivada

Tesis: Si f es derivable en $x=c \Rightarrow f$ es continua en $x=c$

Demostración: Como $\exists f'(c)$ se demuestra que el $\lim_{x\to c} f(c) = f(c)$ o equivalentemente que $\lim_{h\to 0} f(c+h) = f(c)$. Si $h \neq 0$ entonces:

$$f(c+h) = f(c) + [f(c+h) - f(c)]$$ se suma y se resta $f(c)$ para mantener la igualdad.

$$f(c+h) = f(c) + \frac{[f(c+h)-f(c)]}{h}.h$$ se multiplica y divide por h

$$\lim_{h\to 0} f(c+h) = \lim_{h\to 0} f(c) + \lim_{h\to 0} \frac{f(c+h)-f(c)}{h} \cdot \lim_{h\to 0} h$$ aplicando límite para $h\to 0$

$$\lim_{h\to 0} f(c+h) = f(c) + f'(c).0$$

$$\boxed{\lim_{h\to 0} f(c+h) = f(c)}$$

Derivabilidad implica continuidad $\Leftrightarrow$ si una función es derivable entonces es continua

$$(\exists f'(a)) \Rightarrow \left(\lim_{x\to a} f(x) = f(a)\right)$$

Hipótesis — Tesis

$$f'(a) = \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$ Definición de derivada en un punto "a"

$$f'(a) = \frac{\lim_{x\to a} f(x)-f(a)}{\lim_{x\to a} (x-a)}$$ Aplicando la propiedad del cociente de los límites

$$\lim_{x\to a}(x-a).f'(a) = \lim_{x\to a}[f(x)-f(a)]$$ Pero $\lim_{x\to a}(x-a)$ es un infinitésimo

$$0.f'(a) = \lim_{x\to a}[f(x)-f(a)]$$ Aplicando la propiedad de la diferencia de los límites

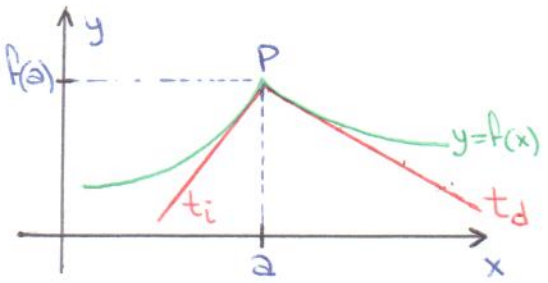
$$0 = \lim_{x\to a} f(x) - \lim_{x\to a} f(a)$$ Límite de una constante

$$\boxed{f(a) = \lim_{x\to a} f(x)}$$

Recíproco del Teorema "Derivabilidad implica Continuidad"

La implicación recíproca es FALSA ya que existen funciones continuas que NO son derivables. Ejemplos sencillos son aquellas funciones que presentan "puntos angulosos" o "puntos cuspidales".

$[\lim_{x \to a} f(x) = f(a)] \not\Rightarrow \exists f'(a) \iff$ Continuidad $\not\Rightarrow$ Derivabilidad

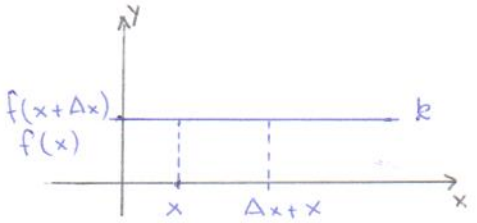


P es un "punto anguloso o cuspidal" de la función continua $y=f(x)$. Existen dos tangentes laterales distintas: t_i y t_d, lo que significa que no hay tangente única ni pendiente de ésta, es decir, que no hay allí derivada.

DERIVADAS

① De una constante (k) $y = k$

$$D\begin{cases} \Delta x = (\Delta x + x) - x \\ \Delta y = f(x+\Delta x) - f(x) \\ \text{pero: } f(x+\Delta x) = f(x) \end{cases}$$



$$f(k) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(\Delta x + x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$= \frac{0}{\Delta x} \Rightarrow \lim_{\Delta x \to 0} 0 = 0$$

$$\boxed{f'(k) = 0}$$

---

② De la función $y = x$

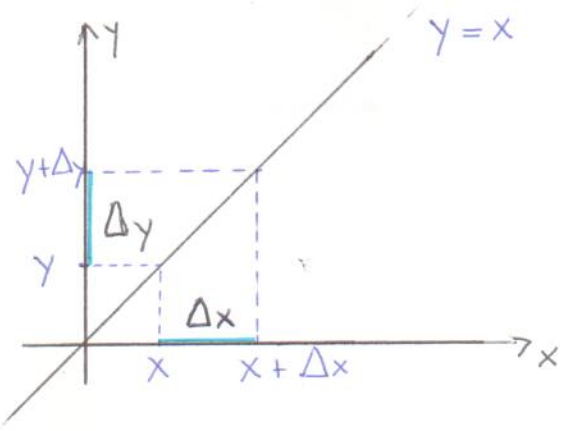
$$y = x \Rightarrow (y + \Delta y) - y = (x + \Delta x) - x$$

$$\Delta y = x + \Delta x - x - y + y$$

$$\boxed{\Delta y = \Delta x}$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} 1 = 1$$

$$\boxed{f'(x) = 1}$$



③ De la suma de funciones

Si la función "y" es suma de dos funciones de x, es decir:

$$y = u(x) + v(x) \quad (1)$$

Si se da a "x" (variable independiente) un incremento Δx, u se incrementa en Δu y v se incrementa en Δv.

$y + \Delta y = (u + \Delta u) + (v + \Delta v)$ Despejamos Δy:

$\Delta y = u + \Delta u + v + \Delta v - y$ (pero de (1) se deduce que: $y = u+v \Rightarrow -y = -u - v$)

$\Delta y = \cancel{u} + \Delta u + \cancel{v} + \Delta v \cancel{-u} \cancel{-v}$

$\Delta y = \Delta u + \Delta v$ Dividiendo ambos miembros por Δx:

$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\Delta v}{\Delta x}$ Aplicando límite:

$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\Delta v}{\Delta x} \right)$ Aplicando límite de la suma (que es igual a la suma de los límites)

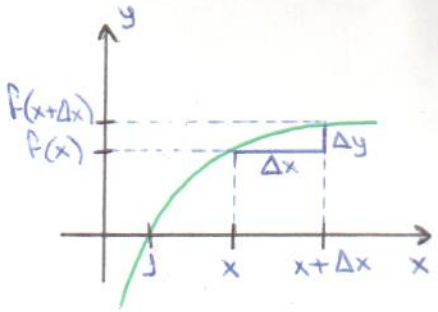
$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x}$

$$\boxed{y' = u' + v'}$$

"La derivada de la suma (o diferencia) de funciones es igual a la suma (o diferencia) de las derivadas de las mismas".

(4) Del logaritmo natural (ln)

$y = \ln x$ Si se da a "x" un incremento Δx :



$y + \Delta y = \ln(x + \Delta x)$ Despejando Δy :

$\Delta y = \ln(x + \Delta x) - y$ (pero $y = \ln x$)

$\Delta y = \ln(x + \Delta x) - \ln x$

$\Delta y = \ln\left(\frac{x + \Delta x}{x}\right)$ Propiedad distributiva de la división respecto de la suma

$\Delta y = \ln\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)$ Dividir ambos miembros por Δx

$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{\Delta x} \ln\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)$ Aplicación de artificio matemático

$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{x}{\Delta x} \cdot \frac{1}{x} \cdot \ln\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)$

$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{x} \ln\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^{x/\Delta x}$ Haciendo un cambio de variable

$\frac{\Delta x}{x} = \frac{1}{n} \Rightarrow n = \frac{x}{\Delta x}$

$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{x} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n}$ Si $\Delta x \to 0$: $\frac{x}{\Delta x} \to \infty$ y $n \to \infty$

Aplicando límite será:

$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{1}{x} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n}\right]$ Aplicando límite del producto de funciones

$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{x} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \left[\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n}\right]$ Aplicando:

1. Límite de una cte
2. Límite del logaritmo
3. Ln es función continua

$f'(x) = \frac{1}{x} \ln \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n}$

