UNCUYO
UNIVERSIDAD
NACIONAL DE CUYO

FCEN FACULTAD DE CIENCIAS
EXACTAS Y NATURALES
Naturaleza - Ciencia - Humanismo

DEMOSTRACIONES y MÉTODOS

Cálculo I

Límite

Límite de la Función identidad

Demostrar que $\lim_{x \to x_0} x = x_0$

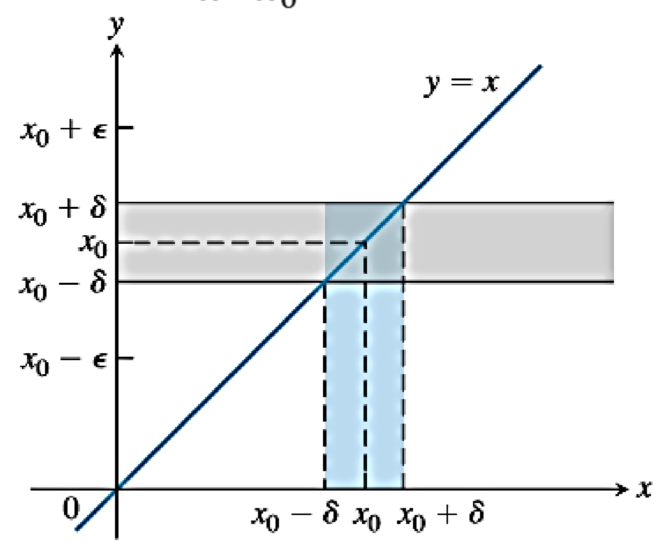
Sea $\epsilon > 0$ dado. Se debe encontrar $\delta > 0$ tal que para toda x (por definición de Límite):

$$0 < |x - x_0| < \delta, \text{ entonces } |f(x) - L| < \epsilon$$

pero ahora $f(x) = x$ y $L = y = x_0$, por lo tanto, se reemplaza y se obtiene:

$$|x - x_0| < \epsilon$$

Esta implicación se cumplirá si $\delta \leq \epsilon$. Esto prueba que: $\lim_{x \to x_0} x = x_0$



Límite de la Función constante

Demostrar que $\lim\limits_{x \to x_0} k = k$

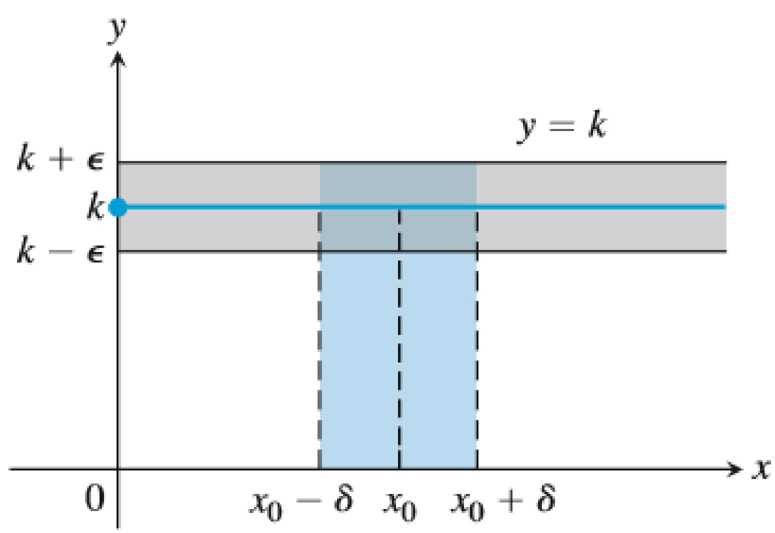
Sea $\epsilon > 0$ dado. Se debe encontrar $\delta > 0$ tal que para toda x (por definición de Límite):

$$0 < |x - x_0| < \delta, \text{ entonces } |f(x) - L| < \epsilon$$

pero ahora $f(x) = k$ y $L = k$, por lo tanto, se reemplaza y se obtiene:

$$|k - k| < \epsilon \Rightarrow \epsilon > 0 \Rightarrow \delta > 0$$

Como $k - k = 0$, se emplea cualquier número positivo δ y la implicación se cumplirá. Esto prueba que $\lim\limits_{x \to x_0} k = k$



Límite de una suma de funciones

El límite, para cierta tendencia, de la suma de dos funciones que tienen límite es igual a la suma de los respectivos límites de cada función para la misma tendencia. En símbolos:

Si $\lim_{x \to c} f(x) = L$ y $\lim_{x \to c} g(x) = G$, entonces:

$$\lim_{x \to c}[f(x) + g(x)] = L + G$$

Hipótesis: $\lim_{x \to c} f(x) = L$ y $\lim_{x \to c} g(x) = G$

Tesis: $\lim_{x \to c}[f(x) + g(x)] = L + G$

Demostración: de acuerdo con la definición de límite, para los límites de la hipótesis se debe cumplir que $\forall\ \varepsilon > 0$ (arbitrariamente pequeño y positivo) debe existir un δ_1 y un δ_2 (también arbitrariamente pequeños y positivos) que dependan de ε, tal que:

$$0 < |x - c| < \delta_1 \quad \Longrightarrow \quad |f(x) - L| < \varepsilon/2$$

$$0 < |x - c| < \delta_2 \quad \Longrightarrow \quad |g(x) - G| < \varepsilon/2$$

Límite de una suma de funciones (Continuación)

Llamando δ al más pequeño de los valores del par (δ_1, δ_2) se tendrá que:

$$
\begin{aligned}
0 < |x - c| < \delta \Longrightarrow |[f(x) + g(x)] - [L + G]| &= |[f(x) - L] + [g(x) - G]| \\
&\leq |f(x) - L| + |g(x) - G| \\
&\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\
&\leq \varepsilon
\end{aligned}
$$

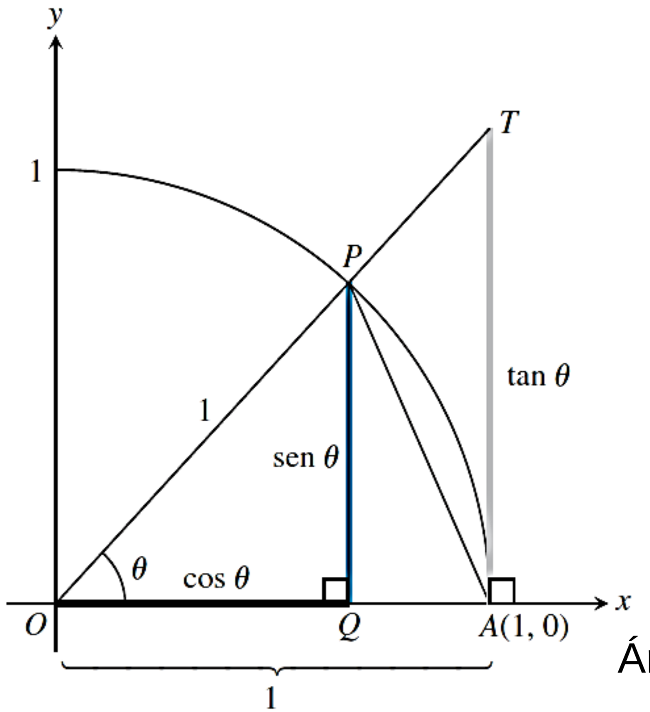
Desigualdad triangular de valor absoluto

El resultado indica que a medida que la variable x toma valores suficientemente cercanos a "c", se pueden obtener valores de $[f(x) + g(x)]$ cada vez más cercanos a $(L + G)$.

Por lo tanto, se verifica la tesis propuesta.

Límites Notables

$$\lim_{\theta \to 0} \frac{sen\ \theta}{\theta} = 1 \quad (\theta \text{ en radianes})$$



Se pretende demostrar que tanto el límite por la derecha como el límite por la izquierda son iguales a 1.
Para mostrar que el límite por derecha es 1, se inicia con valores positivos de θ menores que $\pi/2$.

En la figura se observa el triángulo OAP, el área del sector circular OAP y el triángulo OAT. Se plantea la siguiente relación de área entre ellos:

Área de $\Delta OAP <$ área del sector OAP <área de ΔOAT

Estas áreas pueden expresarse en términos de θ como:

Área de $\Delta OAP = \frac{1}{2}\ base\ * altura = \frac{1}{2}(1)(sen\theta) = \frac{1}{2} sen\theta$

Área del sector $\Delta OAP = \frac{1}{2}\ r^2\theta = \frac{1}{2}(1)^2\ \theta = \frac{\theta}{2}$

Área de $\Delta OAT = \frac{1}{2}\ base\ * altura = \frac{1}{2}(1)(tan\theta) = \frac{1}{2} tan\theta$

Reemplazando según corresponde en la desigualdad se tiene:

$$\frac{1}{2} sen\ \theta < \frac{\theta}{2} < \frac{1}{2} \tan\theta$$

Dividiendo los términos de la desigualdad por $\frac{1}{2} sen\theta$:

$$1 < \frac{\theta}{sen\,\theta} < \frac{1}{\cos\theta}$$

Al tomar recíprocos las desigualdades se invierten:

$$1 > \frac{sen\,\theta}{\theta} > \cos\theta$$

Se toma límite para $\theta \to 0$:

$$\lim_{\theta\to 0^+} \cos\theta < \lim_{\theta\to 0} \frac{sen\,\theta}{\theta} < \lim_{\theta\to 0} 1$$

Por Teorema del Encaje resulta:

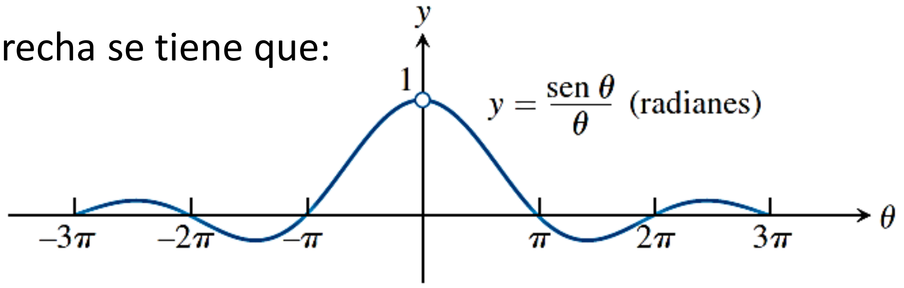
$$\lim_{\theta\to 0^+} \frac{sen\,\theta}{\theta} = 1$$

Se debe recordar que $sen\,\theta$ y θ son funciones impares, por lo tanto $f(\theta) = \frac{sen\,\theta}{\theta}$ es una función par, con una gráfica simétrica respecto al eje y. Esta simetría implica que el límite por la izquierda en 0 existe y tiene el mismo valor que el límite por la derecha:

$$\lim_{\theta\to 0^-} \frac{sen\,\theta}{\theta} = 1 = \lim_{\theta\to 0^+} \frac{sen\,\theta}{\theta}$$

Como el límite por izquierda es igual al límite por derecha se tiene que:

$$\boldsymbol{\lim_{\theta\to 0} \frac{sen\,\theta}{\theta} = 1}$$



$$\lim_{h\to 0}\frac{COS\ (h)-1}{h} = 0 \quad (h \text{ en radianes})$$

Empleando la fórmula del ángulo medio:

$$\cos h = 1 - 2\ sen^2\left(\frac{h}{2}\right)$$

Reemplazando según corresponde en la desigualdad se tiene:

$$\lim_{h\to 0}\frac{COS\ (h)-1}{h} = \lim_{h\to 0} -\frac{2\ sen^2\left(\frac{h}{2}\right)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} -\frac{sen^2\left(\frac{h}{2}\right)}{(h/2)}$$

Si $\frac{h}{2} = \theta$, y $h \to 0 \Longrightarrow \theta \to 0$, por lo que se tiene:

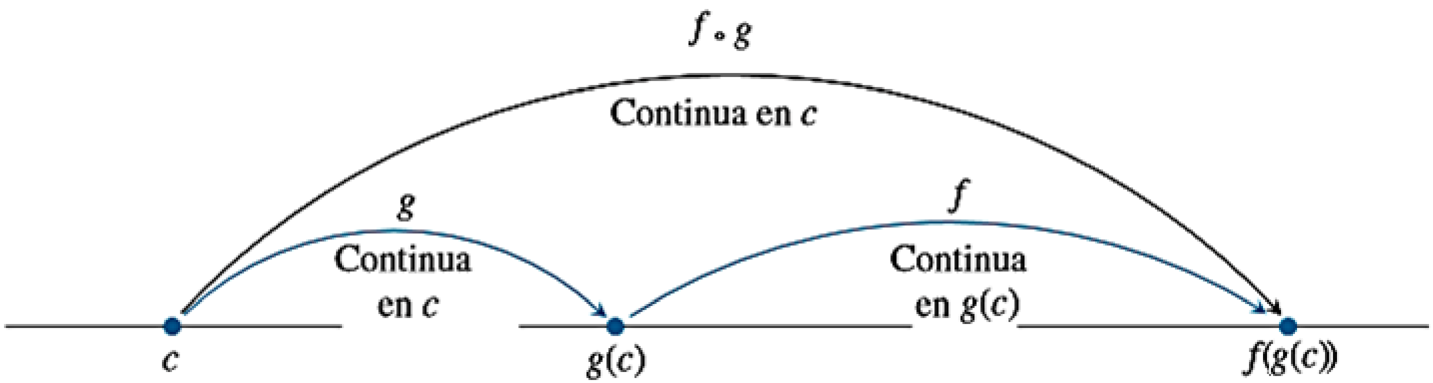
$$= \lim_{h\to 0} -\frac{sen^2(\theta)}{(\theta)} = \lim_{h\to 0} -\frac{sen(\theta)}{(\theta)}sen\ \theta$$

$$= -(1)(0) = 0$$

Continuidad de una función compuesta

CONTINUIDAD DE UNA FUNCIÓN COMPUESTA

Si g es continua en c y f es continua en $g(c)$, entonces la función compuesta dada por $(f o g)(x) = f(g(x))$ es continua en c.



Demostración:

Por definición de continuidad: $\lim_{x \to c} g(x) = g(c)$ y $\lim_{x \to g(c)} f(x) = f(g(c))$

Se aplica el Teorema de Límite de una función compuesta con $L = g(c)$ se obtiene:

$$\lim_{x \to c} f(g(x)) = f\left(\lim_{x \to c} g(x)\right) = f(g(c))$$

De esta manera, $(f o g)(x) = f(g(x))$ es continua en c.

Reglas de Derivación

Derivada de una función constante:

Si $f(x) = c \Rightarrow \frac{\boldsymbol{df(x)}}{\boldsymbol{dx}} = \boldsymbol{f'(x) = 0}$

Demostración: $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{c-c}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} 0 = 0$

Derivada de una función potencia:

Si $f(x) = x^n \Rightarrow \frac{\boldsymbol{df(x)}}{\boldsymbol{dx}} = \boldsymbol{f'(x) = nx^{n-1}}$

Para toda x donde las potencias x^n y x^{n-1} estén definidas.

