DEMOSTRACIONES

Elementos de Cálculo I

Dra. Ing. Calvo Olivares, Romina

REGLAS DE DERIVACIÓN

Derivada de una función constante:

Si $f(x) = c \Rightarrow \frac{\boldsymbol{df(x)}}{\boldsymbol{dx}} = \boldsymbol{f'(x) = 0}$

Demostración: $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{c-c}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} 0 = 0$

Derivada de una función potencia:

Si $f(x) = x^n \Rightarrow \boldsymbol{\frac{df(x)}{dx} = f'(x) = nx^{n-1}}$

Para toda x donde las potencias x^n y x^{n-1} estén definidas.

Demostración: si n es un entero positivo mayor que 1, entonces el desarrollo del binomio resulta:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x)^n - x^n}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x^n + nx^{n-1}(\Delta x) + \frac{n(n-1)x^{n-2}}{2}(\Delta x)^2 + \cdots + (\Delta x)^n - x^n}{\Delta x}$$

Elimino el primer y último término por suma de opuestos, y simplificando los términos restantes con el denominador, resulta:

$$= \lim_{\Delta x \to 0} nx^{n-1} + \frac{n(n-1)x^{n-2}}{2}(\Delta x) + \cdots + (\Delta x)^{n-1} = \boldsymbol{nx^{n-1} + 0 + \cdots + 0}$$

Derivada de un múltiplo constante:

Si $f(x)$ es una función derivable de x y c una constante, entonces:

$$\frac{\boldsymbol{d(c.f(x))}}{\boldsymbol{dx}} = \mathbf{c} \cdot \frac{\boldsymbol{df(x)}}{\boldsymbol{dx}} = \mathbf{c} \cdot \boldsymbol{f'(x)}$$

En particular, si $n \in \mathbb{R}$: $\frac{\boldsymbol{d(c.x^n)}}{\boldsymbol{dx}} = \boldsymbol{cnx^{n-1}}$

Demostración:

$$\frac{d}{dx}cf(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{cf(x+\Delta x) - cf(x)}{\Delta x}$$

$$= c \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = c.\frac{df(x)}{dx}$$

$$\frac{\boldsymbol{d}}{\boldsymbol{dx}}\boldsymbol{cf(x)} = \boldsymbol{c}.\frac{\boldsymbol{df(x)}}{\boldsymbol{dx}} = \mathbf{c} \cdot \boldsymbol{f'(x)}$$

Derivada de una suma/resta de funciones:

Si f y g son funciones derivables de x, entonces su suma $f \pm g$ es derivable en cada punto donde tanto f como g son derivables. En tales puntos:

$$\boldsymbol{\frac{d(f \pm g)}{dx} = \frac{df}{dx} \pm \frac{dg}{dx} = f'(x) \pm g'(x)}$$

Demostración:

$$\boldsymbol{\frac{d}{dx}[f(x) + g(x)]} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{[f(x+\Delta x) + g(x+\Delta x)] - [f(x) + g(x)]}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{[f(x+\Delta x) - f(x)] + [g(x+\Delta x) - g(x)]}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x} = \frac{df}{dx} + \frac{dg}{dx}$$

$$= \boldsymbol{f'(x) + g'(x)}$$

Derivada de un producto de funciones:

Si f y g son funciones derivables de x, entonces también lo es su producto $f \cdot g$ y:

$$\frac{d(f.g)}{dx} = f\frac{dg}{dx} + g\frac{df}{dx} = f(x)g'(x) + g(x)f'(x)$$

Demostración:

$$\frac{d}{dx}(fg) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)g(x+\Delta x) - f(x)g(x)}{\Delta x}$$

Para cambiar esta fracción en una equivalente que contenga los cocientes de diferencias para las derivadas de f y g, en el numerador se suma y resta convenientemente $f(x+\Delta x)g(x)$.

$$\frac{d}{dx}(fg) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)g(x+\Delta x) - f(x)g(x) + f(x+\Delta x)g(x) - f(x+\Delta x)g(x)}{\Delta x}$$