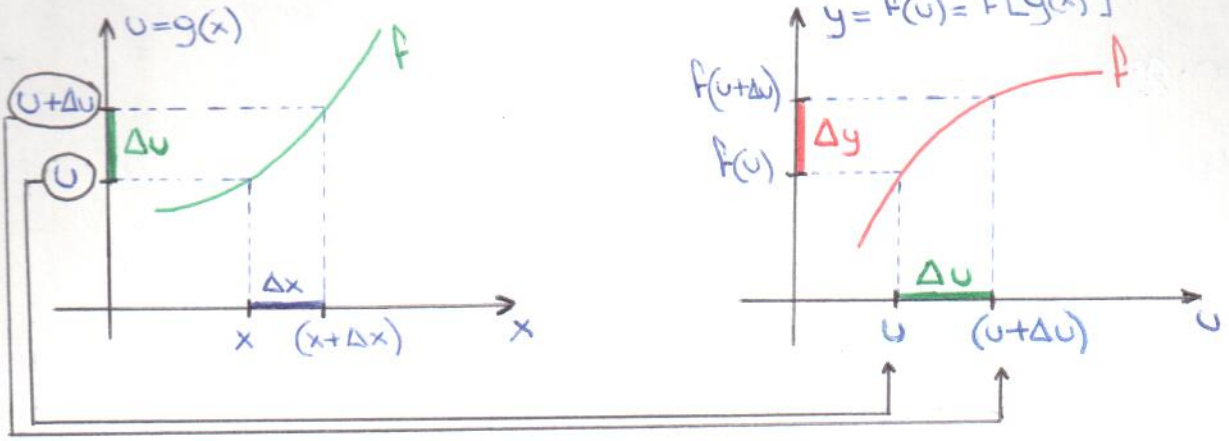
$f'(x) = \frac{1}{x} \ln e$

$$\boxed{f'(x) = \frac{1}{x}}$$

(5) De la función compuesta

$y = f[g(x)]$ siendo $u = g(x)$

Si x toma un incremento Δx, la función u se incrementa en Δu y la función se incrementa en Δy.



$$y + \Delta y = f(u + \Delta u)$$

$$\Delta y = f(u + \Delta u) - f(u)$$

Dividiendo ambos miembros por Δx:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(u+\Delta u) - f(u)}{\Delta x}$$

Pero para calcular la derivada necesitamos un mismo cociente incremental, por ello se multiplica y divide por Δu y así se relacionan los incrementos correspondientes.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(u+\Delta u) - f(u)}{\Delta x} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta u}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(u+\Delta u) - f(u)}{\Delta u} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x}$$

Aplicando límite (Como $\Delta x \to 0$ $\Delta u \to 0$ entonces son equivalentes)

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta u \to 0} \frac{f(u+\Delta u) - f(u)}{\Delta u} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x}$$

$$y' = f'(u) \cdot u'(x)$$

$$\boxed{y' = f'[g(x)] \cdot g'(x)}$$

"La derivada de una función compuesta es igual al producto de las derivadas de las funciones componentes con respecto a la variable de la cual dependen directamente; por eso este método se llama DERIVACIÓN EN CADENA" (se multiplica por la derivada de la función que está cada vez más adentro)

$$y = f\{g[h(x)]\}$$

$$y' = f'\{g[h(x)]\} \cdot g'[h(x)] \cdot h'(x)$$

Ejemplos numéricos:

$y = \ln(x^2 + 3)$ $\qquad$ $y = \ln[\operatorname{sen}(3x+2)]$

$y' = \frac{1}{x^2+3} \cdot 2x$ $\qquad$ $y = \frac{1}{\operatorname{sen} 3x+2} \cdot \cos(3x+2) \cdot 3$

(6) Del producto de funciones:

$y = u.v$ Aplico logaritmo natural en ambos miembros.

$\ln y = \ln(u.v) = \ln u + \ln v$ Derivada de la función compuesta y del logaritmo.

$\frac{1}{y} \cdot y' = \frac{1}{u} \cdot u' + \frac{1}{v} \cdot v'$ Despejamos y'

$y' = \left(\frac{u'}{u} + \frac{v'}{v}\right) \cdot y$ Reemplazo y por $u.v$

$y' = \left(\frac{u'}{u} + \frac{v'}{v}\right) \cdot (uv)$ Aplico distributiva del producto con respecto a la suma.

$y' = \left(\frac{u'}{\not{u}}\right)(\not{u}v) + \left(\frac{v'}{\not{v}}\right)(u\not{v})$ Simplificando

$$\boxed{y' = u'.v + v'.u}$$

La derivada de un producto de funciones es igual a la suma de los productos de la derivada de cada función por la otra sin derivar.

Caso particular:

$y = k.f(x)$ Aplico logaritmo natural en ambos miembros.

$\ln y = \ln[k.f(x)]$ Logaritmo de un producto

$\ln y = \ln k + \ln f(x)$ Derivamos en ambos miembros.

$\frac{1}{y} \cdot y' = \frac{1}{k} \cdot 0 + \frac{1}{f(x)} \cdot f'(x)$ Despejamos y'

$y' = \frac{f'(x)}{f(x)} \cdot y$ Reemplazamos y por $k.f(x)$

$y' = \frac{f'(x)}{\not{f(x)}} \cdot k.\not{f(x)} \Longrightarrow \boxed{y' = k\,f'(x)}$

La derivada del producto de una constante por una función es igual a la constante por la derivada de la función.

Derivada del producto de funciones

$$y = u(x) \cdot v(x)$$

$$\frac{d(u.v)}{dx} = \lim_{h \to 0} \frac{u(x+h)v(x+h) - u(x)v(x)}{h}$$

$$y' = \lim_{h \to 0} \frac{u(x+h)\,v(x+h) - u(x+h)\,v(x) + u(x+h)v(x) - u(x)v(x)}{h}$$

$$y' = \lim_{h \to 0} \frac{u(x+h)\,[v(x+h) - v(x)] + v(x)\,[u(x+h) - u(x)]}{h}$$

$$y' = \lim_{h \to 0} \left[u(x+h)\,\frac{v(x+h) - v(x)}{h} + v(x)\,\frac{u(x+h) - u(x)}{h} \right]$$

$$y' = \lim_{h \to 0} \left[u(x+h)\,\frac{v(x+h) - v(x)}{h} \right] + \lim_{h \to 0} \left[v(x)\,\frac{u(x+h) - u(x)}{h} \right]$$

$$y' = \lim_{h \to 0} u(x+h) \cdot \lim_{h \to 0} \frac{v(x+h) - v(x)}{h} + \lim_{h \to 0} v(x) \cdot \lim_{h \to 0} \frac{u(x+h) - v(x)}{h}$$

$$\boxed{y' = u(x) \cdot v'(x) + v(x) \cdot u'(x)}$$

(7) De la función Potencial.

$y = x^m \quad \forall x \in \mathbb{Q}$

$\ln y = m \ln x$ aplicando ln en ambos miembros.

$\frac{1}{y} \cdot y' = m \cdot \frac{1}{x}$ Derivamos Miembro a Miembro.

$y' = \frac{m}{x} \cdot y$ Despejamos y'.

$y' = \frac{m}{x} \cdot x^m$ Reemplazamos "y" por su equivalente $y = x^m$

$y' = m \cdot x^m \cdot x^{-1}$ Aplicamos Propiedades de Producto de Potencia de igual base.

$$\boxed{y' = mx^{m-1}}$$

(8) De un cociente de funciones:

$$y = \frac{f(x)}{g(x)} \Rightarrow \begin{matrix} f(x) = U \\ g(x) = V \end{matrix}$$

$$y = \frac{U}{V}$$

$\ln y = \ln\left(\frac{U}{V}\right)$ Aplicamos ln en ambos miembros y logaritmo de un cociente

$\ln y = \ln U - \ln V$ Derivamos miembro a miembro

$$\frac{1}{y} \cdot y' = \frac{1}{U} \cdot U' - \frac{1}{V} \cdot V'$$

$y' = \left(\frac{U'}{U} - \frac{V'}{V}\right) \cdot y$ Despejamos y', reemplazamos "y" por su equivalente $y = \frac{U}{V}$

$y' = \left(\frac{U'}{U} - \frac{V'}{V}\right) \frac{U}{V}$ Aplicamos distributiva.