Demostración: si n es un entero positivo mayor que 1, entonces el desarrollo del binomio resulta:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x)^n - x^n}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x^n + nx^{n-1}(\Delta x) + \frac{n(n-1)x^{n-2}}{2}(\Delta x)^2 + \cdots + (\Delta x)^n - x^n}{\Delta x}$$

Elimino el primer y último término por suma de opuestos, y simplificando los términos restantes con el denominador, resulta:

$$= \lim_{\Delta x \to 0} nx^{n-1} + \frac{n(n-1)x^{n-2}}{2}(\Delta x) + \cdots + (\Delta x)^{n-1} = \boldsymbol{nx^{n-1} + 0 + \cdots + 0}$$

Derivada de un múltiplo constante:

Si $f(x)$ es una función derivable de x y c una constante, entonces:

$$\boldsymbol{\frac{d(c.f(x))}{dx} = \mathbf{c} \cdot \frac{df(x)}{dx} = \mathbf{c} \cdot f'(x)}$$

En particular, si $n \in \mathbb{R}$: $\boldsymbol{\frac{d(c.x^n)}{dx} = cnx^{n-1}}$

Demostración:

$$\frac{d}{dx}cf(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{cf(x+\Delta x) - cf(x)}{\Delta x}$$

$$= c \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = c.\frac{df(x)}{dx}$$

$$\boldsymbol{\frac{d}{dx}cf(x) = c.\frac{df(x)}{dx} = \mathbf{c} \cdot f'(x)}$$

Derivada de una suma/resta de funciones:

Si f y g son funciones derivables de x, entonces su suma $f \pm g$ es derivable en cada punto donde tanto f como g son derivables. En tales puntos:

$$\boldsymbol{\frac{d(f \pm g)}{dx} = \frac{df}{dx} \pm \frac{dg}{dx} = f'(x) \pm g'(x)}$$

Demostración:

$$\boldsymbol{\frac{d}{dx}[f(x) + g(x)]} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{[f(x + \Delta x) + g(x + \Delta x)] - [f(x) + g(x)]}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{[f(x + \Delta x) - f(x)] + [g(x + \Delta x) - g(x)]}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x} = \frac{df}{dx} + \frac{dg}{dx}$$

$$= \boldsymbol{f'(x) + g'(x)}$$

Derivada de un producto de funciones:

Si f y g son funciones derivables de x, entonces también lo es su producto $f \cdot g$ y:

$$\frac{d(f.g)}{dx} = f\frac{dg}{dx} + g\frac{df}{dx} = f(x)g'(x) + g(x)f'(x)$$

Demostración:

$$\frac{d}{dx}(fg) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)g(x+\Delta x) - f(x)g(x)}{\Delta x}$$

Para cambiar esta fracción en una equivalente que contenga los cocientes de diferencias para las derivadas de f y g, en el numerador se suma y resta convenientemente $f(x+\Delta x)g(x)$.

$$\frac{d}{dx}(fg) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)g(x+\Delta x) - f(x)g(x) + f(x+\Delta x)g(x) - f(x+\Delta x)g(x)}{\Delta x}$$

Se agrupan convenientemente el primer y cuarto término, y el segundo y tercer término:

$$\frac{d}{dx}(fg) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{[f(x+\Delta x)g(x+\Delta x) - f(x+\Delta x)g(x)] + [-f(x)g(x) + f(x+\Delta x)g(x)]}{\Delta x}$$

$$\frac{d}{dx}(fg) = \lim_{\Delta x \to 0} \left[f(x+\Delta x)\frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x} + g(x)\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \right]$$

$$\frac{d}{dx}(fg) = \lim_{\Delta x \to 0} f(x+\Delta x) \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} g(x) \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Cuando Δx se aproxima a cero, $f(x+\Delta x) \to f(x)$, ya que $f(x)$, al ser derivable en x, es continua en x. Las dos fracciones tienden a los valores de df/dx en x y a dg/dx en x. Finalmente $\lim_{\Delta x \to 0} g(x) = g(x)$. En síntesis,

$$\frac{d}{dx}(fg) = f\frac{dg}{dx} + g\frac{df}{dx} = f(x)g'(x) + g(x)f'(x)$$

Derivada del cociente de funciones:

Si f y g son funciones derivables de x, y si $g(x) \neq 0$ entonces el cociente f/g es derivable en x:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{g\frac{df}{dx} - f\frac{dg}{dx}}{g^2} = \frac{g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$$

Demostración:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{f}{g}\right)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\frac{f(x+\Delta x)}{g(x+\Delta x)}-\frac{f(x)}{g(x)}}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{g(x)\cdot f(x+\Delta x)-f(x)\cdot g(x+\Delta x)}{\Delta x\cdot g(x+\Delta x)\cdot g(x)}$$

Para modificar la última fracción en una equivalente que contenga los cocientes de diferencias para las derivadas de f y g, en el numerador se suma y resta $f(x)g(x)$:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{f}{g}\right)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{g(x)\cdot f(x+\Delta x)-f(x)\cdot g(x+\Delta x)+f(x)g(x)-f(x)g(x)}{\Delta x\cdot g(x+\Delta x)\cdot g(x)}$$

Agrupo términos convenientemente:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{f}{g}\right)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{g(x)\cdot f(x+\Delta x)-f(x)g(x)-f(x)\cdot g(x+\Delta x)+f(x)g(x)}{\Delta x\cdot g(x+\Delta x)\cdot g(x)}$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{f}{g}\right)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\frac{g(x)\cdot[f(x+\Delta x)-f(x)]}{\Delta x}-\frac{f(x)\cdot[g(x+\Delta x)-g(x)]}{\Delta x}}{g(x+\Delta x)\cdot g(x)}$$

Si se toman los límites en el numerador y en el denominador, se obtendrá la regla del cociente:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{f}{g}\right)=\frac{g\frac{df}{dx}-f\frac{dg}{dx}}{g^2}=\frac{g(x)f'(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)}$$

Demostración de la regla de la potencia (exponentes enteros negativos)

Si n es un entero negativo menor que 1, entonces existe un entero positivo k tal que $n = -k$. Por tanto, usando la regla del cociente:

$$\frac{d}{dx}[x^n] = \frac{d}{dx}\left[\frac{1}{x^k}\right] = \frac{x^k(0)-(1)(kx^{k-1})}{\left(x^k\right)^2}$$

Regla del cociente y de la potencia

$$= \frac{0-kx^{k-1}}{x^{2k}} = -kx^{-k-1}$$

$n = -k$

$$= nx^{n-1}$$

Derivada de la función seno: $\frac{d}{dx}(\boldsymbol{sen\ x}) = \boldsymbol{cos\ x}$

Demostración: derivada del $sen\ x$:

$$\frac{d}{dx}(\boldsymbol{sen\ x}) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{sen\ (x+\Delta x) - sen\ x}{\Delta x}$$

Aplico identidad trigonométrica del seno de una suma:

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{sen\ x\ cos \Delta x + cos x\ sen\ \Delta x - sen\ x}{\Delta x}$$

Extraigo factor común $-sen\ x$ entre primer y último término:

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cos x sen\ \Delta x - sen\ x\ (1 - \cos \Delta x)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \left[(\cos x) \frac{sen\ x}{\Delta x} - (sen\ x) \left(\frac{1 - \cos x}{\Delta x} \right) \right]$$

Aplico propiedades de límites (resta y constante por una función)

$$= \cos x \left(\lim_{\Delta x \to 0} \frac{sen\ x}{\Delta x} \right) - sen\ x \left(\lim_{\Delta x \to 0} \frac{1 - \cos \Delta x}{\Delta x} \right)$$

$$= (\cos x)(1) - sen\ x\ (0)$$

Aplico límites trigonométricos especiales

$$= \boldsymbol{\cos x}$$

Derivada de la función coseno: $\frac{d}{dx}(\boldsymbol{cos\ x}) = \boldsymbol{-sen\ x}$

Demostración: derivada del cos x:

$$\frac{d}{dx}(\boldsymbol{cos\ x}) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{cos\ (x+\Delta x) - cos\ x}{\Delta x}$$

Aplico identidad trigonométrica del coseno de una suma:

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{cos\ x\ cos \Delta x - senx\ sen\ \Delta x - cos\ x}{\Delta x}$$

Extraigo factor común $cos\ x$ entre el primer y último término:

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cos x\ (\cos \Delta x - 1) - sen\ x\ sen\ \Delta x}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \left[(\cos x) \frac{\cos \Delta x - 1}{\Delta x} - (sen\ x)\ \left(\frac{sen\ x}{\Delta x}\right)\right]$$

Aplico propiedades de límites (resta y producto):

$$= \cos x \left(\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cos \Delta x - 1}{\Delta x}\right) - sen\ x \left(\lim_{\Delta x \to 0} \frac{sen\ x}{\Delta x}\right)$$

$$= (\cos x)(0) - sen\ x\ (1)$$

Aplico límites trigonométricos especiales:

$$= \boldsymbol{-sen\ x}$$

Regla de la Cadena

Si $f(u)$ es derivable en el punto $u = g(x)$, y $g(x)$ es derivable en x, entonces la función compuesta $(fog)(x) = f(g(x))$ es derivable en x y:

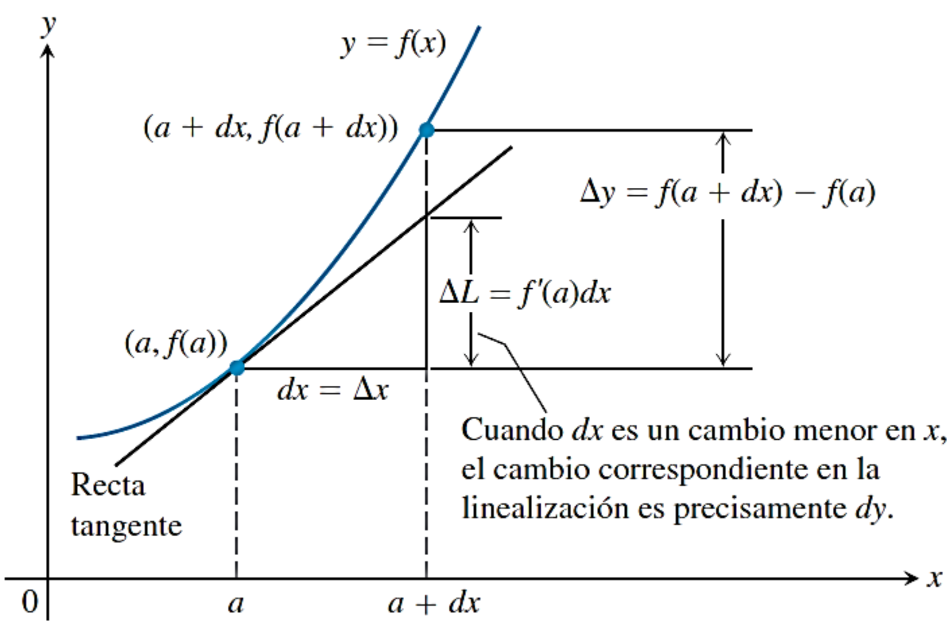
$$(fog)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

En notación de Leibniz, si $y = f(u)$ y $u = g(x)$, entonces:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

donde $\frac{dy}{du}$ se evalúa en $u = g(x)$.

Para realizar la demostración se debe tener en cuenta lo siguiente:



Cambio en $y = f(x)$ cerca de $x = a$:

Si $y = f(x)$ es derivable en $x = a$, y x cambia de a a $a + \Delta x$, el cambio Δy en f está dado por:

$$\Delta y = f'(a)\Delta x + \in \Delta x$$

En la que $\in \to 0$ cuando $\Delta x \to 0$

Para la demostración de la regla de la cadena, se debe demostrar que si $f(u)$ es una función derivable de u y $u = g(x)$ es una función derivable de x, entonces la composición $y = f(g(x))$ es una función derivable de x.

Como una función es derivable si y sólo si tiene derivada en cada punto de su dominio, se debe mostrar que siempre que g sea derivable en x_0 y f sea derivable en $g(x_0)$, entonces la composición es derivable en x_0 y la derivada de la composición satisface la ecuación:

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_0} = f'\big(g(x_0)\big) \cdot g'(x_0)$$

Sea Δx un incremento de x y sean Δu y Δy los incrementos correspondientes en $u = g(x)$ y en y. Al aplicar la ecuación

$$\Delta y = f'(a)\Delta x + \in \Delta x$$

Se tiene:

$$\Delta u = g'(x_0)\Delta x + \in_1 \Delta x = (g'(x_0) + \in_1)\,\Delta x$$

En la que $\in_1 \to 0$ cuando $\Delta x \to 0$. De manera similar:

$$\Delta y = f'(u_0)\Delta u + \in_2 \Delta u = (f'(u_0) + \in_2)\,\Delta u$$

En la que $\in_2 \to 0$ cuando $\Delta u \to 0$. También se debe observar que $\Delta u \to 0$ cuando $\Delta x \to 0$. Al combinar la ecuación para Δu y Δy, se obtiene:

$$\Delta y = (f'(u_0) + \in_2)(g'(x_0) + \in_1)\Delta x$$

De modo que:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(u_0)g'(x_0) + \in_2 g'(x_0) + f'(u_0)\in_1 + \in_1\in_2$$

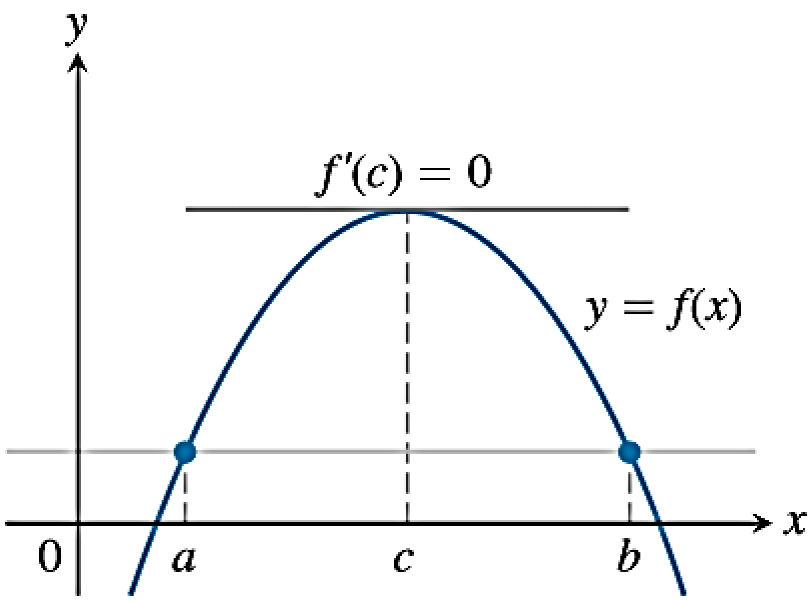
Como $\in_1 \to 0$ y $\in_2 \to 0$ cuando $\Delta x \to 0$, resulta:

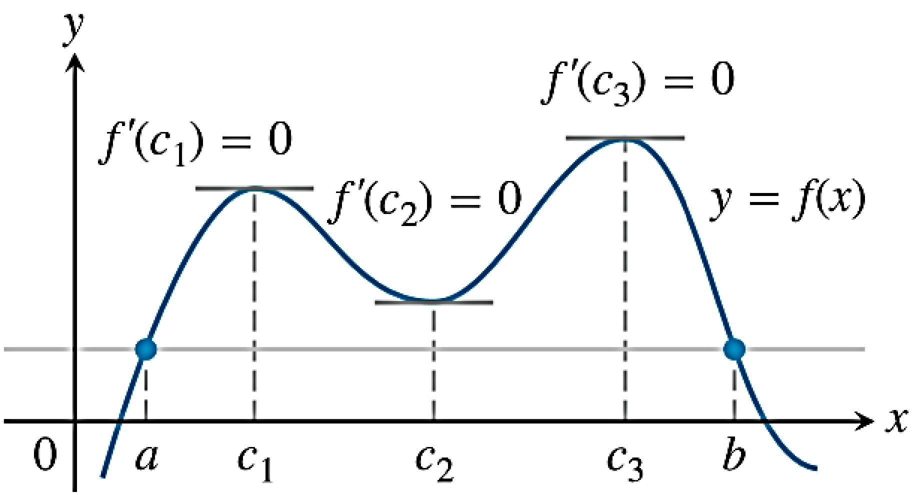
$$\boldsymbol{\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_0} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(u_0)g'(x_0) = f'\big(g(x_0)\big) \cdot g'(x_0)}$$

Teorema de Rolle

Teorema de Rolle

Suponga que $y = f(x)$ es continua en todo punto del intervalo cerrado $[a, b]$ y es derivable en todo punto de su interior (a, b). Si $f(a) = f(b)$, entonces existe al menos un número c en (a, b) en el que $f'(c) = 0$.





Hipótesis: f es continua en $[a, b]$

f es derivable en (a, b)

$f(a) = f(b)$

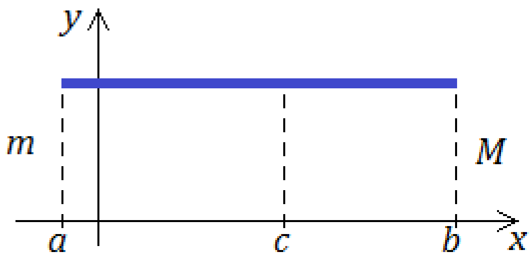
Tesis: Existe $c \in (a, b) / f'(c) = 0$

Demostración: al ser continua en $[a, b]$, por teorema de los valores extremos, f toma al menos un valor máximo M y un valor mínimo m absolutos en $[a, b]$.

Se presentan las siguientes situaciones:

1. **Puntos interiores donde f' no está definida**: por hipótesis, f tiene una derivada en todo punto interior, lo que elimina esta posibilidad.

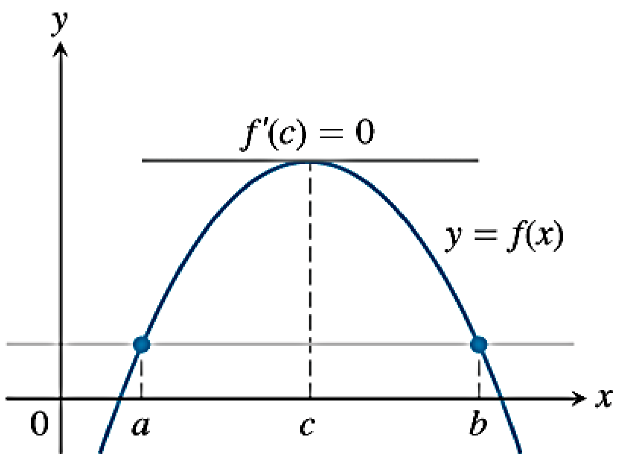
2. **Los puntos extremos del dominio de f:** si tanto el máximo absoluto como el mínimo absoluto se alcanzan en los extremos, entonces, ya que por hipótesis $f(a) = f(b)$, se tiene que $M = m$ y esto se cumple para el caso de que f sea una función constante con $f(x) = f(a) = f(b)$ para toda $x \in [a, b]$. Por lo tanto, la tesis $f'(x) = 0$ se verifica para cualquier punto c interior al intervalo (a, b).

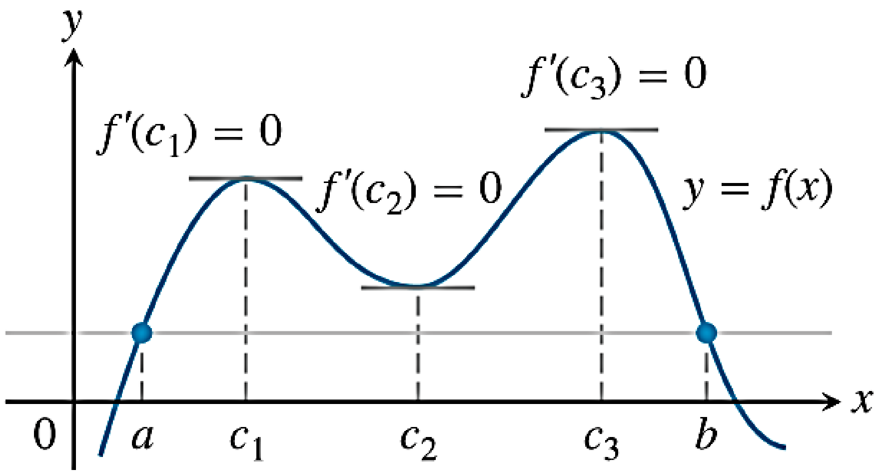


Demostración *(continuación)*:

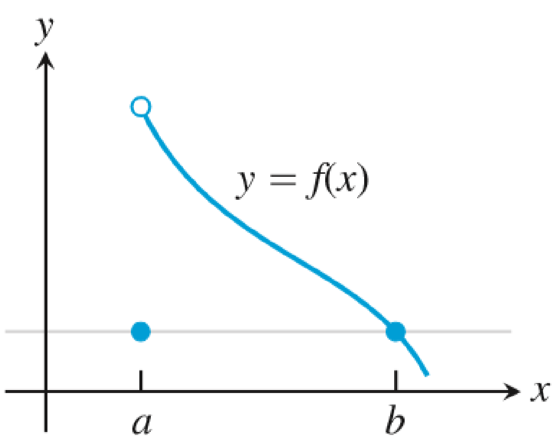
3. Puntos interiores donde $f' = 0$.

Si $M \neq m$, entonces uno de ellos, por lo menos es distinto de $f(a) = f(b)$. Por lo tanto, f alcanza dicho extremo absoluto en un punto c interior al intervalo y $f(c)$ es al mismo tiempo, extremo relativo y absoluto. Como f es derivable por hipótesis en (a, b), resulta por la condición necesaria para la existencia de extremos relativo que $f'(c) = 0$ y así se verifica la tesis propuesta.

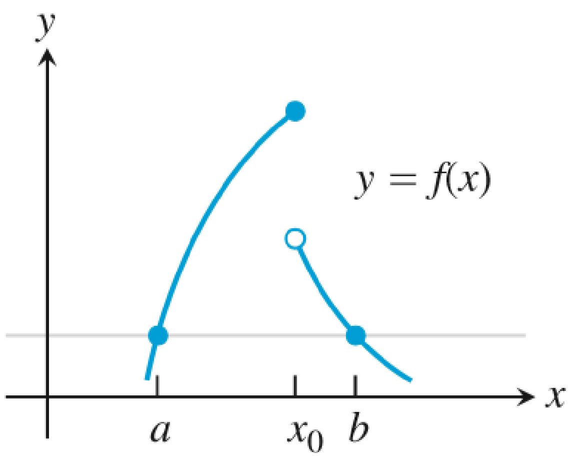




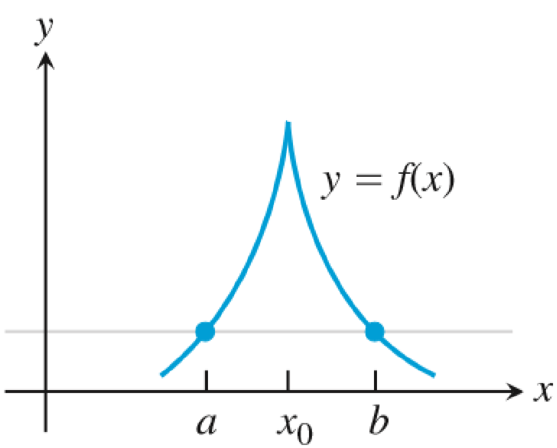
Las hipótesis del Teorema de Rolle (continuidad y derivabilidad) deben cumplirse para que sea válida su aplicación.



(a) Discontinuidad en un extremo del intervalo $[a, b]$



(b) Discontinuidad en un punto interior de $[a, b]$



(c) Continua en $[a, b]$, pero no diferenciable en un punto

Teorema de Cauchy

Teorema del valor medio de Cauchy

Suponga que las funciones f y g son continuas en $[a, b]$ y derivables en todo el intervalo (a, b), también suponga que $g'(x) \neq 0$ en (a, b). Entonces existe un número c en (a, b) en el que:

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

Hipótesis: f y g continuas en $[a, b]$

f y g derivables en (a, b)

Para todo $x \in (a, b)$: $g'(x) \neq 0$

Tesis: Existe $c \in (a, b)$ / $\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$

Demostración: consideremos una función auxiliar h definida de la siguiente forma:

$$\boldsymbol{h(x) = [f(b) - f(a)] \cdot g(x) - [g(b) - g(a)] \cdot f(x)} \qquad \textbf{(i)}$$

Se verifica que:

1) h es continua en $[a, b]$ dado que es diferencia de dos funciones continuas en $[a, b]$ (por hipótesis f y g continuas en $[a, b]$)

2) h es derivable en (a, b) por ser diferencia de dos funciones derivables en (a, b) (por hipótesis f y g derivables en (a, b)

3) Reemplazando a x por a en (i) y luego a x por b en (i), se tiene:

$$\boldsymbol{h(a) = [f(b) - f(a)] \cdot g(a) - [g(b) - g(a)] \cdot f(a)} \qquad \textbf{(ii)}$$

$$\boldsymbol{h(b) = [f(b) - f(a)] \cdot g(b) - [g(b) - g(a)] \cdot f(b)} \qquad \textbf{(iii)}$$

Demostración (continuación):

Trabajando algebraicamente (ii) y (iii) se obtiene: $h(a) = h(b)$

De 1), 2) y 3) la función h cumple la hipótesis del Teorema de Rolle, por lo tanto verifica su Tesis, es decir: Existe $c \in (a, b) / h'(c) = 0$

Derivando h se tiene que:

$$h'(x) = [f(b) - f(a)] \cdot g'(x) - [g(b) - g(a)] \cdot f'(x)$$

Haciendo $x = c$:

$$h'(c) = [f(b) - f(a)] \cdot g'(c) - [g(b) - g(a)] \cdot f'(c) = 0$$

Luego, $$[\boldsymbol{f}(\boldsymbol{b}) - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{a})] \cdot \boldsymbol{g}'(\boldsymbol{c}) = [\boldsymbol{g}(\boldsymbol{b}) - \boldsymbol{g}(\boldsymbol{a})] \cdot \boldsymbol{f}'(\boldsymbol{c}) \qquad \textbf{(iv)}$$

Como por hipótesis $g'(c) \neq 0$, y además $g(b) - g(a) \neq 0$ pues si $g(b) - g(a) = 0$ sería $g(b) = g(a)$ y g cumpliría el Teorema de Rolle y por lo tanto existiría $c \in (a, b) / g'(c) = 0$, contra lo que afirma la hipótesis. Por consiguiente, puede escribirse (iv) como:

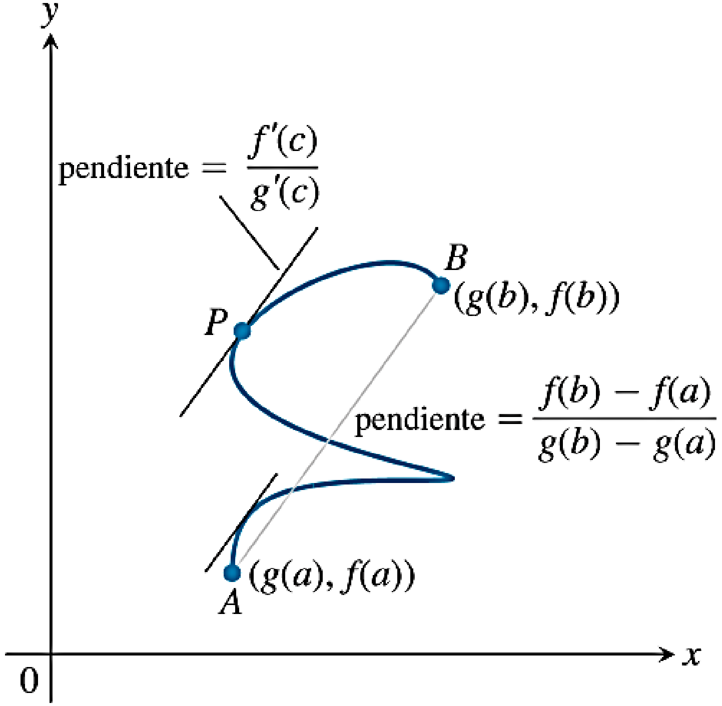
$$\boldsymbol{\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}}$$

Interpretación geométrica del teorema de Cauchy

Para una curva general C en el plano que une a los dos puntos $A = (g(a), f(a))$ y $B = (g(b), f(b))$, la pendiente de la recta secante que une a los puntos A y B es paralela a la pendiente de la recta tangente a la curva en un punto P de la misma. La pendiente de esa recta tangente resulta ser el cociente f'/g', evaluado en el número c en el intervalo (a, b). Puesto que la pendiente de la recta secante que une a A y B es:

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

La ecuación en el teorema del valor medio de Cauchy dice que la pendiente de la recta tangente es igual a la pendiente de la secante.

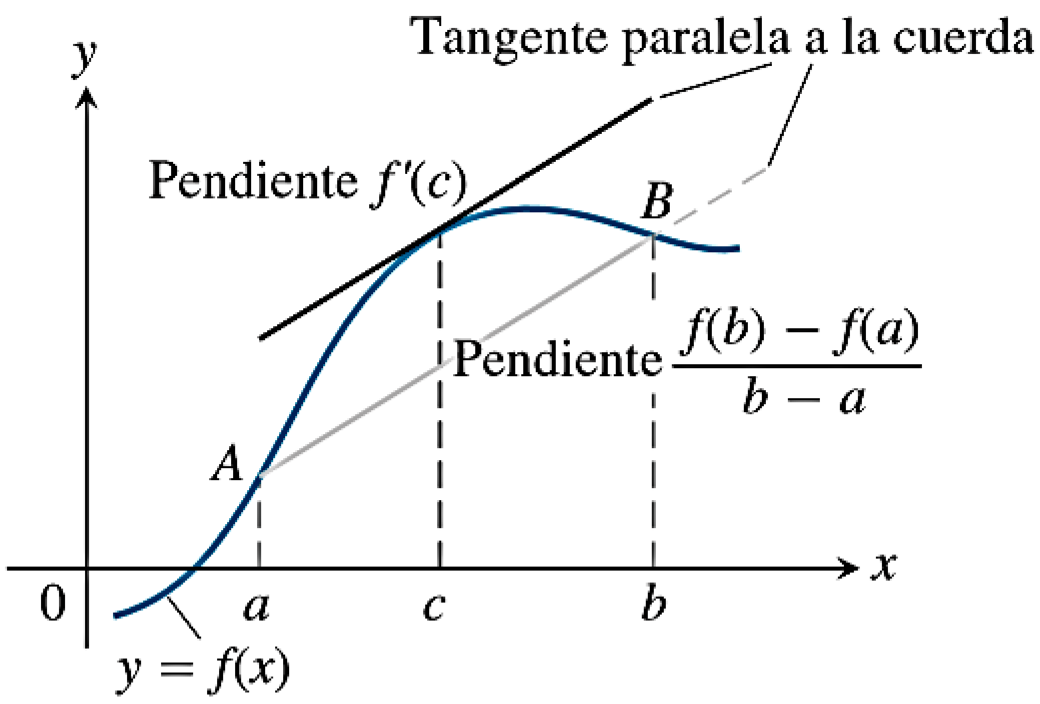


Teorema del Valor Medio de Lagrange

Teorema del valor medio (Teorema de Lagrange)

Suponga que $y = f(x)$ es continua en un intervalo cerrado $[a, b]$ y es derivable en todo punto de su interior (a, b). Entonces existe al menos un punto c en (a, b) en el que:

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$$



El Teorema del valor medio o de Lagrange es una versión general del Teorema de Rolle, y a la vez un caso particular del Teorema de Cauchy.

Demostración

Hipótesis: f continua en $[a, b]$

f derivables en (a, b)

Tesis: Existe $c \in (a, b)$ / $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

Demostración: si en el Teorema de Cauchy, g es la función identidad, entonces $g(a) = a$; $g(b) = b$; $g'(x) = 1$ en particular $g'(c) = 1$ para algún $c \in (a, b)$. Es decir,

Existe $c \in (a, b)$ / $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

Interpretación geométrica

Dada una curva suave (no angulosa, con tangente no vertical en todo punto comprendido entre los extremos de la mencionada curva) por lo menos existirá un punto de ella, distinto de sus extremos, en el que la tangente a la curva es paralela a la recta secante que pasa por sus extremos.

CONSECUENCIAS MATEMÁTICAS

COROLARIO 1

Si $f'(x) = 0$ en cada punto x de un intervalo abierto (a, b), entonces $f(x) = C$ para toda $x \in (a, b)$, donde C es una constante.