$y' = \left(\frac{U'}{\cancel{U}}\right) \cdot \frac{\cancel{U}}{V} - \left(\frac{V'}{V}\right) \cdot \frac{U}{V}$ Simplificamos

$y' = \frac{U'}{V} - \frac{V' \cdot U}{V^2}$ Sacamos denominador común V^2

$$\boxed{y' = \frac{U' \cdot V - V' \cdot U}{V^2}}$$

* Como caso particular la derivada de el cociente de una funcion y de una constante, es igual a la derivada por la constante.

$$y = \frac{f(x)}{k}$$

$$\ln y = \ln\left(\frac{f(x)}{k}\right)$$

$$\ln y = \ln f(x) - \ln k$$

$$\frac{1}{y} \cdot y' = \frac{1}{f(x)} \cdot f'(x) - \frac{1}{k} \cdot 0$$

$$y' = \left(\frac{f'(x)}{f(x)}\right) \cdot y$$

$$y' = \frac{f'(x)}{\cancel{f(x)}} \cdot \frac{\cancel{f(x)}}{k}$$

$$\boxed{y' = \frac{f'(x)}{k}}$$

(9) De la función exponencial

$y = e^x$

$\ln y = \ln e^x$

$\ln y = x \ln e$ Derivando respecto a x:

$\frac{1}{y} y' = 1$ Despejando y'

$y' = y$

$\boxed{y' = e^x}$

$y = a^x$

$\ln y = \ln a^x$

$\ln y = x \ln a$

$\frac{1}{y} y' = \ln a$

$y' = \ln a \cdot y$

$\boxed{y' = a^x \ln a}$

$y = e^u$

$\ln y = \ln e^u$

$\ln y = u \ln e$

$\frac{1}{y} y' = u'$

$y' = u' \cdot y$

$\boxed{y' = e^u \cdot u'}$

$y = u^n$ $(n = k)$

$\ln y = \ln u^n$

$\ln y = n \ln u$

$\frac{1}{y} y' = n \frac{1}{u} u'$

$y' = n \frac{u'}{u} y$

$y' = n \frac{u'}{u} u^n$

$y' = n u' (u^{-1} \cdot u^n)$

$\boxed{y' = n u^{n-1} u'}$

$y = x^x$

$\ln y = \ln x^x$

$\ln y = x \ln x$

$\frac{1}{y} y' = \ln x + \frac{1}{x} x$

$y' = (\ln x + 1) y$

$\boxed{y' = x^x (\ln x + 1)}$

Derivada de las funciones Trigonométricas:

13 De la función Seno

$$y = \operatorname{sen} x$$

$$y + \Delta y = \operatorname{sen}(x + \Delta x)$$

$$\Delta y = \operatorname{sen}(x + \Delta x) - \operatorname{sen} x$$

$$\Delta y = 2 \operatorname{sen} \frac{\cancel{x} + \Delta x + \cancel{x}}{2} \cdot \cos \frac{x + \Delta x + x}{2}$$

$$\Delta y = 2 \operatorname{sen}\left(\frac{\Delta x}{2}\right) \cdot \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2 \operatorname{sen}\left(\frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x} \cdot \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\operatorname{sen} \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \cdot \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)$$

$$\operatorname{sen}(\alpha + \beta) = \operatorname{sen}\alpha \cdot \cos\beta + \operatorname{sen}\beta \cdot \cos\alpha$$

$$\operatorname{sen}(\alpha + \beta) = \operatorname{sen}\alpha \cos\beta - \operatorname{sen}\beta \cdot \cos\alpha$$

$$\operatorname{sen}(\alpha + \beta) - \operatorname{sen}(\alpha - \beta) = 2 \operatorname{sen}\beta \cos\alpha$$

$$\begin{array}{ll} \alpha + \beta = p & \alpha + \beta = p \\ + & - \\ \alpha - \beta = q & \alpha + \beta = q \\ 2\alpha = p + q & 2\beta - p - q \\ \alpha = \frac{p+q}{2} & \beta = \frac{p-q}{2} \end{array}$$

$$\boxed{\operatorname{sen} p - \operatorname{sen} q = 2 \operatorname{sen} \frac{p-q}{2} \cos \frac{p+q}{2}}$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\frac{\Delta x}{2} \to 0} \frac{\overset{\overset{1}{\uparrow}}{\operatorname{sen} \frac{\Delta x}{2}}}{\frac{\Delta x}{2}} \cdot \lim_{\frac{\Delta x}{2} \to 0} \cos\left(x + \underbrace{\frac{\Delta x}{2}}_{0}\right)$$

$$\boxed{y' = \cos x}$$

Del coseno

$$y = \cos x$$

$$y + \Delta y = \cos(x + \Delta x)$$

$$\Delta y = \cos(x + \Delta x) - \cos x$$

$$\Delta y = -2 \operatorname{sen}\left(\frac{x + \Delta x + x}{2}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{x + \Delta x - x}{2}\right)$$

$$\Delta y = -2 \operatorname{sen}\left(\frac{2x + \Delta x}{2}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{\Delta x}{2}\right)$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-2 \operatorname{sen}(\Delta x/2)}{\Delta x} \operatorname{sen}\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-\operatorname{sen}(\Delta x/2)}{\Delta x/2} \operatorname{sen}\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x/2 \to 0} \left[\frac{-\operatorname{sen}(\Delta x/2)}{\Delta x/2} \cdot \operatorname{sen}\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)\right]$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x/2 \to 0} \frac{-\operatorname{sen}(\Delta x/2)}{\Delta x/2} \cdot \lim_{\Delta x/2 \to 0} \operatorname{sen}\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)$$

($\frac{-\operatorname{sen}(\Delta x/2)}{\Delta x/2} = 1$)

$$\boxed{y' = -\operatorname{sen} x}$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cos\beta - \operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\beta$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha \cos\beta + \operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\beta$$

$$\cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta) = -2 \operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\beta$$

$$\alpha + \beta = p$$
$$\alpha - \beta = q$$
$$2\alpha = p + q$$
$$\alpha = \frac{p+q}{2}$$

$$\alpha + \beta = p$$
$$\alpha - \beta = q$$
$$2\beta = p - q$$
$$\beta = \frac{p-q}{2}$$

$$\boxed{\cos p - \cos q = -2 \operatorname{sen}\frac{p+q}{2} \operatorname{sen}\frac{p+q}{2}}$$

(14) De la función coseno

$y = \cos x$ ó $y = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$

$y' = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right).(-1)$

$y' = -\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$

$$\boxed{y' = -\operatorname{sen} x}$$

---

(15) De la función tangente

$y = \operatorname{tg} x$

$y = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$ Aplicando derivada del cociente de funciones

$y' = \frac{\cos x \cdot \cos x - \operatorname{sen} x(-\operatorname{sen} x)}{\cos^2 x}$

$y' = \frac{\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x}$

$y' = \frac{1}{\cos^2 x}$

$$\boxed{y' = \sec^2 x}$$

(16) De la función cotangente:

$$y = ctg(x) = \frac{\cos(x)}{\operatorname{sen}(x)}$$

$$y' = \frac{-\operatorname{sen}^2(x) - \cos^2(x)}{\operatorname{sen}^2(x)}$$

$$y' = \frac{-[\operatorname{sen}^2(x) + \cos^2(x)]}{\operatorname{sen}^2(x)}$$

$$\boxed{y' = \frac{-1}{\operatorname{sen}^2(x)}}$$

(17) De la función secante:

$$y = \sec(x) = \frac{1}{\cos(x)}$$

$$y' = \frac{0 \cdot \cos(x) + \operatorname{sen}(x)}{\cos^2(x)} = \frac{\operatorname{sen}(x)}{\cos^2(x)}$$

$$\boxed{y' = \sec(x) \cdot tg(x)}$$

(18) De la función cosecante:

$$y = \operatorname{cosec}(x) = \frac{1}{\operatorname{sen}(x)}$$

$$y' = \frac{0 \cdot \operatorname{sen}(x) - \cos(x)}{\operatorname{sen}^2(x)} = \frac{-\cos(x)}{\operatorname{sen}^2(x)}$$

$$\boxed{y' = -\operatorname{cosec}(x) \cdot \operatorname{cotg}(x)}$$

TEOREMA DE ROLLE

Enunciado Si f es una función continua en el intervalo cerrado $[a,b]$, derivable e el intervalo abierto (a,b) y $f(a)=f(b)$, entonces existe un punto c interior al interva abierto (a,b) donde $f'(c)=0$

H) f es continua en $[a,b]$
f es derivable en (a,b)
$f(a)=f(b)$

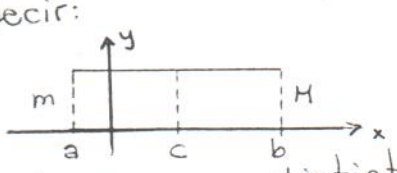
T) Existe $c \in (a,b) / f'(c)=0$

D) Al ser continua $[a,b]$, por la 3ª propiedad de funciones continuas en el inter lo cerrado, alcanza en dicho intervalo un máximo M y un mínimo m absolutos