COROLARIO 2

Si $f'(x) = g'(x)$ en cada punto x de un intervalo abierto (a, b), entonces existe una constante C tal que $f(x) = g(x) + C$ para toda $x \in (a, b)$. Esto es $f - g$ es una función constante en (a, b).

Demostraciones alternativas al Teorema de Lagrange y Cauchy

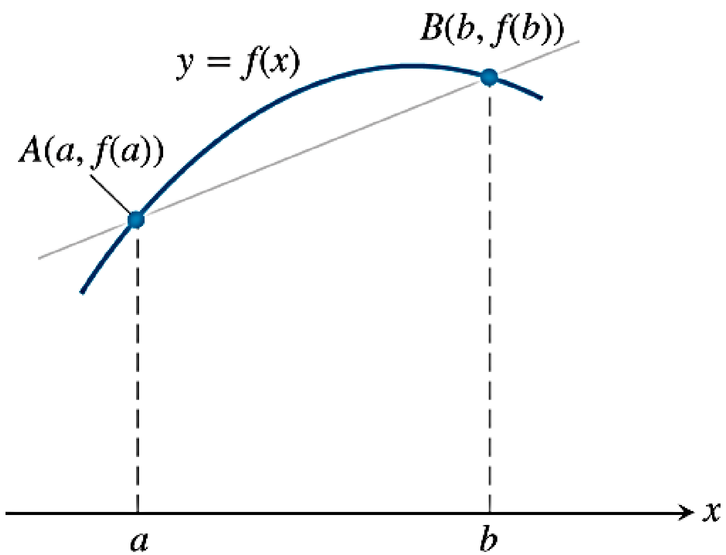
Demostración alternativa: se dibuja la gráfica de f y se traza una recta que pase por los puntos $A(a, f(a))$ y $B(b, f(b))$. La recta es la gráfica de la función:

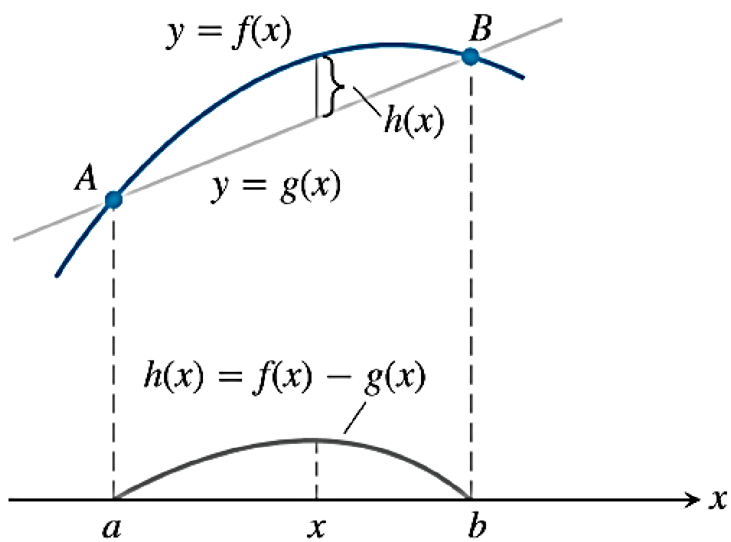
$$g(x) = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

(ecuación punto pendiente).

La diferencia vertical entre las gráficas de f y g en x es:

$$h(x) = f(x) - g(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$





Demostración alternativa (continuación): La función h satisface las hipótesis del Teorema de Rolle en $[a, b]$. Es continua en $[a, b]$, diferenciable en (a, b), ya que tanto f como g lo son. Además, $h(a) = h(b) = 0$ ya que las gráficas de f y g pasan por A y B. Por lo tanto, $h'(c) = 0$ en algún punto $c \in (a, b)$. Esto es lo necesario para la ecuación $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$.

Se toma la ecuación: $h(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x - a)$ y se derivan ambos miembros respecto de x. Luego se establece $x = c$:

$$h'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

$$h'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

$$0 = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Que es lo que se quería demostrar.

Demostración alternativa (empleando Lagrange): se aplica el teorema del valor medio dos veces. Primero para mostrar que $g(a) \neq g(b)$. Puesto que si $g(b)$ fuera igual a $g(a)$, entonces el teorema del valor medio daría:

$$\mathrm{g}'(\mathrm{c}) = \frac{g(b) - g(a)}{b - a} = 0$$

para alguna c entre a y b, lo cual no puede ocurrir ya que $\mathrm{g}'(\mathrm{c}) \neq 0$ en (a, b).

Luego se aplica el teorema del valor medio a la función:

$$F(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}[g(x) - g(a)]$$

Esta función es continua y derivable donde f y g lo sean, mientras $F(b) = F(a) = 0$. Por tanto, existe un número c entre a y b para el que $F'(c) = 0$. Cuando se expresa en términos de f y g, la ecuación se convierte en:

$$F'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}[g'(c)] = 0$$

Por lo que:

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

Regla de L'Hôpital

TEOREMA: Regla de L'Hôspital

Suponga que $f(a) = g(a) = 0$, que f y g son derivables en un intervalo abierto I que contiene a a, y que $g'(x) \neq 0$ en I si $x \neq a$. Así,

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

suponiendo que existe el límite de la derecha de esta ecuación.

Demostración:

Primero se establece la ecuación límite para el caso $x \to a^+$. El método no necesita demasiado cambio para aplicarse a $x \to a^-$, mientras la combinación de estos dos casos establece el resultado.

Suponga que x está a la derecha de a. Entonces, $g'(x) \neq 0$. Se aplica el teorema del valor medio de Cauchy al intervalo $[a, x]$. Este paso produce un número c entre a y x, tal que:

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)}$$

Pero $f(a) = g(a) = 0$, por lo que:

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(x)}{g(x)}$$

Cuando x tiende a a, c se aproxima a a, ya que siempre está entre a y x. Por lo tanto,

$$\lim_{x \to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{c \to a^+} \frac{f'(c)}{g'(c)} = \lim_{x \to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

que establece la regla de L'Hôpital para el caso donde $x \to a^+$. Si $x \to a^-$ se aplica el teorema del valor medio de Cauchy al intervalo cerrado $[x, a], x < a$.

Teorema Fundamental del Cálculo Integral

TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO INTEGRAL (PARTE I)

Si f es continua en $[a, b]$, entonces la función $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ es continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b), y su derivada es $f(x)$:

$$F'(x) = \frac{d}{dx}\left[\int_a^x f(t)dt\right] = f(x)$$

Hipótesis:

f es continua en $[a, b]$

Tesis:

$F(x) = \int_a^x f(t)dt$ es continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b) y

$$F'(x) = \frac{d}{dx}[F(x)] = \frac{d}{dx}\left[\int_a^x f(t)dt\right] = f(x)$$

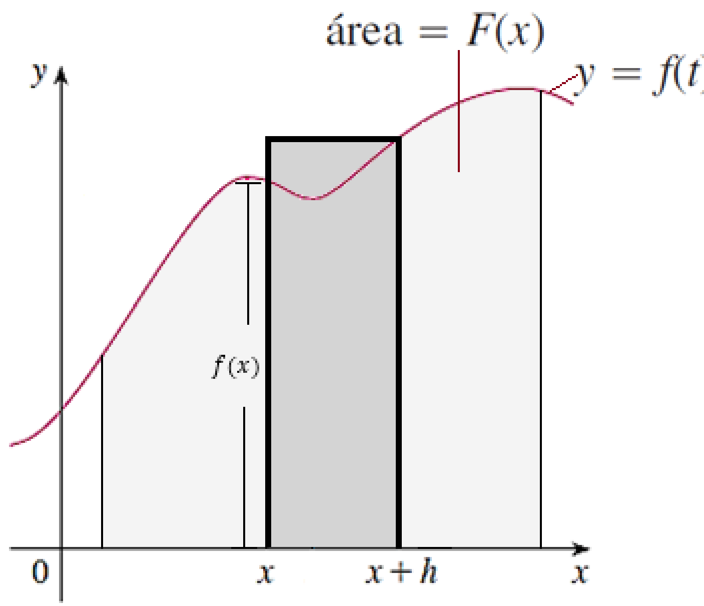
Demostración:

Se aplica a la función F la definición de derivada:

$$F'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} \qquad \mathbf{(1)}$$

Sabiendo que :

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$



La expresión **(1)** puede escribirse como:

$$F'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left[\int_a^{x+h} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt\right]$$

aplico propiedad de la integral

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left[\int_a^{x+h} f(t)dt + \int_x^a f(t)dt\right]$$

aplico propiedad de la integral

$$\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx$$

Demostración (continuación):

$$= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left[\int_x^a f(t)dt + \int_a^{x+h} f(t)dt\right] = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left[\int_x^{x+h} f(t)dt\right]$$

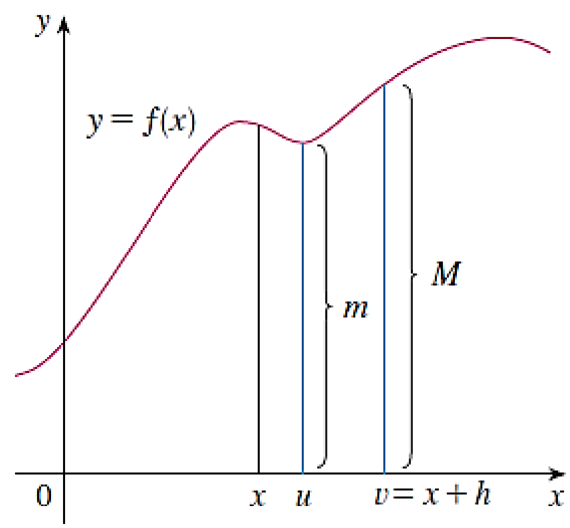
Suponiendo que $h > 0$, puesto que f es continua en el intervalo $[x, x+h]$, el teorema de valores extremos para funciones continuas establece que hay números u y v en $[x, x+h]$ tales que $f(u) = m$ y $f(v) = M$, donde m y M son los valores mínimo y máximo absolutos de f sobre $[x, x+h]$.

De acuerdo con la propiedad de *desigualdad min-max* de integrales, se tiene que:

$$m \cdot h \leq \int_x^{x+h} f(t)dt \leq M \cdot h$$

$$f(u) \leq \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)dt \leq f(v)$$

$$f(u) \leq \frac{F(x+h) - F(x)}{h} \leq f(v) \qquad \mathbf{(2)}$$



Nota: esta desigualdad puede demostrarse de una manera similar para $h < 0$.

Demostración (continuación):

Ahora, si $h \to 0$, $u \to x$ y $v \to x$, ya que u y v se encuentran entre x y $x+h$. Por tanto,

$$\lim_{h \to 0} f(u) = \lim_{u \to x} f(u) = f(x) \quad \text{y} \quad \lim_{h \to 0} f(v) = \lim_{v \to x} f(v) = f(x)$$

Porque f es continua en x. Aplicando el teorema del emparedado a **(2)**:

$$f(x) \leq \lim_{h \to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} \leq f(x)$$

$$F'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = f(x) \qquad \textbf{(3)}$$

Si $x = a$ o b, entonces la ecuación (3) puede interpretarse como un límite unilateral, y aplicando el teorema de derivabilidad implica continuidad (Si f es derivable en *x=a*, entonces f es continua en $x = a$), F es continua en $[a, b]$. Por tanto,

$$F'(x) = \frac{d}{dx}\left[\int_a^x f(t)dt\right] = f(x)$$

Cuando f es continua. Esta ecuación establece que si primero se integra f y luego se deriva el resultado, se regresa a la función original f.

TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO INTEGRAL (PARTE II)

Si una función f es continua en el intervalo cerrado $[a, b]$ y F es una antiderivada de f en el intervalo $[a, b]$, entonces:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Hipótesis:

f es continua en $[a, b]$

F es una antiderivada de f en $[a, b]$

Tesis:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Demostración 1:

Se escribe la diferencia $F(b) - F(a)$ en una forma conveniente. Sea Δ la siguiente partición de $[a, b]$:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

Mediante la resta y suma de términos análogos, se obtiene:

$$F(b) - F(a) = F(x_n) - F(x_{n-1}) + F(x_{n-1}) - \cdots - F(x_1) + F(x_1) - F(x_0)$$
$$= \sum_{i=1}^{n} [F(x_i) - F(x_{i-1})]$$

De acuerdo con el teorema del valor medio de Lagrange, se sabe que si existe un número c_i en el i-ésimo subintervalo tal que:

$$F'(c_i) = \frac{F(x_i) - F(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}}$$

Demostración 1 *(continuación)*:

Se sabe que $F'(c_i) = f(c_i)$ y $\Delta x = x_i - x_{i-1}$ y obtenerse:

$$F(b) - F(a) = \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i$$

Esta ecuación dice que al aplicar repetidamente el teorema del valor medio, se puede encontrar una colección de c_i tal que la constante $F(b) - F(a)$ es una suma de Riemann de f en $[a, b]$ para cualquier partición. Por teorema "continuidad implica integrabilidad":

$\lim_{||\Delta|| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i$ existe y por tanto:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

Demostración 2 (Alternativa):

De acuerdo con una de las consecuencias del Teorema del valor medio de Lagrange, dos funciones que tienen iguales derivadas en todos los puntos de un intervalo, difieren en una constante. Si una de esas funciones es conocida y su derivada es igual a f, se tiene:

$$G(x) = \int_a^x f(t)dt$$

Si F es cualquier otra de esas funciones:

$F(x) = G(x) + C$ en $[a, b]$ donde C es una constante.

$$\begin{aligned} F(b) - F(a) &= [G(b) + C] - [G(a) + C] \\ &= G(b) - G(a) \\ &= \int_a^b f(t)dt - \int_a^a f(t)dt = \int_a^b f(t)dt \end{aligned}$$

$$\boldsymbol{F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)dx}$$

Área de una región entre dos curvas

DEFINICIÓN DEL ÁREA DE UNA REGIÓN ENTRE DOS CURVAS

Si f y g son continuas en $[a, b]$ y $g(x) \leq f(x)$ para todo x en $[a, b]$, entonces el área de la región acotada por las gráficas de f y g y las rectas verticales $x = a$ y $x = b$ es:

$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx$$

Hipótesis:

$f(x)$ y g(x) continuas en $[a, b]$

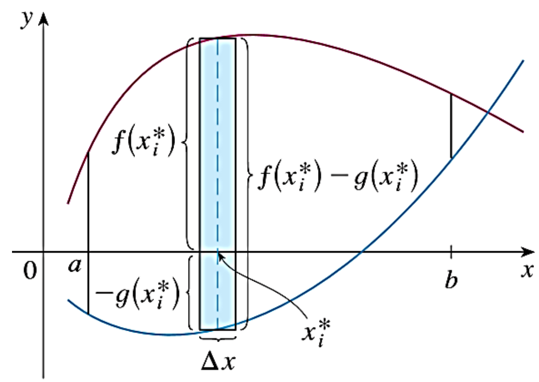
$g(x) \leq f(x)$ para todo x en $[a, b]$

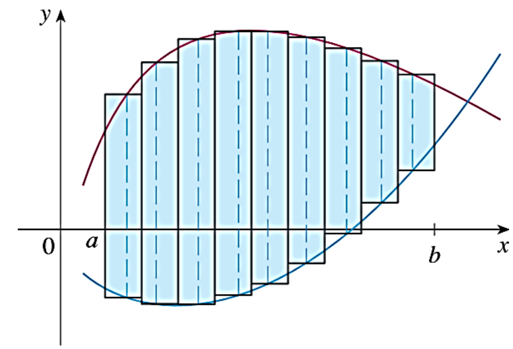
Tesis:

$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx$$

Demostración: para hallar el área de la región acotada por arriba, por la curva $y = f(x)$, por abajo por la curva $y = g(x)$ y por la izquierda y por la derecha por las rectas $x = a$ y $x = b$ respectivamente, se aproxima la misma dividiéndola en n rectángulos verticales, cada uno de anchura Δx, con base en la partición P: $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$ de $[a, b]$. El *i-ésimo* rectángulo tiene un área dada por:

$\Delta A_i = (base)(altura) = \Delta x\ [f(x_i^*) - g(x_i^*)]$
$\Delta A_i = [f(x_i^*) - g(x_i^*)]\Delta x$





Para aproximar el área de la región se suman las áreas de los rectángulos verticales con base en la partición P del intervalo $[a, b]$:

$$\textit{Área aproximada} \approx \sum_{i=1}^{n} \Delta A_i = \sum_{i=1}^{n} [f(x_i^*) - g(x_i^*)]\Delta x \quad \text{(Suma de Riemman)}$$

Cuando la norma de la partición tiende a cero, $\|\Delta\| \to 0$ $(n \to \infty)$, la suma de la derecha tiende al límite:

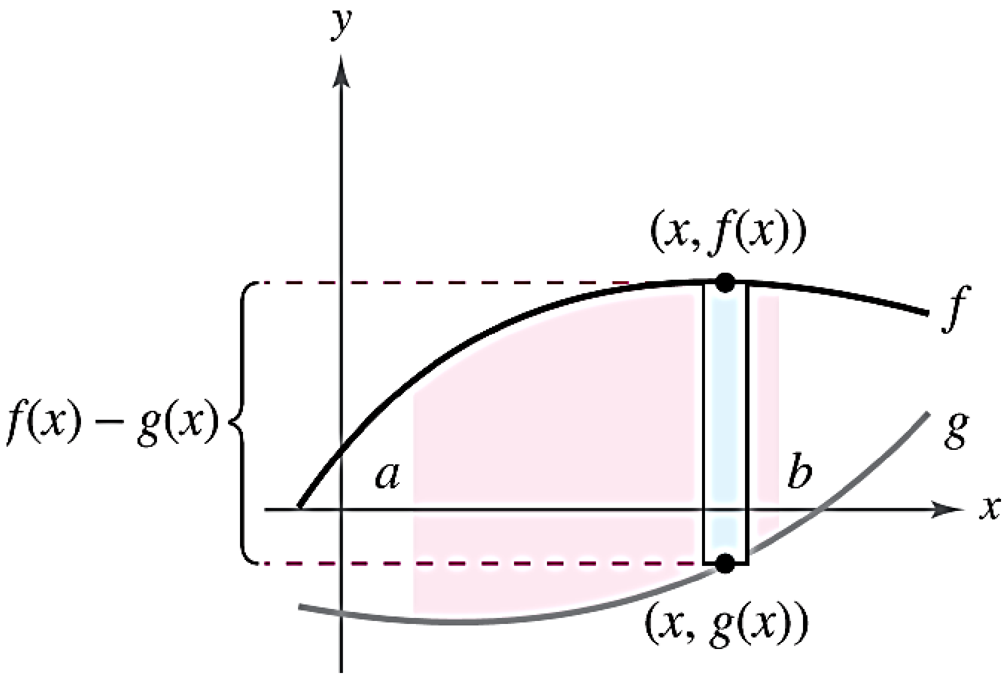
$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} [f(x_i^*) - g(x_i^*)]\Delta x$$

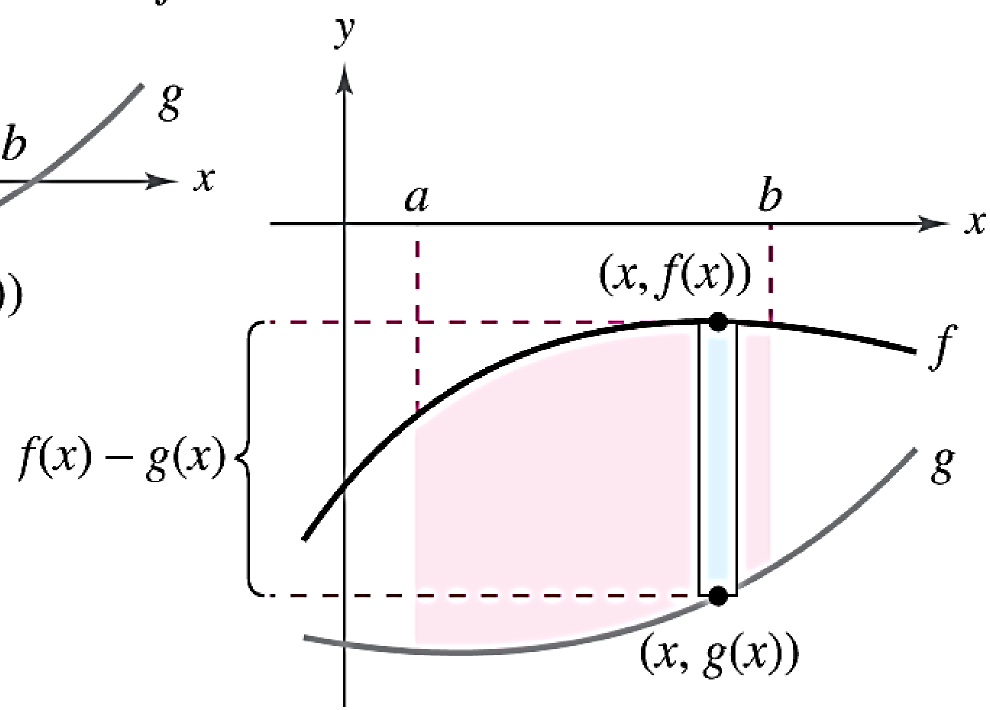
Como f y g son continuas en $[a, b]$, $f - g$ también es continua en $[a, b]$ y el límite existe. Así que, el área de la región dada es:

$$\acute{A}rea = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} [f(x_i^*) - g(x_i^*)]\Delta x = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx$$

Con lo cual queda demostrada la hipótesis.

Área de una región entre dos curvas





Un rectángulo vertical (de anchura Δx) implica la integral con respecto a x, mientras que un rectángulo horizontal (de anchura Δy) implica una integral con respecto a y.

Si la **gráfica de una función de y** es una frontera de una región, es a menudo conveniente usar **rectángulos** representativos **horizontales** y encontrar el área integrando en la variable y. En general, para determinar el área entre dos curvas, se usan:

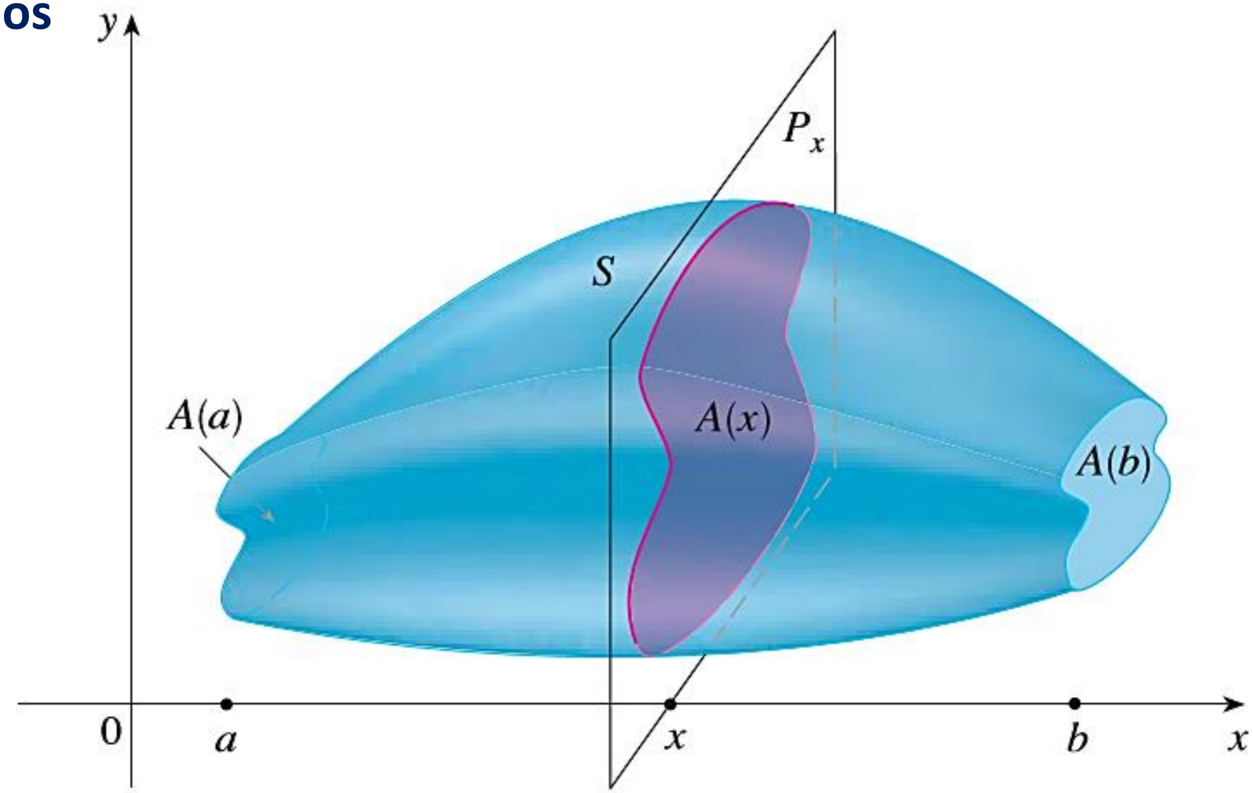
$$A = \int_{x_1}^{x_2} \underbrace{[(\text{curva de arriba}) - (\text{curva de abajo})]}_{\text{en la variable } x} \, dx \qquad \text{Rectángulos verticales.}$$

$$A = \int_{y_1}^{y_2} \underbrace{[(\text{curva derecha}) - (\text{curva izquierda})]}_{\text{en la variable } y} \, dy \qquad \text{Rectángulos horizontales.}$$

donde (x_1, y_1) y (x_2, y_2) son los puntos adyacentes de intersección de las dos curvas implicadas o puntos sobre las rectas de la frontera especificadas.

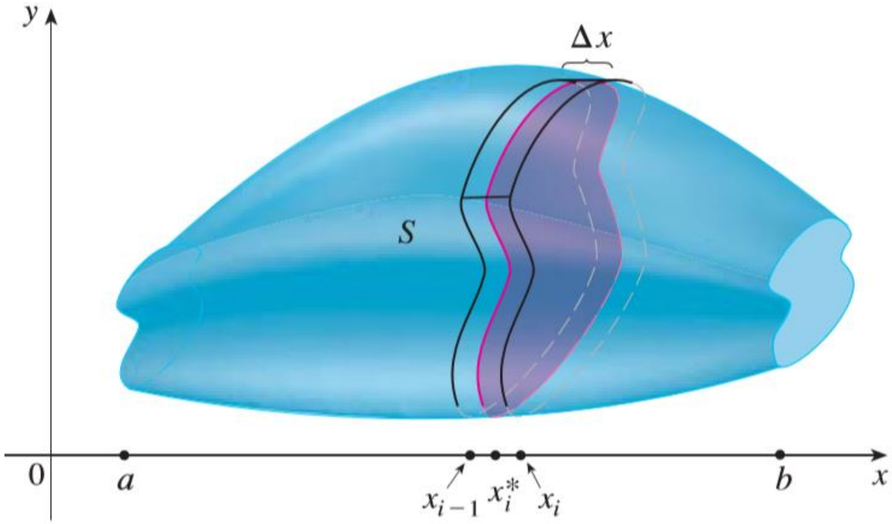
Método de Rebanadas por planos paralelos

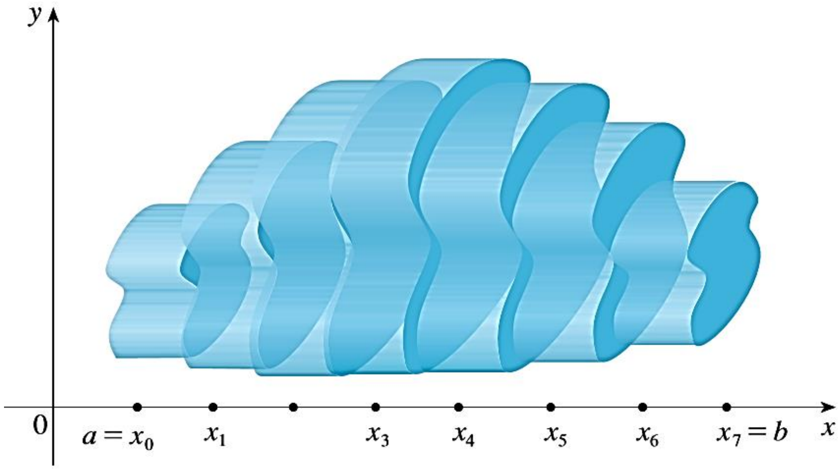
Cálculo de volúmenes por el método de las rebanadas mediante planos paralelos



Se inicia cortando a S con un plano y obteniendo una región plana que se denomina sección transversal de S. Sea $A(x)$ el área de la sección transversal de S en un plano P_x perpendicular al eje x, y que pasa por el punto x, donde $a \leq x \leq b$. El área de la sección transversal $A(x)$ variará cuando x se incrementa desde a hasta b.

Dividimos S en n "rebanadas" del mismo ancho Δx mediante los planos $P_{x_1}, P_{x_2}, \ldots$. Se eligen puntos muestra x_i^* en $[x_{i-1}, x_i]$ para tener un valor aproximado de la i-ésima rebanada S_i, por un cilindro cuya base tiene un área $A(x_i^*)$ y "altura" Δx.





El volumen de este cilindro es $A(x_i^*)\Delta x$ de modo que una aproximación a la concepción intuitiva del volumen de la i-ésima rebanada S_i es:

$$V(S_i) \approx A(x_i^*)\Delta x$$

Al sumar los volúmenes de estas rebanadas, se obtiene un valor aproximado del volumen total:

$$V \approx \sum_{i=1}^{n} A(x_i^*)\Delta x$$

Si las rebanadas son cada vez más delgadas ($n \to \infty$), se tiene una mejor aproximación. Se define el volumen como el límite de estas sumas cuando $n \to \infty$:

Definición de volumen: Sea S un sólido que está entre $x = a$ y $x = b$. Si el área del a sección transversal de S en el Plano P_x, a través de x y perpendicular al eje x, es $A(x)$, donde A es una función continua, entonces el volumen de S está dado por:

$$V = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} A(x_i^*)\Delta x = \int_a^b A(x)dx$$

Método de Discos

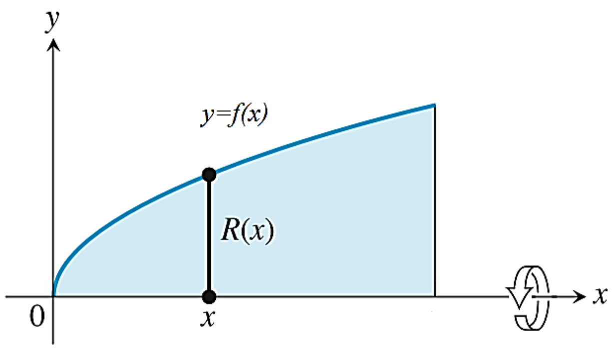
El sólido generado al hacer girar una región plana alrededor de un eje se denomina sólido de revolución. Para determinar el volumen de este tipo de sólidos es necesario observar que el área de la sección transversal $A(x)$ es el área de un disco de radio $R(x)$, la distancia de la frontera de la región plana al eje de revolución.