Se presentan las siguientes situaciones:

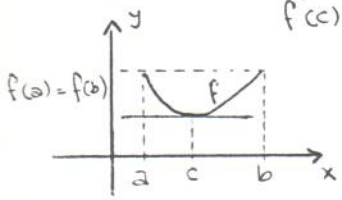
1) Si $m=M$, entonces f es constante en $[a,b]$; la derivada de una función con te es cero; luego para toda $x \in (a,b)$ es $f'(x)=0$ y la tesis se verifica par cualquier punto c interior al intervalo, es decir:

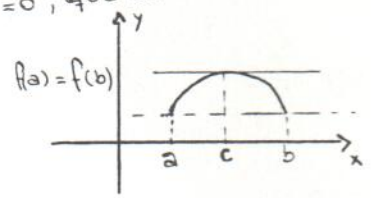
Para todo $c \in (a,b)$: $f'(c)=0$

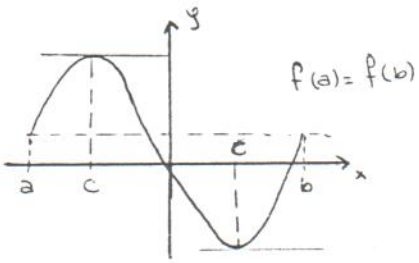


2) Si $m \neq M$, entonces uno de ellos, por lo menos es distinto de $f(a)=f(b)$ Por lo tanto, f alcanza dicho extremo absoluto en un punto c interior al int valo y $f(c)$ es al mismo tiempo, extremo absoluto y relativo. Como f es deriv ble por hipótesis en (a,b); resulta por la condición necesaria para la ex tencia de extremos relativos:

$f'(c)=0$, que es la tesis.







Interpretación Geométrica

Gráficamente quiere decir que existe por lo menos un punto $(c, f(c))$, con $c \in (a,b)$ de la curva f, en donde la recta Tangente a f es horizontal y paralela a la recta cante que pasa por los extremos de la curva, es decir, por $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$,

---

TEOREMA GENERALIZADO DEL VALOR MEDIO DEL CÁLCULO DIFERENCIAL O TEOREMA DE CAUCHY.

Enunciado: Si f y g son funciones continuas en el intervalo cerrado $[a,b]$, rivables en el intervalo abierto (a,b) y para todo x perteneciente al intervalo a to (a,b) es $g'(x) \neq 0$, entonces existe un punto interior al intervalo abier (a,b) tal que

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$$

H) f y g continuas en $[a,b]$

f y g derivables en (a,b)

Para todo $x \in (a,b)$: $g'(x) \neq 0$

T) Existe $c \in (a,b)$ / $\dfrac{f'(c)}{g'(c)} = \dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$

D) Consideremos una función auxiliar h definida de la siguiente forma

$$h(x) = [f(b)-f(a)] \cdot g(x) - [g(b)-g(a)] \cdot f(x) \quad (1)$$

nº real función nº real función

Vemos que

a) h es continua en $[a,b]$ por ser diferencia de funciones continuas en $[a,b]$ (f y g son continuas en $[a,b]$ por hipótesis.)

b) h es derivable en (a,b) por ser diferencia de funciones derivables en (a,b) (f y g son derivables en (a,b) por hipótesis).

c) Reemplazando x por a en (1), se tiene

$$h(a) = [f(b)-f(a)] \cdot g(a) - [g(b)-g(a)] \cdot f(a) \quad (2)$$

Reemplazando x por b en (1) se tiene:

$$h(b) = [f(b)-f(a)] \cdot g(b) - [g(b)-g(a)] \cdot f(b) \quad (3)$$

Trabajando algebraicamente (2) y (3) se obtiene:

$$h(a) = h(b)$$

De a), b) y c), la función h cumple la hipótesis del Teorema de Rolle, por lo tanto, verifica su tesis, es decir:

$$\text{Existe } c \in (a,b) \ / \ h'(c) = 0$$

Derivando h se tiene:

$$h'(x) = [f(b)-f(a)] \cdot g'(x) - [g(b)-g(a)] \cdot f'(x)$$

Haciendo $x = c$

$$h'(c) = [f(b)-f(a)]\, g'(c) - [g(b)-g(a)]\, f'(c) = 0$$

Luego: $[f(b)-f(a)] \cdot g'(c) = [g(b)-g(a)] \cdot f'(c)$ (4)

Como $g'(c) \neq 0$ por hipótesis y $g(b)-g(a) \neq 0$ pues si $g(b)-g(a)=0$ sería $g(b)=g(a)$ y g cumpliría con el Teorema de Rolle y por lo tanto existiría $c \in (a,b) \ / \ g'(c)=0$, contra la hipótesis. Por consiguiente, puede escribirse (4) de la siguiente forma:

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$$

COROLARIO: TEOREMA DEL VALOR MEDIO DEL CALCULO DIFERENCIAL O TEOREMA DE LAGRANGE O DE LOS INCREMENTOS FINITOS

Enunciado: Si f es una función continua en el intervalo cerrado $[a,b]$ y derivable en el intervalo abierto (a,b), entonces existe un punto c interior a dicho intervalo donde la derivada en él es igual al cociente de los *incrementos* $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$

H) f es continua en $[a,b]$

f es derivable en (a,b)

T) Existe $c \in (a,b) \;/\; f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

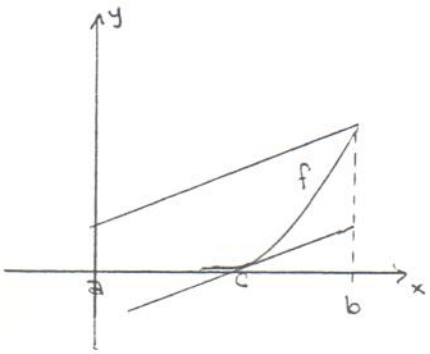
D Si en el teorema de Cauchy, g es la función identidad, entonces $g(a)=a$; $g(b)=b$; $g'(x)=1$ en particular $g'(c)=1$ para algún $c \in (a,b)$

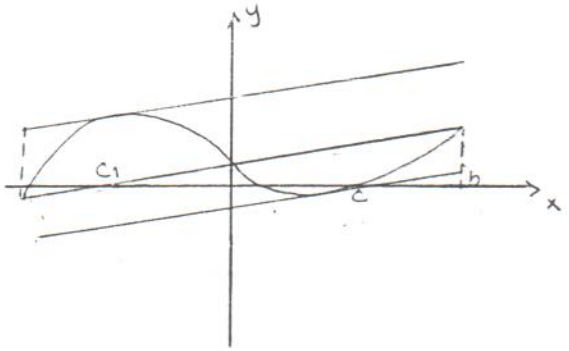
Luego: $\frac{f'(c)}{1} = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ para algún $c \in (a,b)$

Es decir: Existe $c \in (a,b) \;/\; f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

Interpretación Geométrica

Dada una curva suave (no angulosa, con tangente no vertical en todo punto comprendido entre los extremos de la mencionada curva), por lo menos existirá un punto de ella, distinto de sus extremos, en el que la tangente a la curva es paralela a la secante que pasa por sus extremos.





CONSECUENCIA DEL TEOREMA DE LAGRANGE

Primera consecuencia: Si una función tiene derivada nula en todos los puntos de un intervalo, entonces es la función constante en dicho intervalo.

Segunda consecuencia: Si dos funciones tienen la misma derivada en cada punto de un intervalo, entonces ambas funciones difieren en una constante.

Por ejemplo:

$$f(x) = \operatorname{sen} x \quad y \quad g(x) = 7 + \operatorname{sen} x$$

$$f'(x) = \cos x \quad y \quad g'(x) = \cos x$$

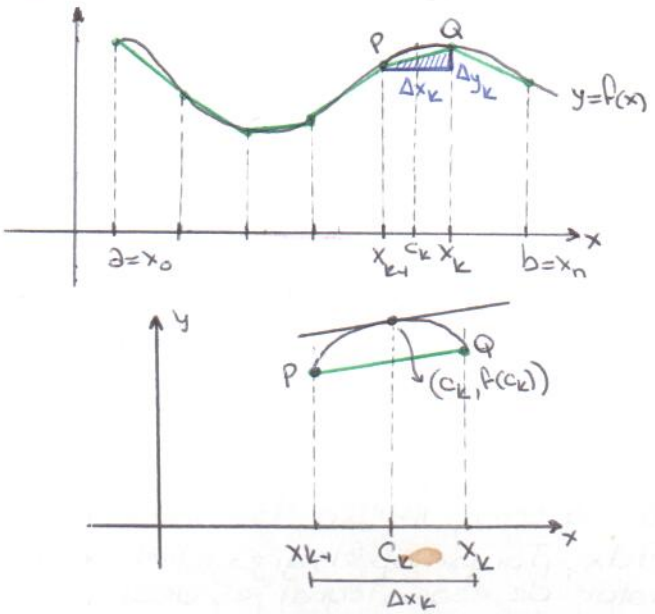
Es decir, $f' = g'$ pero f y g difieren en la constante 7

Longitud de curvas planas (o rectificación de curvas planas)

H- $f(x)$ continua en $[a,b]$ y derivable en (a,b)

T- $L=\int_a^b \sqrt{1+f'(x)^2}\,dx$

D- Para hallar la longitud de la curva $y=f(x)$ desde $x=a$ hasta $x=b$, hacemos la partición, en forma usual, del intervalo $[a,b]$: $P: a=x_0<x_1<x_2<\dots<x_{n-1}<x_n=b$ y unimos o "conectamos" los puntos correspondientes en la curva mediante segmentos de recta, de manera tal que se forme una trayectoria poligonal que aproxime a la curva.



La longitud de un segmento típico de recta PQ es, por Pitágoras:

$$L_k=\sqrt{(\Delta x_k)^2+(\Delta y_k)^2}$$

Para aproximar la longitud de la curva de $y=f(x)$ sumamos las longitudes de los "n" segmentos de recta que constituyen a la poligonal, es decir, que la longitud de la curva se aproxima por la suma:

$$L \cong \sum_{k=1}^{n} \sqrt{\Delta x_k^2+\Delta y_k^2} \quad (1)$$

La aproximación mejora, cuando la partición del intervalo $[a,b]$ se hace más fina.

La curva $y=f(x)$ es, por hipótesis, una curva suave ($f(x)$ es continua en $[a,b]$ y derivable en (a,b)), por teorema del valor medio de Lagrange, existe un punto $(c_k, f(c_k))$ perteneciente a la curva (donde c_k pertenece $[x_{k-1}, x_k]$) entre P y Q, en el cual la recta tangente es paralela al segmento de recta $\overline{PQ}$, entonces resulta:

$$f'(c_k)=\frac{\Delta y_k}{\Delta x_k} \quad \text{o también} \quad \Delta y_k = f'(c_k)\,\Delta x_k$$

Sustituyendo la expresión obtenida para Δy_k en (1) tenemos:

$$L \cong \sum_{k=1}^{n} \sqrt{\Delta x_k^2+[f'(c_k)\Delta x_k]^2} = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{\Delta x_k^2+f'(c_k)^2\,\Delta x_k^2} = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{\Delta x_k^2\,(1+f'(c_k))}$$

$$L \cong \sum_{k=1}^{n} \sqrt{1+f'(c_k)^2}\,\Delta x_k \quad \text{(suma de Riemann)}$$

Como $\sqrt{1+f'(x)}$ es continua en $[a,b]$, el límite de las sumas de la derecha, cuando la norma de la partición del intervalo $[a,b]$ tiende a cero, tienden al límite $\int_a^b \sqrt{1+f'(x)}\,dx$. Definimos entonces la longitud de la curva como el valor de esta integral:

$$L=\lim_{\|P\|\to 0} \sum_{k=1}^{n} \sqrt{1+f'(c_k)}\,\Delta x_k = \int_a^b \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx = \boxed{\int_a^b \sqrt{1+f'(x)^2}\,dx} \quad (I)$$

En el caso en que $\frac{dy}{dx}$ no esté definido y sí lo esté $\frac{dx}{dy}$, para hallar la longitud de curva se debe expresar o despejar x en función de y. De esta manera se podrá obtener la longitud de la curva aplicando la forma análoga de la ecuación (I):

$$L=\int_a^b \sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\,dy = \int_a^b \sqrt{1+f'(y)^2}\,dy$$

Área entre curvas

H_ $f(x)$ y $g(x)$ funciones continuas arbitrarias en $[a,b]$
$f(x) \geq g(x)$ a lo largo de $[a,b]$

T_ $A = \int_a^b [f(x)-g(x)]\,dx$

D_ Para hallar el área de la región acotada por arriba, por la curva $y=f(x)$, por abajo por la curva $y=g(x)$ y por la izquierda y por la derecha por las rectas $x=a$ y $x=b$ respectivamente, aproximamos la misma dividiéndola en "n" rectángulos verticales con base en la partición P: $a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_{n-1}<x_n=b$ de $[a,b]$.
El k-ésimo rectángulo tiene un área:

A_k = base . altura
$A_k = \Delta x_k \,.\, [f(c_k)-g(c_k)]$
$A_k = [f(c_k)-g(c_k)]\,\Delta x_k$

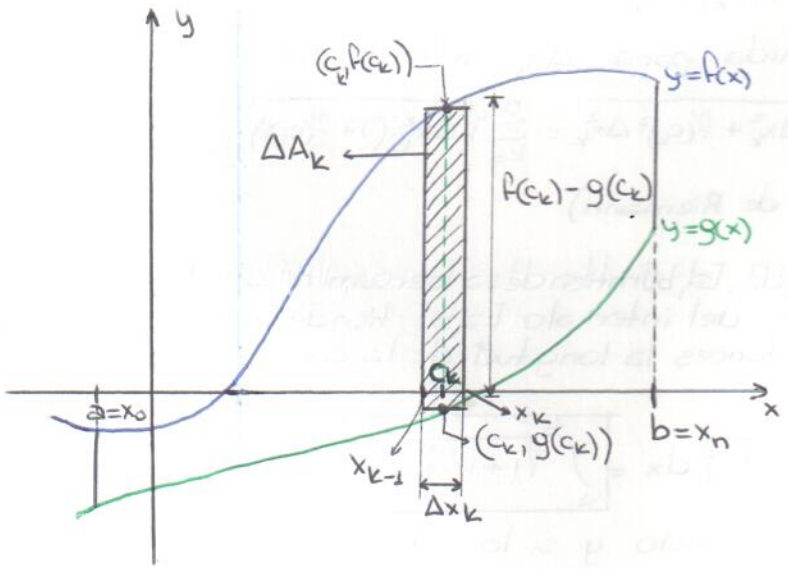
Para aproximar el área de la región sumamos las áreas de los "n" rectángulos verticales con base en la partición P del intervalo $[a,b]$:

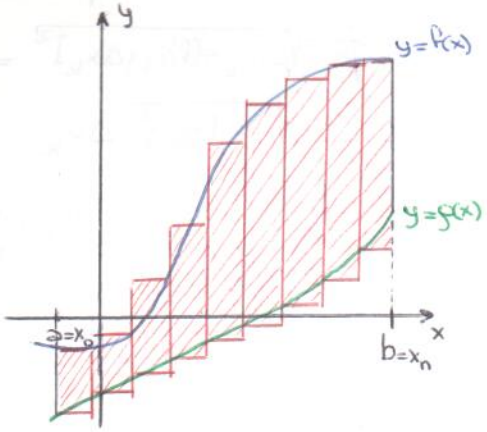
$$A \approx \sum_{k=1}^{n} \Delta A_k = \sum_{k=1}^{n} [f(c_k)-g(c_k)]\,\Delta x_k \quad \text{(suma de Riemann)}$$

Cuando la norma de la partición tiende a cero, $\|P\| \to 0$, las sumas de la derecha tienden al límite $\int_a^b [f(x)-g(x)]\,dx$, porque $y=f(x)$ y $y=g(x)$ son continuas. Tomamos el área de la región como el valor de esa integral, es decir:

$$A = \lim_{\|P\|\to 0} \sum_{k=1}^{n} [f(c_k)-g(c_k)]\,\Delta x_k = \int_a^b [f(x)-g(x)]\,dx$$

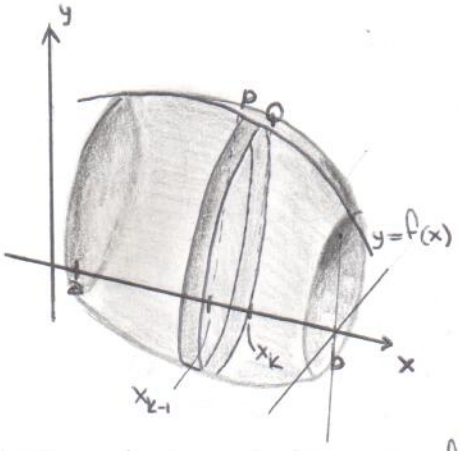
con lo cual queda demostrado que se verifica la tesis.