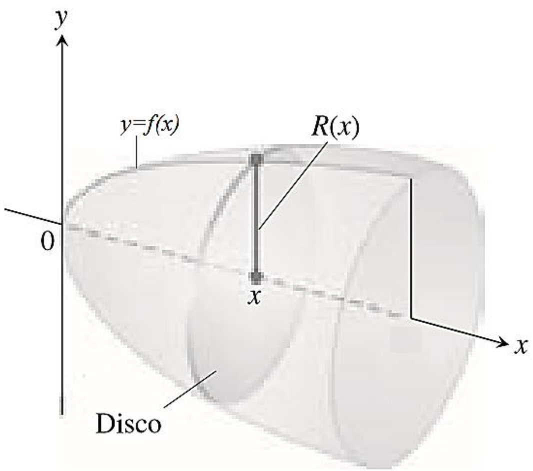
$$\boldsymbol{A(x) = \pi(radio)^2 = \pi[R(x)]^2}$$

En este caso la definición de volumen da:

Volumen por medio de discos al girar alrededor del eje x:

$$V = \int_a^b A(x)dx = \int_a^b \pi[R(x)]^2 dx$$





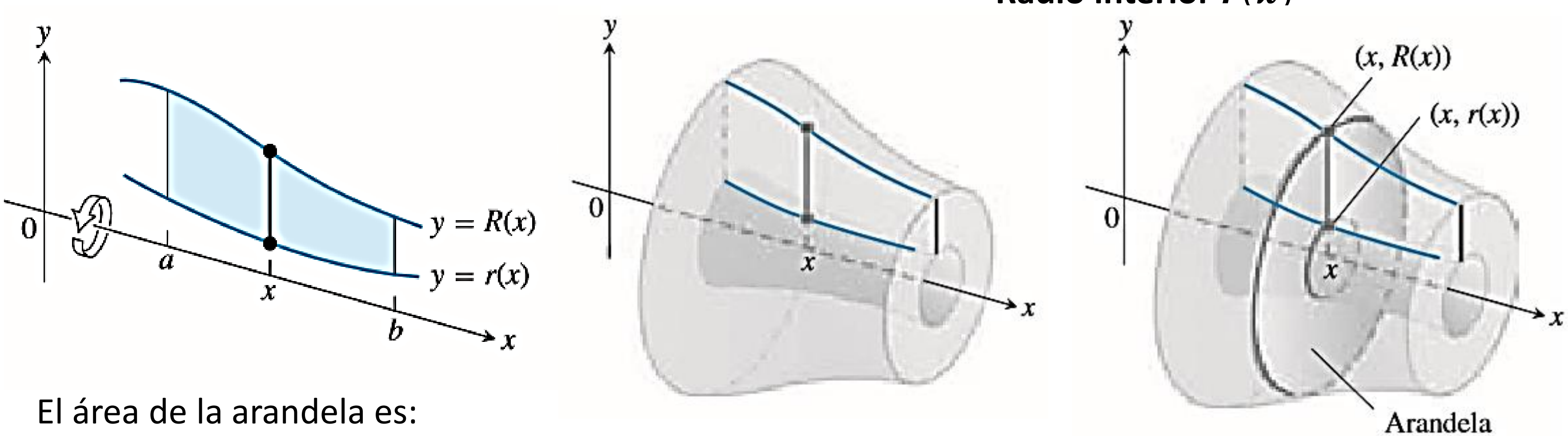
Volumen por medio de discos al girar alrededor del eje y:

$$V = \int_c^d A(y)dy = \int_c^d \pi[R(y)]^2 dy$$

Sólidos de revolución: El método de las arandelas

Si la región que gira para generar un sólido no cruza o no hace frontera con el eje de revolución, el sólido tendrá un agujero. Las secciones transversales perpendiculares al eje de revolución son arandelas. Las dimensiones de una arandela representativa son:

Radio exterior $R(x)$
Radio interior $r(x)$



El área de la arandela es:

$$A(x) = \pi\,[R(x)]^2 - \pi\,[r(x)]^2 = \pi\big([R(x)]^2 - [r(x)]^2\big)$$

En consecuencia, la definición de volumen da:

Volumen mediante arandelas para rotación alrededor del eje x:

$$V = \int_a^b A(x)dx = \int_a^b \pi\big([R(x)]^2 - [r(x)]^2\big)dx$$

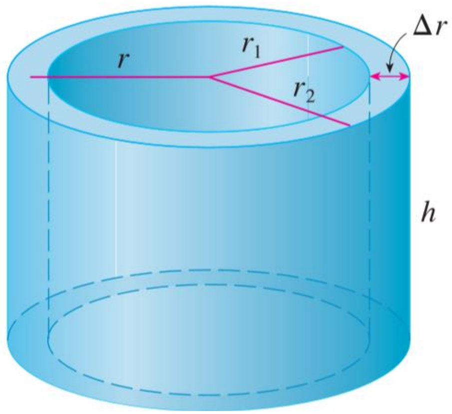
Volumen mediante arandelas para rotación alrededor del eje y:

$$V = \int_c^d A(y)dy = \int_c^d \pi\big([R(y)]^2 - [r(y)]^2\big)dy$$

Método de cascarones cilíndricos

Luego de hacer girar una curva f alrededor de un eje, en este caso y, para generar un sólido de revolución, se puede hallar su volumen aproximando la región con rectángulos con base en una partición P del intervalo cerrado $[a, b]$ donde se encuentra la región .

En la figura siguiente se ilustra un cascarón cilíndrico de radio interior r_1, radio exterior r_2 y altura h. Su volumen V se calcula como:



$$\mathbf{V} = \mathbf{V_2} - \mathbf{V_1} = \left(\boldsymbol{\pi r_2^2} - \boldsymbol{\pi r_1^2}\right)\boldsymbol{h}$$

$$= \boldsymbol{\pi}\left(\boldsymbol{r_2^2} - \boldsymbol{r_1^2}\right)\boldsymbol{h} = \boldsymbol{\pi}(\boldsymbol{r_2} + \boldsymbol{r_1})(\boldsymbol{r_2} - \boldsymbol{r_1})$$

$$= \mathbf{2}\boldsymbol{\pi}\left(\frac{\boldsymbol{r_2} + \boldsymbol{r_1}}{\mathbf{2}}\right)(\boldsymbol{r_2} - \boldsymbol{r_1})$$

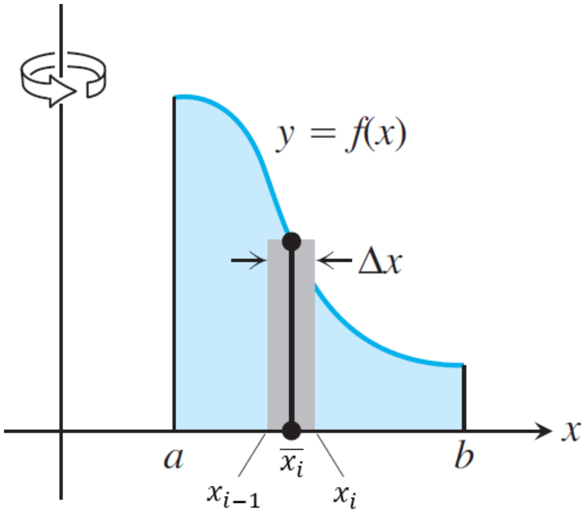
Considerando que $r = \frac{r_2+r_1}{2}$ y $\Delta \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r_2} - \boldsymbol{r_1}$, se tiene:

$$\mathbf{V} = \mathbf{2}\boldsymbol{\pi r h \Delta r}$$

V=$[circunferencia][altura][espesor]$

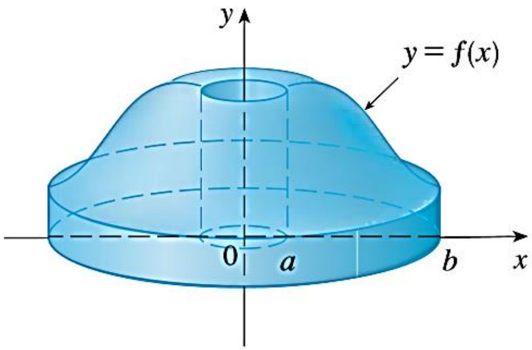
Cálculo de volúmenes por medio de cascarones cilíndricos

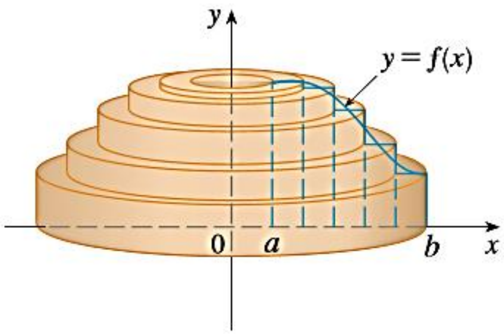
Luego de hacer girar una curva f alrededor de un eje, en este caso y, para generar un sólido de revolución, se puede hallar su volumen aproximando la región con rectángulos con base en una partición P del intervalo cerrado $[a, b]$ donde se encuentra la región .
Sea S el sólido que se obtiene al hacer girar alrededor del eje y a la región limitada por $y = f(x)$, donde $f(x) \geq 0, y = 0, x = a$ y $x = b$, donde $b > a \geq 0$.

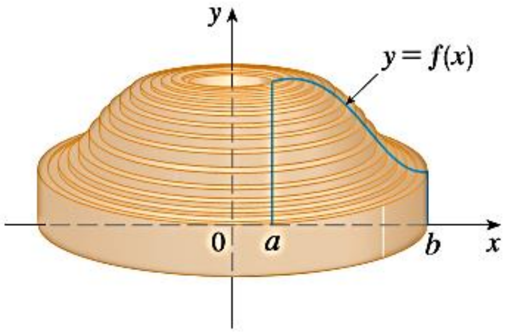


Se divide el intervalo $[a, b]$ en n subintervalos $[x_{i-1}, x_i]$ de igual anchura Δx y sea $\overline{x_i}$ el punto medio del i-ésimo subintervalo. Si el rectángulo de base $[x_{i-1}, x_i]$ y altura $f(\overline{x_i})$ se hace girar alrededor del eje y, entonces el resultado es un cascarón cilíndrico cuyo radio promedio es $\overline{x_i}$, altura $f(\overline{x_i})$ y espesor Δx, de modo que el volumen es:

$$V_i = 2\pi rh\Delta r = 2\pi(\overline{x_i})[f(\overline{x_i})]\Delta x$$







Por lo tanto, un volumen aproximado V del sólido S se obtiene mediante la suma de los volúmenes de estos cascarones:

$$V \approx \sum_{I=1}^{n} V_i = \sum_{i=1}^{n} 2\pi(\overline{x_i})[f(\overline{x_i})]\Delta x$$

Esta aproximación mejora cuando la norma de la partición tiende a cero ($n \to \infty$). Pero, de acuerdo con la definición de integral, se sabe que:

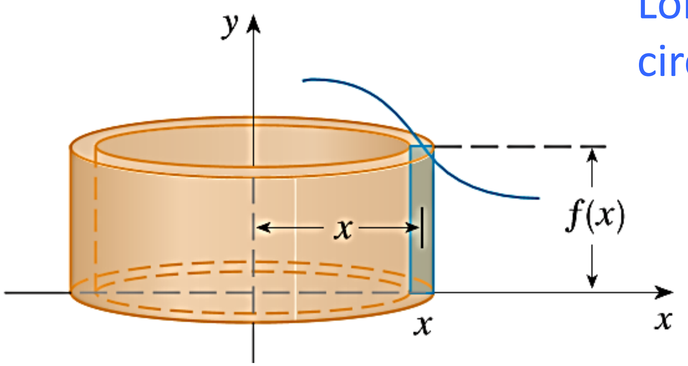
$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} 2\pi(\overline{x_i})[f(\overline{x_i})]\Delta x = \int_a^b 2\pi x f(x)dx$$

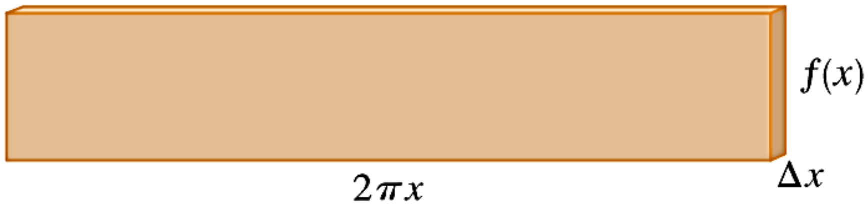
El volumen del sólido que se obtiene al hacer girar alrededor del eje y la región bajo la curva $y = f(x)$ desde a hasta b, es

$$V = \int_a^b 2\pi x f(x)dx \quad \text{donde } 0 \leq a < b$$

Pensar en el cascarón representativo, cortado y aplanado, con radio x, circunferencia $2\pi x$, altura $f(x)$ y espesor Δx o dx:

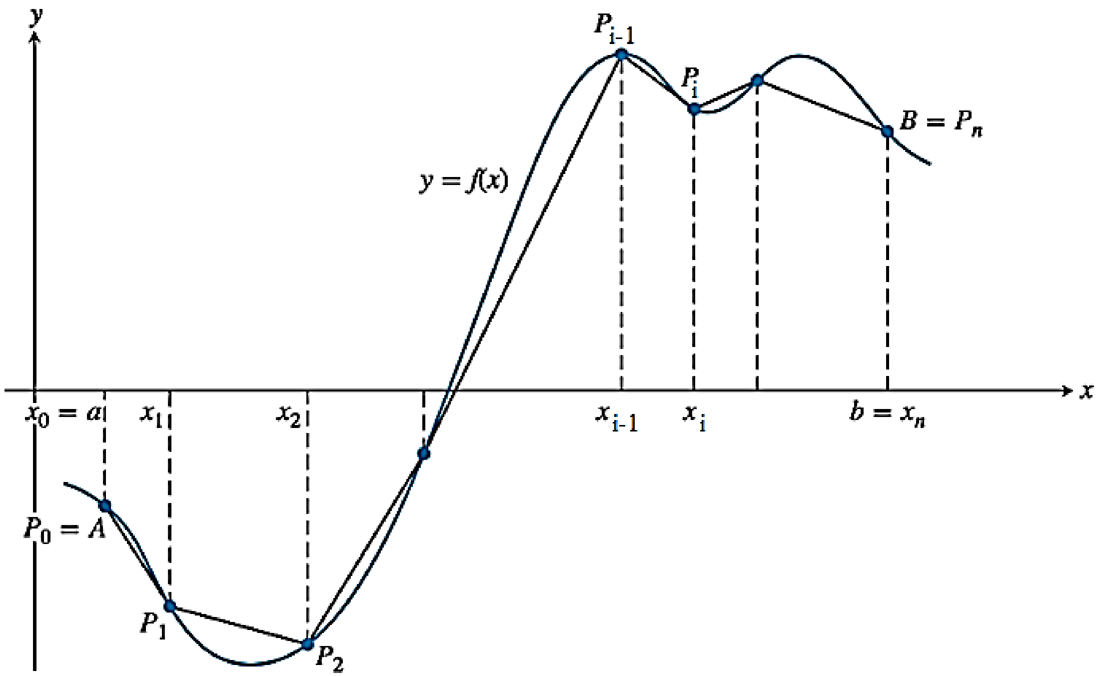
$$\int_a^b \underbrace{(2\pi x)}_{\text{Longitud de circunferencia}} \underbrace{[f(x)]}_{\text{altura}} \underbrace{dx}_{\text{espesor}}$$

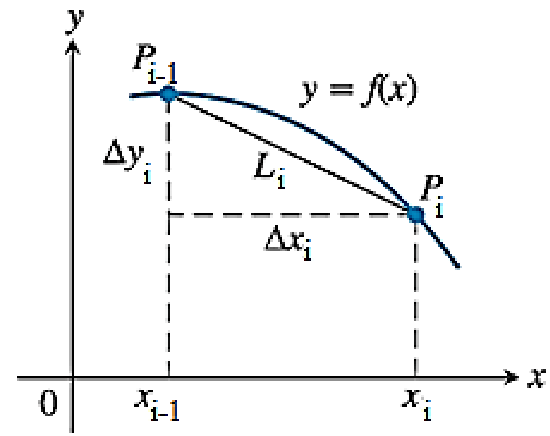




Longitud de arco de curva

Suponga que la curva cuya longitud es necesario determinar es la gráfica de la función $y = f(x)$ desde $x = a$ hasta $x = b$. Para deducir una fórmula integral para la longitud de curva se supone que: f tiene una derivada continua en todo punto$[a, b]$(función suave y su gráfica es una curva suave).