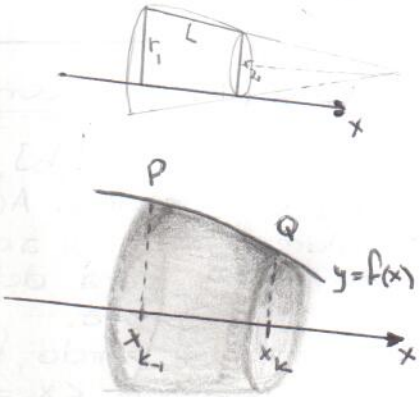


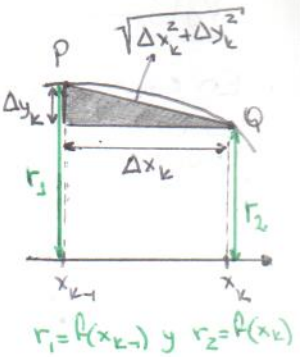


Área de la superficie de revolución

Cuando saltamos una cuerda, esta barre a nuestro alrededor una superficie. A dicha superficie se la denomina "superficie de revolución". El área de la superficie de revolución depende de la longitud de la cuerda y de la distancia existente entre sus extremos.







$r_1 = f(x_{k-1})$ y $r_2 = f(x_k)$

Para hallar el área de la superficie barrida al girar la gráfica de una función no negativa $y=f(x)$, $a \leq x \leq b$, alrededor del eje x, hacemos la partición usual del intervalo $[a,b]$: $P: a=x_0<x_1<\dots<x_{n-1}<x_n$ y empleamos los puntos de la partición para dividir a la gráfica de la función en pequeños arcos.
A medida que el arco PQ gira alrededor del eje x, el segmento de recto que une P y Q barre parte de un cono cuyo eje coincide con el eje x.
Esa parte del cono recibe el nombre de "tronco del cono". El área de la superficie del tronco barrida por $\overline{PQ}$ es aproximadamente igual al área de la superficie de la banda barrida por el arco PQ al girar alrededor del eje x.
El área de la sup. del tronco se calcula como: 2π veces el promedio de los radios de la base por la altura oblicua, es decir:

Área de la superficie del tronco del cono: $2\pi\left(\frac{r_1+r_2}{2}\right)L = \pi(r_1+r_2).L$

El área de la superficie del tronco barrida por el segmento de recta $\overline{PQ}$ resulta:

Área de la superficie del tronco del cono: $A_k = [f(x_{k-1})+f(x_k)].\sqrt{\Delta x_k^2+\Delta y_k^2}$

El área de la superficie original, siendo la suma de las áreas de las superficies de las bandas barridas por arcos como el PQ, es aproximadamente igual a la suma de las áreas de la superficies de los "n" troncos resultantes al efectuar la partición de $[a,b]$:

$$A \cong \sum_{k=1}^{n} \pi\,[f(x_{k-1})+f(x_k)]\sqrt{\Delta x_k^2+\Delta y_k^2} \quad (1)$$

La aproximación mejora cuando la norma de la partición de $[a,b]$ sea más fina.
La curva $y=f(x)$ es una curva suave (continua en $[a,b]$ y derivable en (a,b)), por teorema del valor medio de Lagrange, existe un punto $(c_k, f(c_k))$ perteneciente a la curva entre P y Q (c_k pertenece al intervalo $[x_{k-1}, x_k]$) en el cual la recta tangente a dicha curva es paralela al segmento de recta $\overline{PQ}$;

$$f'(c_k) = \frac{\Delta y_k}{\Delta x_k} \quad \text{o también} \quad \Delta y_k = f'(c_k)\,\Delta x_k$$

Sustituyendo la equivalencia obtenida para Δy_k en (1) resulta:

$$A \cong \sum_{k=1}^{n} \pi\,[f(x_{k-1})+f(x_k)]\sqrt{\Delta x_k^2+(f'(c_k)\,\Delta x_k)^2} = \sum_{k=1}^{n} \pi\,[f(x_{k-1})+f(x_k)]\sqrt{1+f'(c_k)^2}\,\Delta x_k \quad (2)$$

Pero la expresión (2) no es una suma de Riemann, porque los puntos x_{k-1}, x_k y c_k no son iguales y no hay forma de lograr que lo sean. Para solucionarlo, aplicamos un teorema

avanzado del cálculo denominado "Teorema de Bliss" que asegura que cuando la norma de la partición tiende a cero, las sumas de ② convergen a:

$$A = \lim_{\|P\|\to 0} \sum_{k=1}^{n} \pi [f(x_{k-1}) + f(x_k)] \sqrt{1 + f'^2(c_k)}\, \Delta x_k = \int_a^b 2\pi f(x) \sqrt{1 + f'^2(x)}\, dx.$$

(con lo cual queda demostrado que la tesis se verifica).

Volumen de sólidos de sección conocida: "Volumen por rebanadas"

En cada punto x del intervalo $[a,b]$, la sección transversal típica del sólido es una región $R(x)$ con un área $A(x)$. Esto hace que el área A sea una función de x de valores reales. Si además la función, es una función continua en 'x' podemos emplearla para definir y calcular el volúmen del sólido como una integral indefinida.

Para hallar el volúmen del sólido, hacemos la partición usual del intervalo $[a,b]$, $P: a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$ y rebanamos el sólido mediante planos trazados perpendicularmente al eje x en los puntos de la partición. La k-ésima rebanada ubicada entre los planos x_{k-1} y x_k tiene un volúmen aproximadamente igual al volúmen de un cilindro ubicado entre dichos planos, cuya base está ubicada en la región $R(x_k)$

El volúmen de tal cilindro es:

V_k = (área de la rebanada) . (distancia entre los planos x_{k-1} y x_k)

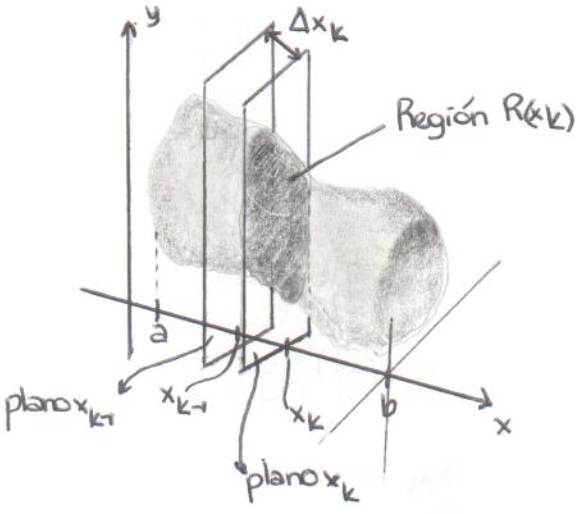
$$V_k = A(x_k) \cdot \Delta x_k$$

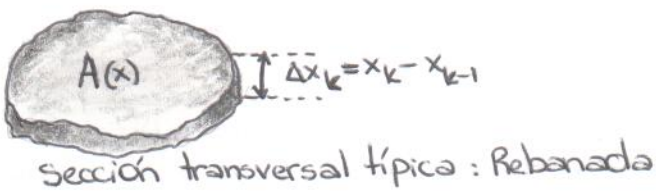
Para aproximar el volúmen del sólido original sumamos los volúmenes de los "n" cilindros considerados al realizar la partición del intervalo $[a,b]$, cuyas bases se encuentran ubicadas en la región $R(x_k)$:

$$V \cong \sum_{k=1}^{n} \Delta A_k = \sum_{k=1}^{n} A(x_k)\, \Delta x_k \quad \text{(suma de Riemann)}$$

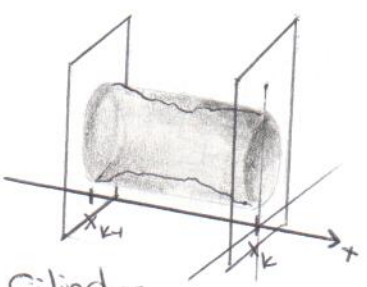
Cuando la norma de la partición del intervalo $[a,b]$ tiende a cero, $\|P\| \to 0$, la cantidad de cilindros considerados tiende a infinito, y las sumas de la derecha tienden al límite $\int_a^b A(x)\,dx$. Definimos el volúmen del sólido como el valor de esa integral:

$$V = \lim_{\|P\|\to 0} \sum_{k=1}^{n} A(x_k)\, \Delta x_k = \int_a^b A(x).dx$$





Sección transversal típica : Rebanada



Cilindro de aproximación con base en $R(x_k)$

Discos

Se emplean cuando la región plana que gira para generar el sólido de revolución, está comprendida entre una función continua $y=R(x)$, $a \leq x \leq b$, y un eje, siendo tal eje, el eje de rotación. La sección transversal típica del sólido, la cual es perpendicular al eje de rotación, es un disco.