Se divide el intervalo $[a, b]$ en n subintervalos con $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$. Si $y_i = f(x_i)$, entonces el punto correspondiente $P_i(x_i, y_i)$ está en la curva. Luego, se unen los puntos consecutivos P_{i-1} y P_i con segmentos de recta que, juntos, forman una trayectoria poligonal cuya longitud aproxima la longitud de la curva. Si $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ y $\Delta y_i = y_i - y_{i-1}$, entonces, según Pitágoras, un segmento representativo en la trayectoria tiene longitud:

$$L = \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2}$$

Por lo que la longitud de la curva se aproxima por la suma:

$$\sum_{i=1}^{n} L_i = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2} \qquad \textbf{(1)}$$

Se espera que la aproximación mejore cuando la partición $[a, b]$ se haga más fina, es decir, que la norma de la partición tienda a cero. Ahora bien, se observa que el radicando está expresado en función de dos variables por lo cual se debe encontrar una expresión equivalente y válida que permita expresarlo en función de una única variable. Para ello, dado que $f(x)$ es continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b), se puede considerar que en el intervalo (x_{i-1}, x_i) existe un valor c_i para el cual se cumple el Teorema del valor medio de Lagrange, de modo que:

$$\Delta y_i = f'(c_i)\Delta x_i \qquad \textbf{(2)}$$

La expresión **(2)**se sustituye en **(1)** y se obtiene:

$$\sum_{i=1}^{n} L_i = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{(\Delta x_i)^2 + [f'(x_i)\Delta x_i]^2} = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + [f'(x_i)]^2}\, \Delta x_i \qquad \textbf{(3)}$$

Puesto que $\sqrt{1 + [f'(x_i)]^2}$ es continua en $[a, b]$, el límite de la suma de Riemman en el lado derecho de la ecuación (3) existe cuando la norma de la partición tiende a cero ($n \to \infty$):

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} L_i = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + [f'(x_i)]^2}\, \Delta x_i = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x_i)]^2}\, dx$$

Se defne el valor de dicha integral como la longitud de la curva.

DEFINICIÓN: Si f' es continua en $[a, b]$, entonces la longitud (longitud de arco) de la curva $y = f(x)$ desde el punto $A = (a, f(a))$ al punto $B = (b, f(b))$ es el valor de la integral:

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x_i)]^2}\, dx = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx$$

Área de superficie de revolución

Definición del área de una superficie

Si sólo se hace girar la curva frontera, eso no describe el volumen interior de un sólido, sino una superficie que rodea al sólido y forma parte de su frontera.

Se pueden hacer girar alrededor del eje x un segmento de recta horizontal (Figura 1) o un segmento de recta inclinado (Figura 2).

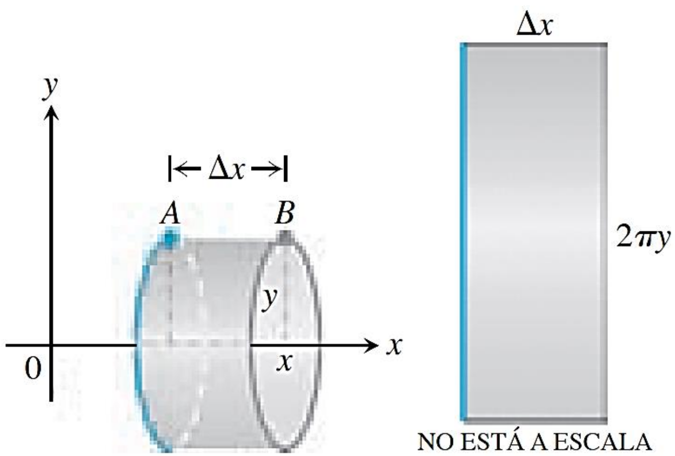


Figura 1

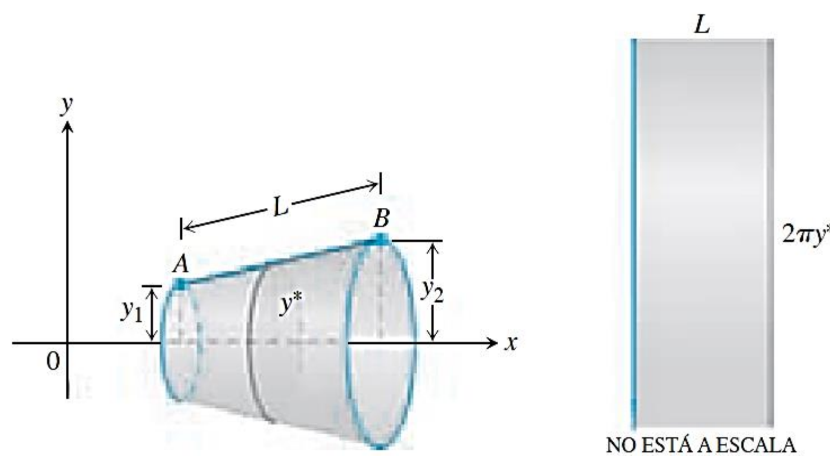
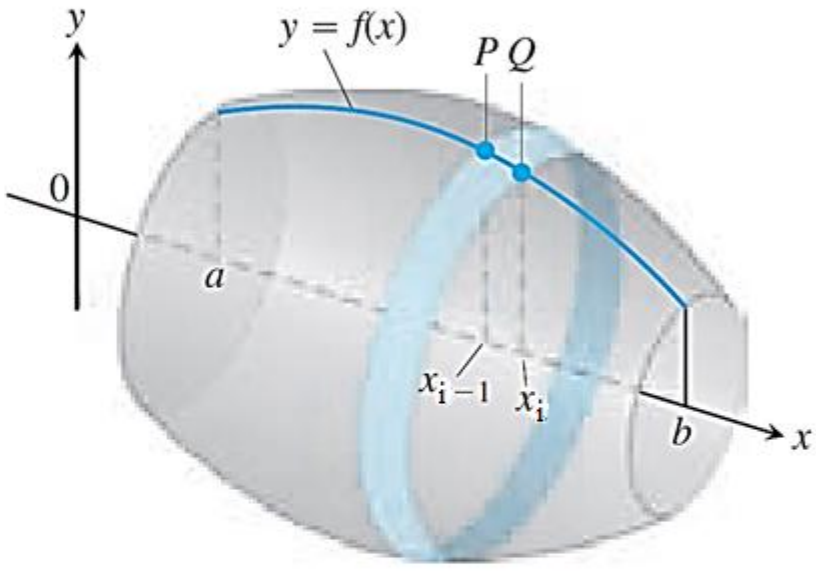


Figura 2

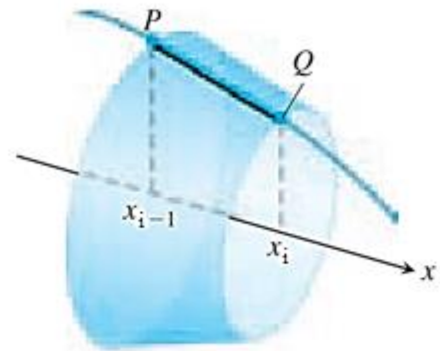
Si se hace girar alrededor del eje x un segmento de recta horizontal (Figura 1) , por ej. el segmento de recta horizontal *AB*, que tiene longitud Δx para generar un cilindro con área de superficie $2\pi y\Delta x$. Dicha área es la misma que la del rectángulo con lados de longitudes Δx y $2\pi y$. La longitud $2\pi y$ es la circunferencia del círculo de radio y generado al hacer girar, alrededor del eje x, el punto (x, y) en la línea *AB*.

Si se hace girar alrededor del eje x un segmento de recta inclinado (Figura 2) , por ej. el nuevo segmento *AB* tiene longitud L y está inclinado, en vez de ser horizontal. Cuando se hace girar alrededor del eje x, genera el tronco de un cono. El área de la superficie del tronco de un cono es $2\pi y^* L$, donde $y^* = \frac{y_1+y_2}{2}$ es la altura promedio, por encima del eje x, del segmento inclinado *AB*. Este área de superficie es la misma que la de un rectángulo con lados de longitud L y $2\pi y^*$.

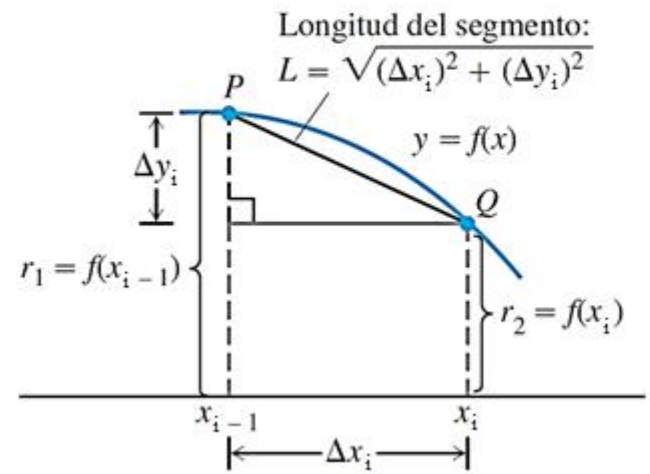
Para determinar el área de la superficie generada al hacer girar la gráfica de una función continua no negativa $y = f(x)$, $a \leq x \leq b$, alrededor del eje x, se divide el intervalo cerrado $[a, b]$ de la manera usual y se utilizan los puntos de la partición para subdividir la gráfica en pequeños arcos. Conforme el arco PQ gira alrededor del eje x, el segmento que une a P y Q barre el tronco de un cono cuyo eje está en el eje x.



(A)



(B)



(C)

El área de la superficie de este tronco aproxima el área de la superficie de la banda barrida por el arco *PQ* (Figuras A y B).

Área de la superficie del tronco del cono=$2\pi y^* L$

Como $f \geq 0$, la altura promedio del segmento de recta es $y^* = (f(x_{i-1}) + f(x_i))/2$ y la longitud inclinada es: $L = \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2}$:

Área de la superficie del tronco del cono=$2\pi \cdot \frac{f(x_{i-1})+f(x_i)}{2} \cdot \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2}$

$$=\pi \cdot [f(x_{i-1}) + f(x_i)] \cdot \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2}$$

El área de la superficie original, es la suma de las áreas de las bandas barridas por los arcos como el PQ, y se aproxima por medio de la suma de las áreas de los troncos:

$$A \approx \sum_{k=1}^{n} \pi \cdot [f(x_{i-1}) + f(x_i)] \cdot \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2} \qquad \textbf{(1)}$$

La aproximación mejora conforme la partición $[a, b]$ se hace más fina. Como f es diferenciable, entonces por el teorema del valor medio de Lagrange, existe un punto $(c_i, f\ (c_i))$ en la curva entre P y Q donde la tangente es paralela al segmento PQ:

$$f'(c_i) = \frac{\Delta y_i}{\Delta x_i} \Rightarrow \Delta y_i = f'(c_i) \cdot \Delta x_i \qquad \textbf{(2)}$$

Reemplazando (2) en (1) se tiene:

$$A \approx \sum_{k=1}^{n} \pi \cdot [f(x_{i-1}) + f(x_i)] \cdot \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (f'(c_i) \cdot \Delta x_i)^2} = \sum_{k=1}^{n} \pi \cdot [f(x_{i-1}) + f(x_i)] \cdot \sqrt{1 + \left(f'(c_i)\right)^2} \cdot \Delta x_i$$

Cuando Δx es pequeño, se tiene que $f(x_i) \approx f(c_i)$ y también $f(x_{i-1}) \approx f(c_i)$, puesto que f es continua. Por lo tanto:

$$A \approx \sum_{k=1}^{n} \pi \cdot 2 \cdot f(c_i) \cdot \sqrt{1 + \left(f'(c_i)\right)^2} \cdot \Delta x_i \qquad \textbf{(3)}$$

La aproximación anterior mejora cuando la norma de la partición de [a, b] tiende a cero, reconociendo a **(3)** como una suma de Riemman, la suma converge a la integral:

$$\int_{a}^{b} 2\,\pi\, f(x)\sqrt{1+\left(f'(x)\right)^{2}}\,dx$$

Se define la integral como el área de la superficie barrida por la gráfica de f de a a b.

DEFINICIÓN: Si la función $f(x) \geq 0$ es continuamente diferenciable en [a, b], el área de la superficie generada al hacer girar alrededor del eje x la curva $y = f(x)$ es:

$$S = \int_{a}^{b} 2\,\pi\, y\,\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^{2}}\,dx = \int_{a}^{b} 2\,\pi\, f(x)\sqrt{1+\left(f'(x)\right)^{2}}\,dx$$

DEFINICIÓN: Si $x = g(y) \geq 0$ es continuamente diferenciable en $[c, d]$, el área de la superficie generada al hacer girar alrededor del eje y la curva $x = g(y)$ es:

$$S = \int_{c}^{d} 2\,\pi\, x\,\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^{2}}\,dx = \int_{a}^{b} 2\,\pi\, g(y)\sqrt{1+\left(g'(y)\right)^{2}}\,dy$$

SERIE GEOMÉTRICA

Dada la **serie geométrica:**

$$a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} ar^n$$

Donde a y r son números reales fijos y $a \neq 0$ pudiendo ser la razón r **positiva** o **negativa**, se cumple que:

-Si $|\boldsymbol{r}| < \mathbf{1}$, la serie geométrica converge y tiene por suma a $\frac{\boldsymbol{a}}{\mathbf{1}-\boldsymbol{r}}$, es decir,$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = \frac{a}{1-r}$

-Si $|\boldsymbol{r}| \geq \mathbf{1}$, la serie diverge.

Demostración:

- Si $\boldsymbol{r} = \mathbf{1}$, la n-ésima suma parcial de la serie geométrica es:

$$s_n = a + a(1) + a(1)^2 + \cdots + a(1)^{n-1} = na$$

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} an = \pm\infty \text{ (según sea el signo de } a\text{)}$$

Por lo tanto, la **Serie diverge.**

- Si $\boldsymbol{r} = -\mathbf{1}$, se tiene que las sumas pueden ser pares o impares:

Sumas pares: $s_{2m} = 0$ (Ej.$s_4 = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 = 0$)

Sumas impares: $s_{2m-1} = a$ (Ej.$s_3 = a_1 - a_2 + a_3 = a$)

Por lo tanto, la **serie diverge** porque las *n-ésimas* sumas parciales alternan entre a y 0, según se trate de sumas impares o pares respectivamente.

Si $|\boldsymbol{r}| \neq \mathbf{1}$ la convergencia o divergencia se determina de la siguiente forma:

$s_n = a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1}$

Multiplico s_n por r en ambos miembros.

$r \cdot s_n = ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} + ar^n$

Resta rs_n de s_n. La mayoría de los términos del miembro derecho de la ecuación se cancelan.

$s_n - rs_n = a - ar^n$

Factoriza en ambos miembros y se despeja s_n en el izquierdo.

$$\boldsymbol{s_n = \frac{a(1 - r^n)}{1 - r} \qquad r \neq 1}$$

Ahora se halla el límite de s_n cuando $n \to \infty$:

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \frac{a(1 - r^n)}{1 - r} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{a}{1 - r} - \frac{ar^n}{1 - r} \right)$$

Si $\boldsymbol{r} \neq \mathbf{1}$, n aparece sólo en el segundo término del último miembro de la igualdad y se cumple que:

Si $|\boldsymbol{r}| < \mathbf{1}$**,** entonces $r^n \to 0$ cuando $n \to \infty$ y $\boldsymbol{s_n \to \frac{a}{1-r}}$

Si $|\boldsymbol{r}| > \mathbf{1}$, entonces $|r^n| \to \infty$ cuando $n \to \infty$ y la serie diverge.

Conclusión:

Si $|\boldsymbol{r}| < \mathbf{1}$, la serie geométrica $a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} + \cdots$ converge y por lo tanto existe su suma la cual se calcula como:

$$s_n = \sum_{n=0}^{\infty} ar^n = \sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = \frac{a}{1 - r}$$

Si $|\boldsymbol{r}| \geq \mathbf{1}$, la serie diverge.