Para hallar el volumen del sólido realizamos la partición usual del intervalo $[a,b]$. El sólido queda dividido en "n" discos perpendiculares al eje de rotación. Las dimensiones del k-ésimo disco ubicado en el intervalo $[x_{k-1}, x_k]$ son:

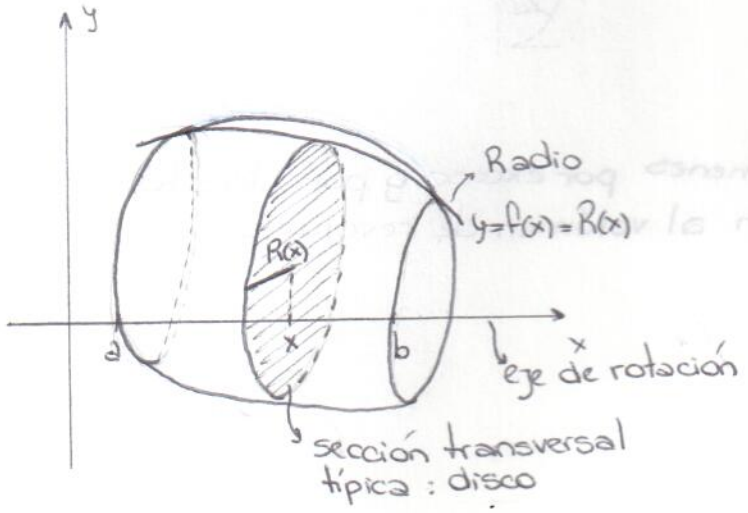
$$A_k = \pi r^2$$
$$A_k = \pi R(x)^2$$

Para aproximar el volumen del sólido original sumamos las áreas de los "n" discos:

$$V \approx \sum_{k=1}^{n} A_k = \sum_{k=1}^{n} \pi [R(x)]^2 \qquad \text{(suma de Riemann)}$$

Cuando la norma de la partición del intervalo $[a,b]$ tiende a cero, $\|P\| \to 0$, las sumas de la derecha tienden al límite $\int_a^b \pi f(x)^2 dx$. Definimos el volumen del sólido como la integral del área:

$$V = \lim_{\|P\| \to 0} \sum_{k=1}^{n} \pi [R(x)]^2 = \int_a^b \pi [f^2(x)]\, dx$$



Arandelas

Si la región que giramos para formar el sólido no cruza o no toca al eje de rotación, el sólido tendrá un agujero. Las secciones transversales típicas perpendiculares al eje de rotación son arandelas en lugar de discos. Las dimensiones de una arandela típica típica son:

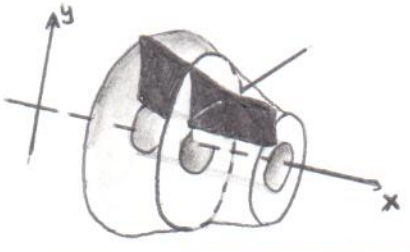
- radio externo : $R(x)$
- radio interno : $r(x)$

El área de una arandela típica es: $A(x) = \pi [R(x)]^2 - \pi [r(x)]^2$

$$A(x) = \pi [R(x)^2 - r(x)^2]$$

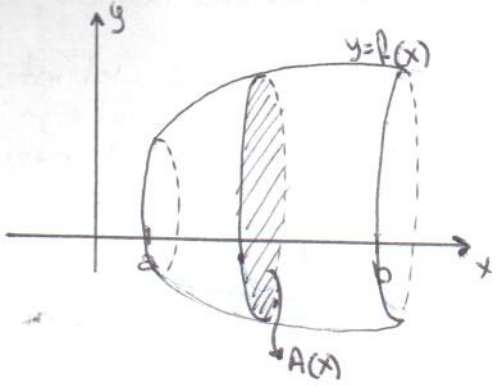
Para hallar el volúmen del sólido debemos integrar la función del área:

$$V = \int_a^b \pi [R^2(x) - r(x)^2]\, dx$$



Volúmen de sólidos de revolución

Un sólido de revolución es el generado por la rotación de una superficie alrededor de un eje.



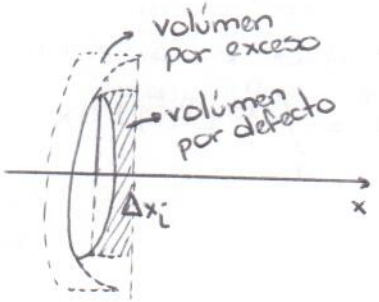
H- $f(x)$ contínua en $[a,b]$

$P: a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$

T- $V_r = \pi \int_a^b f^2(x)\,dx$

D- En el intervalo $[x_{i-1}; x_i]$

$\exists\, m_a \wedge \exists\, M_a$



$v_i = \pi m_i^2 \Delta x_i$

$V_i = \pi M_i^2 \Delta x_i$

$v_i < V_{r_i} < V_i$ (Los volúmenes por exceso y por defecto contienen al volúmen de revolución)

$$V_r = \lim_{\|P\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} V_{r_i}$$

$$V_r = \lim_{\|P\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} \pi f^2(x_i) \Delta x_i$$

$$\boxed{V_r = \pi \int_a^b f^2(x)\,dx}$$

Casquillos cilíndricos

Luego de hacer girar una curva alrededor del eje y para generar un sólido de revolución, podemos hallar su volumen, aproximando la región con rectángulos con base en una partición P del intervalo cerrado $[a,b]$ donde se encuentra la región.

El rectángulo típico de aproximación es Δx_k unidades de ancho por $f(c_k)$ unidades de altura, donde c_k es el punto medio de la base del rectángulo. El volumen de un casquillo barrido por un rectángulo es:

$$V_k = 2\pi \text{ (radio promedio del casquillo) (altura) (grosor)}$$

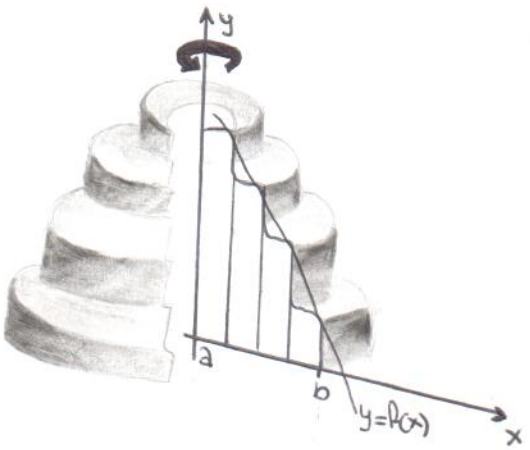
$$V_k = 2\pi \cdot c_k \cdot f(c_k)\, \Delta x_k$$

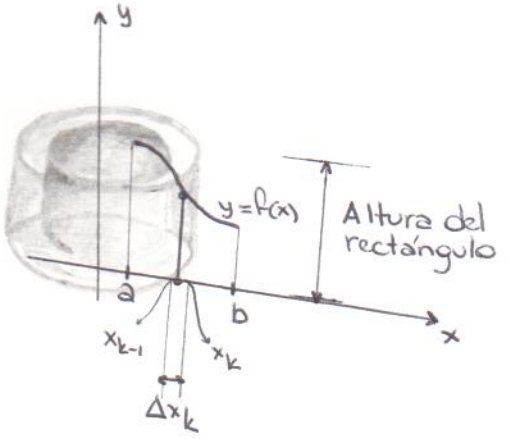
Para aproximar el volumen del sólido, sumamos los volumenes de los casquillos barridos por los "n" rectángulos con base en la partición P de $[a,b]$:

$$V \cong \sum_{k=1}^{n} \Delta V_k = \sum_{k=1}^{n} 2\pi \cdot c_k \cdot f(c_k) \cdot \Delta x_k \quad \text{(suma de Riemann)}$$

Cuando la norma de la partición tiende a cero, $\|P\| \to 0$, las sumas de la derecha tienden al límite $\int_a^b 2\pi x\, f(x)\, dx$. Definimos el volumen del sólido como el valor de esta integral:

$$V = \lim_{\|P\|\to 0} \sum_{k=1}^{n} 2\pi \cdot c_k \cdot f(c_k) \cdot \Delta x_k = \int_a^b 2\pi x\, f(x)\, dx$$

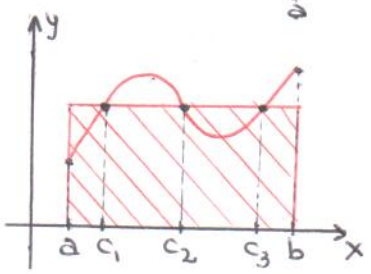


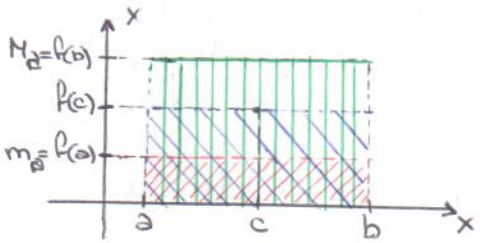


Teorema del valor medio

H- $f(x)$ continua en $[a,b]$ (o discontinua con salto finito)

T- $\exists\, c \in (a,b) / \int_a^b f(x)\,dx = f(c)(b-a) \iff f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$





- Área: $(b-a)\,M_a$
- Área: $(b-a)\,m_a$
- Área: $(b-a)\,f(x)$

D- $\exists m_a \wedge \exists M_a$ en $[a,b]$

- Tercera propiedad de las funciones continuas en un intervalo cerrado

$m_a \leq f(x) \leq M_a$ ①

$m_a(b-a) \leq f(x)(b-a) \leq M_a(b-a)$ ②

- Multiplico por $(b-a)$ (el sentido de la desigualdad no se altera)

① $\exists\, c /$ $f(c)$ corresponde a la imágen de un $c \in (a,b)$

② $m_a(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq M_a(b-a)$

$$\boxed{\exists\, c / \; f(c)(b-a) = \int_a^b f(x).dx}$$

Teorema de Barrow (o Newton-Leibniz) o Teorema Fundamental del cálculo integral

Parte I

Hipótesis: f es continua en $[a,b]$

$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ diferenciable o derivable en $[a,b]$

Tesis: $\frac{dF}{dx} = \frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = f(x)$, $\forall x \in [a,b]$; es decir $a \leq x \leq b$

Demostración: para iniciar la demostración aplicamos la definición de derivada directamente a $F(x)$, con lo que se obtiene:

$$\frac{dF}{dx} = F'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{F(x+h)-F(x)}{h}$$

Nuestro cociente incremental es: $\frac{F(x+h)-F(x)}{h}$ ①

Reemplazamos ahora al numerador del cociente incremental por los integrales que lo definen:

$$F(x+h) - F(x) = \int_a^{x+h} f(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt$$

Aplicando la regla de adición para integrales el segundo miembro de la expresión anterior resulta:

$$\int_x^{x+h} f(t)\,dt$$

Reemplazamos ahora el resultado obtenido en la expresión ①:

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \frac{1}{h}\left[F(x+h) - F(x)\right] = \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\,dt$$

De acuerdo con el Teorema del valor medio para integrales $\left(f(c) = \frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a}\right)$, el valor de la última expresión, es decir, el valor del cociente incremental es uno de los valores que toma f en el intervalo cuando se juntan x y $x+h$. Esto es, para algún número c en ese intervalo,

$$f(c) = \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\,dt$$

Ahora bien, ¿que ocurre a $(1/h)$ por el integral cuando $h\to 0$?
Cuando $h\to 0$, el extremo $x+h$ tiende al extremo x, moviendo también a "c":

Entonces, c tiende a x, y como f es continua en x, $f(c)$ tiende a $f(x)$.

$$\lim_{h\to 0} f(c) = f(x)$$

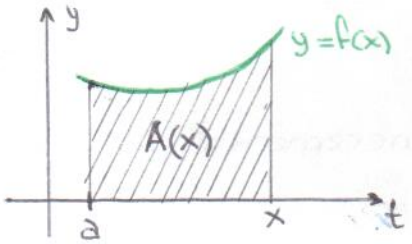
Volviendo al principio de la demostración:

$$\frac{dF}{dx} = F'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{F(x+h)-F(x)}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\,dt$$
$$= \lim_{h\to 0} f(c)$$
$$= f(x)$$

y por lo tanto $\boxed{F'(x)=f(x)}$, con lo cual se demuestra que la tesis se verifica.

Interpretación gráfica

Si los valores de f son positivos, la ecuación $\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = f(x)$ tiene una interpretación geométrica interesante. En este caso, la integral de f desde a hasta x es el área A(x) de la región entre la gráfica de f y el eje x desde a hasta x.



$$\int_a^x f(t)\,dt = A(x)$$

$$\int_x^{x+\Delta x} f(t)\,dt = \Delta A(x) \quad (1)$$ Aplicando Teorema del valor medio

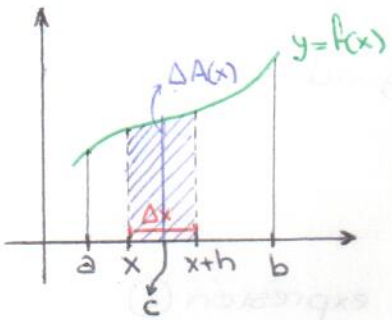
$$\int_x^{x+\Delta x} f(t)\,dt = f(c)\,\Delta x \quad (2)$$ Igualamos (1) y (2)

$$\Delta A(x) = f(c)\,\Delta x$$ Dividiendo por Δx:

$$\frac{\Delta A(x)}{\Delta x} = f(c)$$ Aplicando límite para $\Delta x \to 0$

$$\lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta A(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} f(c)$$

$$\boxed{A'(x) = f(x)}$$



$\Delta A(x)$: incremento de área

Parte II

Hipótesis: f es continua en $[a,b]$; F(x) es la antiderivada de f en $[a,b]$

Tesis: $\int_a^b f(x)\,dx = F(b)-F(a)$

Demostración: de acuerdo a una de las consecuencias del Teorema del valor medio de Lagrange, dos funciones que tienen iguales derivadas en todos los puntos de un intervalo, difieren en una constante. Si una de esas funciones es conocida y su derivada es igual a f, se tiene:

$G(x) = \int_a^x f(t)\,dt$

Si F es cualquier otra de esas funciones:

$F(x) = G(x) + C$, a través de $[a,b]$ para una constante.

Utilizamos la ecuación anterior para calcular $F(b)-F(a)$

$$F(b)-F(a) = [G(b)+C]-[G(a)+C]$$
$$= G(b)-G(a)$$
$$= \int_a^b f(t)\,dt - \int_a^a f(t)\,dt$$
$$= \int_a^b f(t)\,dt - 0 \Rightarrow \boxed{F(b)-F(a)=\int_a^b f(t)\,dt}$$

Condición necesaria para la convergencia de las series numéricas

Enunciado: "una condición necesaria para la convergencia de la serie $a_1+a_2+a_3+..+a_n+...$ es que el término general o enésimo tienda a cero cuando n tiende a infinito, es decir, $\lim_{n\to\infty} a_n=0$

Hipótesis: $\{S_n\}$ sucesión de sumas parciales de la serie dada y

$\{S_{n-1}\}$ convergentes

$\lim_{n\to\infty} S_n = S$ (único y finito)

$\lim_{n\to\infty} S_{n-1} = S$ (único y finito)

Tesis: $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

Demostración: sea $\{S_n\}$ la sucesión de sumas parciales p/ la serie dada, si esta es convergente se verifica entonces que su límite para n tendiendo a infinito, es único y finito, y además es igual a la suma. Es decir:

$\lim_{n\to\infty} S_n = S$ (finito) y además tenemos que:

$\lim_{n\to\infty} S_{n-1} = S$ (finito)

Como $a_n = S_n - S_{n-1}$, tendremos:

$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} S_n - \lim_{n\to\infty} S_{n-1}$ y de donde resulta que:

$\lim_{n\to\infty} a_n = S - S = 0$

Por lo tanto: $\boxed{\lim_{n\to\infty} a_n = 0}$ con lo que se verifica la tesis.

El teorema da sólo la condición necesaria para la convergencia de una serie, pero no la condición suficiente, pues existen series cuyo término enésimo o general tiende a cero y son divergentes:

$\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \not\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ convergente