Con lo que queda demostrado el teorema.

Condición necesaria para la convergencia de las series numéricas

Enunciado: una condición necesaria para la convergencia de la serie es que el término general o *n-ésimo* término tienda a cero cuando n tiende a infinito, es decir: $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

Hipótesis:

s_n sucesión de sumas parciales de la serie dada y s_{n-1} convergentes.

$\lim_{n\to\infty} s_n = S$ (único y finito)

Cuando n es grande, tanto s_n como s_{n-1} están cerca de S.

$\lim_{n\to\infty} s_{n-1} = S$ (único y finito)

Tesis: $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

Demostración:

Sea $\{s_n\}$ la sucesión de sumas parciales para la serie dada, si ésta es convergente se verifica entonces que su límite para n tendiendo a infinito, es único y finito, y además es igual a la suma. Es decir,

$\lim_{n\to\infty} s_n = S$ (finito)

$\lim_{n\to\infty} s_{n-1} = S$ (finito)

Como $a_n = s_n - s_{n-1}$, se tiene:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} s_n - \lim_{n\to\infty} s_{n-1} = S - S = 0$$

Por lo tanto: $\boldsymbol{\lim_{n\to\infty} a_n = 0}$

Con lo que se verifica la tesis.

El teorema da sólo la condición necesaria para la convergencia de una serie, pero no la condición suficiente, pues existen series cuyo término n-ésimo o general tiende a cero y son divergentes.

$$\boldsymbol{\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \nRightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n}$$

El criterio del término *n*-ésimo para una serie divergente

TEOREMA:

Si $\sum_{i=1}^{\infty} a_n$ converge, entonces $a_n \rightarrow 0.$

Prueba: observar que $\lim_{n\to\infty} a_n$ tiene que ser igual a cero si la serie $\sum_{i=1}^{\infty} a_n$ converge. Para entenderlo, se hace que S represente la suma de la serie y que

$$s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

sea la n-ésima suma parcial. Cuando n es grande, tanto s_n como s_{n-1} están cerca de S, por lo cual su diferencia, a_n es próxima a cero.

$$a_n = s_n - s_{n-1} \rightarrow S - S = 0$$

Criterio del término *n*-ésimo para la divergencia

$\sum_{i=1}^{\infty} a_n$ diverge si $\lim_{n\to\infty} a_n$ no existe o si es diferente de cero.

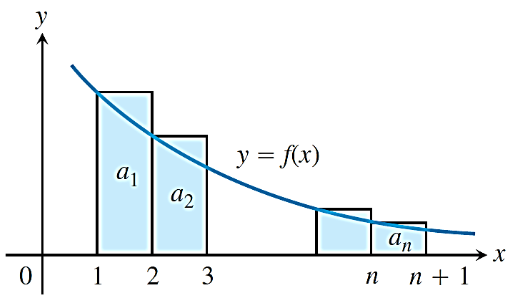
Criterio de la integral

TEOREMA

Sea $\{a_n\}$ una sucesión de términos positivos. Suponga que $a_n = f(n)$, donde f es una función decreciente, positiva y continua de x para toda $x \geq N$ (N es un entero positivo). Entonces, la serie $\sum_{n=N}^{\infty} a_n$ y la integral $\int_N^{\infty} f(x)\, dx$ convergen o divergen ambas.

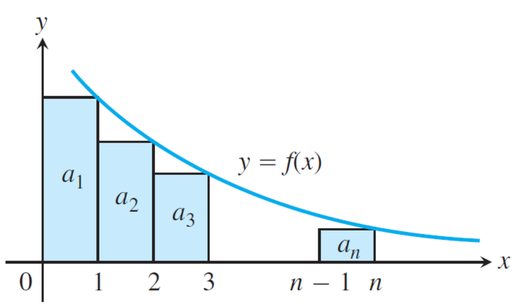
Demostración:

Se establece el criterio para $N = 1$. Se supone que f es una función decreciente con $f(n) = a_n$ para toda n. Se observa que los rectángulos que tienen áreas $a_1, a_2, \dots, a_n$ encierran más área que la que está debajo de la curva $y = f(x)$, desde $x = 1$ a $x = n + 1$:



$$\int_1^{n+1} f(x)dx \leq a_1 + a_2 + \cdots + a_n \qquad \textbf{(1)}$$

Ahora se colocan los rectángulos a la izquierda en lugar de en la derecha. Si no se considera el primer rectángulo de área $a_1$se observa que:



$$a_2 + a_3 + \cdots + a_n \leq \int_1^{n} f(x)dx \qquad \textbf{(2)}$$

Si se considera el primer rectángulo de área a_1 en la expresión (2), se tiene:

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n \leq a_1 + \int_1^{n} f(x)dx \qquad \textbf{(3)}$$

Demostración (Continuación):

Al combinar los resultados de (1) y (3), se obtiene:

$$\int_1^{n+1} f(x)dx \leq a_1 + a_2 + \cdots + a_n \leq a_1 + \int_1^n f(x)\,dx$$

Tales desigualdades se cumplen para cada n y se continúan cumpliendo cuando $n \to \infty$.

Si $\int_1^\infty f(x)\,dx$ es finita, la desigualdad del lado derecho indica que $\sum a_n$ es finita.

Esto significa que si la integral impropia $\int_1^\infty f(x)\,dx$ converge, la serie también converge.

Si $\int_1^\infty f(x)\,dx$ es infinita, la desigualdad del lado izquierdo indica que $\sum a_n$ es infinita.

Esto significa que si la integral impropia $\int_1^\infty f(x)\,dx$ diverge, la serie también diverge.

De aquí que la serie y la integral son convergentes o divergentes ambas.

NOTA IMPORTANTE: *No se* debe inferir que, de acuerdo con la prueba o criterio de la integral, la suma de la serie es igual al valor de la integral.

Convergencia de la Serie p

Demuestre que la **serie *p***

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = \frac{1}{1^p} + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \cdots + \frac{1}{n^p} + \cdots$$

(p, un real constante), converge si $p > 1$ y diverge si $p \leq 1$.

Solución Si $p > 1$, entonces $f(x) = 1/x^p$ es una función positiva decreciente de x. Ya que

$$\begin{aligned}
\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p}\,dx = \int_1^{\infty} x^{-p}\,dx &= \lim_{b\to\infty} \left[\frac{x^{-p+1}}{-p+1}\right]_1^b \\
&= \frac{1}{1-p} \lim_{b\to\infty} \left(\frac{1}{b^{p-1}} - 1\right) \\
&= \frac{1}{1-p}(0-1) = \frac{1}{p-1},
\end{aligned}$$

$b^{p-1} \to \infty$ cuando $b \to \infty$ ya que $p - 1 > 0$.

por el criterio de la integral, la serie converge. Enfatizamos que la suma de la serie p *no* es $1/(p-1)$. La serie converge, pero no sabemos a qué valor converge.

Si $p < 1$, entonces $1 - p > 0$ y

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p}\,dx = \frac{1}{1-p} \lim_{b\to\infty} (b^{1-p} - 1) = \infty.$$

Por el criterio de la integral, la serie diverge.

Si $p = 1$, tenemos la serie armónica (divergente)

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots.$$

Tenemos la convergencia para $p > 1$, pero divergencia para cualquier otro valor de p. ■

La serie p, con $p = 1$, es la **serie armónica** (ejemplo 1). El criterio de la serie p indica que la serie armónica es divergente sólo *por poco*; si por ejemplo aumentamos p a 1.000000001, ¡la serie es convergente!

La lentitud con la que las sumas parciales de la serie armónica se aproximan a infinito es impresionante. Por ejemplo, para que las sumas parciales sean mayores que 20, se deben tomar alrededor de 178 millones de términos.

Criterio de comparación

Teorema: Criterio de comparación

Sea $\sum a_n$, $\sum c_n$ y $\sum d_n$ series con términos no negativos. Suponga que para algún entero N, $d_n \leq a_n \leq c_n$ para toda $n > N$

a. Si $\sum c_n$ converge, entonces $\sum a_n$ también converge.

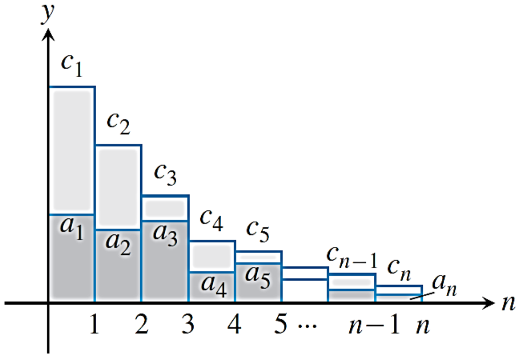
b. Si $\sum d_n$ diverge, entonces $\sum a_n$ también diverge.

Demostración

En el inciso a) las sumas parciales $\sum a_n$ están acotadas por abajo por:

$$M = a_1 + a_2 + \cdots + a_N + \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n$$

Por tanto, forman una sucesión no decreciente con un límite $L \leq M$. Esto es, si $\sum c_n$ converge, entonces también $\sum a_n$.



En el inciso b) las sumas parciales $\sum a_n$ no están acotadas por arriba. Si lo fueran, las sumas parciales $\sum d_n$ estarían acotadas por por:

$$M^* = d_1 + d_2 + \cdots + d_N + \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n$$

Y $\sum d_n$ debería ser convergente en vez de divergente.

Criterio de comparación del Límite

Teorema: Criterio de comparación del límite

Suponga que $a_n > 0$ y $b_n > 0$ para toda $n \geq N$ (N, un entero).

1. Si $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = c > 0$, entonces $\sum a_n$ y $\sum b_n$ convergen o divergen ambas.
2. Si $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$, y $\sum b_n$ converge, entonces $\sum a_n$ converge.
3. Si $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \infty$, y $\sum b_n$ diverge, entonces $\sum a_n$ diverge.

Demostración *(Parte 1)*

Como $\frac{c}{2} > 0$, existe un entero N tal que para toda n:

$n > N \Longrightarrow \left|\frac{a_n}{b_n} - c\right| < \frac{c}{2}$ Definición de Límite con $\varepsilon = c/2$, $L = c$ y a_n reemplazado por a_n/b_n

Así, para $n > N$,

$$-\frac{c}{2} < \frac{a_n}{b_n} - c < \frac{c}{2}$$

$$-\frac{c}{2} + c < \frac{a_n}{b_n} - c + c < \frac{c}{2} + c$$

$$\frac{c}{2} < \frac{a_n}{b_n} < \frac{3c}{2}$$

$$\left(\frac{c}{2}\right) b_n < a_n < \left(\frac{3c}{2}\right) b_n$$

Si $\sum b_n$ converge, entonces $\left(\frac{3c}{2}\right) b_n$ converge y $\sum a_n$ converge por criterio de comparación directa.

Si $\sum b_n$ diverge, entonces $\left(\frac{c}{2}\right) b_n$ diverge y $\sum a_n$ diverge por criterio de comparación directa.

Criterio de la razón o cociente

Teorema: Criterio de la razón o del cociente

Sea $\sum a_n$ una serie con términos positivos y suponga que:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \rho$$

Entonces:

a. La serie converge si $\rho < 1$.

b. La serie diverge si $\rho > 1$ o si ρ es infinito.

c. El criterio no es concluyente si $\rho = 1$.

Demostración

a. **Si $\rho < 1$**. Sea r un número entre ρ y 1. Entonces $\varepsilon = r - \rho$ es positivo. Como:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \to \rho$$

Entonces $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ debe estar entre ε y ρ cuando n es suficientemente grande, es decir para toda $n \geq N$ **(definición de límite!)**. En particular,

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < \rho + \varepsilon = r, \text{ cuando } n \geq N$$

Esto es,

$$a_{N+1} < ra_N$$
$$a_{N+2} < ra_{N+1} < r^2 a_N$$
$$a_{N+3} < ra_{N+2} < r^3 a_N$$
$$\vdots$$
$$a_{N+m} < ra_{N+(m-1)} < r^m a_N$$

Los términos de las series, a partir del n-*ésimo* término, se aproximan a cero más rápidamente que los términos en una serie geométrica con razón $r < 1$.

Consideremos la serie $\sum c_n$, donde $c_n = a_n$ para $n = 1,2, \dots, n$

$c_{N+1} = ra_N$, $c_{N+2} = r^2 a_N$, ….., $c_{N+m} = r^m a_N$

Ahora $a_n \leq c_n$ para toda n y

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_{N-1} + a_N + ra_N + r^2 a_N + \cdots = a_1 + a_2 + \cdots + a_{N-1} + a_N(1 + r + r^2 + \cdots)$$

Como se había supuesto que $|r| < 1$, entonces la serie geométrica de la derecha converge. Esto hace que $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ converja.

Como $a_n \leq c_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge por criterio de comparación.

Demostración (continuación)

b. **Si $1 < \rho \leq \infty$**. A partir de cierto índice M,

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1 \qquad \text{y} \qquad a_M < a_{M+1} < a_{M+2} < \cdots$$

Los términos de la serie no tienden a cero cuando n tiende a infinito, de manera que por el criterio del n-ésimo término, la serie diverge.

c. **Si $\rho = 1$**.

Las dos series $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ y $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$

demuestran que debe utilizarse algún otro criterio para convergencia cuando $\rho = 1$

Para $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1/(n+1)}{1/n} = \frac{n}{n+1} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1$$

Para $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1/(n+1)^2}{1/n^2} = \frac{n^2}{n^2+2n+1} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n^2+2n+1} = 1$$

en ambos casos $\rho = 1$, pero la primera serie diverge y la segunda converge.

Con frecuencia, este criterio es efectivo cuando los términos de una serie contienen factoriales de expresiones que incluyen a n o expresiones elevadas a un exponente que incluye a n.

Criterio de la raíz

Teorema: Criterio de la raíz

Sea $\sum a_n$ una serie con términos positivos y suponga que:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \rho$$

Entonces:

a. La serie converge si $\rho < 1$.

b. La serie diverge si $\rho > 1$ o si ρ es infinito.

c. El criterio no es concluyente si $\rho = 1$.

Convergencia Absoluta y Convergencia Condicional

DEFINICIÓN: Una serie $\sum a_n$ **converge absolutamente** (es absolutamente convergente) si la serie correspondiente de valores absolutos, $\sum |a_n|$ converge.

DEFINICIÓN: Una serie que converge, pero no converge absolutamente, **converge condicionalmente**.

TEOREMA: Criterio de la convergencia absoluta

Si $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ converge, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.

Demostración Para cada n,

$$-|a_n| \leq a_n \leq |a_n|, \qquad \text{de manera que} \qquad 0 \leq a_n + |a_n| \leq 2|a_n|.$$

Si $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ converge, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} 2|a_n|$ converge y, por el criterio de comparación directa, la serie no negativa $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + |a_n|)$ converge. La igualdad $a_n = (a_n + |a_n|) - |a_n|$ nos permite expresar $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ como la diferencia de dos series convergentes:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + |a_n| - |a_n|) = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + |a_n|) - \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|.$$

Por lo tanto, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge. ■

RESUMEN DE CRITERIOS

1. **Criterio del n-ésimo término** A menos que $a_n \to 0$, la serie diverge.
2. **Serie geométrica:** La serie $\sum ar^n$ converge si $|r| < 1$; de otra forma, diverge.
3. **Serie p:** La serie $\sum 1/n^p$ converge si $p > 1$; de otra forma, diverge.
4. **Series con términos no negativos:** Intente con el criterio de la integral, el criterio de la razón o el criterio de la raíz. Compare con una serie conocida con el criterio de la comparación.
5. **Series con algunos términos negativos:** ¿La serie $\sum |a_n|$ converge? Si la respuesta es sí, $\sum a_n$ también lo hace, ya que convergencia absoluta implica convergencia.
6. **Series alternantes:** $\sum a_n$ converge si la serie satisface las condiciones del criterio de la serie alternante.