Se agrupan convenientemente el primer y cuarto término, y el segundo y tercer término:

$$\frac{d}{dx}(fg) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{[f(x+\Delta x)g(x+\Delta x) - f(x+\Delta x)g(x)] + [-f(x)g(x) + f(x+\Delta x)g(x)]}{\Delta x}$$

$$\frac{d}{dx}(fg) = \lim_{\Delta x \to 0} \left[f(x+\Delta x)\frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x} + g(x)\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \right]$$

$$\frac{d}{dx}(fg) = \lim_{\Delta x \to 0} f(x+\Delta x) \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} g(x) \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Cuando Δx se aproxima a cero, $f(x+\Delta x) \to f(x)$, ya que $f(x)$, al ser derivable en x, es continua en x. Las dos fracciones tienden a los valores de df/dx en x y a dg/dx en x. Finalmente $\lim_{\Delta x \to 0} g(x) = g(x)$. En síntesis,

$$\frac{d}{dx}(fg) = f\frac{dg}{dx} + g\frac{df}{dx} = f(x)g'(x) + g(x)f'(x)$$

Derivada del cociente de funciones:

Si f y g son funciones derivables de x, y si $g(x) \neq 0$ entonces el cociente f/g es derivable en x:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{g\frac{df}{dx} - f\frac{dg}{dx}}{g^2} = \frac{g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$$

Demostración:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{f}{g}\right)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\dfrac{f(x+\Delta x)}{g(x+\Delta x)}-\dfrac{f(x)}{g(x)}}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{g(x)\cdot f(x+\Delta x)-f(x)\cdot g(x+\Delta x)}{\Delta x\cdot g(x+\Delta x)\cdot g(x)}$$

Para modificar la última fracción en una equivalente que contenga los cocientes de diferencias para las derivadas de f y g, en el numerador se resta y suma $f(x)g(x)$:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{f}{g}\right)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{g(x)\cdot f(x+\Delta x)-f(x)\cdot g(x+\Delta x)+f(x)g(x)-f(x)g(x)}{\Delta x\cdot g(x+\Delta x)\cdot g(x)}$$

Agrupo términos convenientemente:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{f}{g}\right)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{g(x)\cdot f(x+\Delta x)-f(x)g(x)-f(x)\cdot g(x+\Delta x)+f(x)g(x)}{\Delta x\cdot g(x+\Delta x)\cdot g(x)}$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{f}{g}\right)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\dfrac{g(x)\cdot[f(x+\Delta x)-f(x)]}{\Delta x}-\dfrac{f(x)\cdot[g(x+\Delta x)+g(x)]}{\Delta x}}{g(x+\Delta x)\cdot g(x)}$$

Si se toman los límites en el numerador y en el denominador, se obtendrá la regla del cociente:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{f}{g}\right)=\frac{g\dfrac{df}{dx}-f\dfrac{dg}{dx}}{g^2}=\frac{g(x)f'(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)}$$

Demostración de la regla de la potencia (exponentes enteros negativos)

Si n es un entero negativo menor que 1, entonces existe un entero positivo k tal que $n = -k$. Por tanto, usando la regla del cociente:

$$\frac{d}{dx}[x^n] = \frac{d}{dx}\left[\frac{1}{x^k}\right] = \frac{x^k(0)-(1)(kx^{k-1})}{\left(x^k\right)^2}$$

Regla del cociente y de la potencia

$$= \frac{0-kx^{k-1}}{x^{2k}} = -kx^{-k-1} \quad n = -k$$

$$= nx^{n-1}$$

Derivada de la función seno: $\frac{d}{dx}(\boldsymbol{sen\ x}) = \boldsymbol{cos\ x}$

Demostración: derivada del $sen\ x$:

$$\frac{d}{dx}(\boldsymbol{sen\ x}) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{sen\ (x+\Delta x) - sen\ x}{\Delta x}$$

Aplico identidad trigonométrica del seno de una suma:

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{sen\ x\ cos\Delta x + cosx\ sen\ \Delta x - sen\ x}{\Delta x}$$

Extraigo factor común $-sen\ x$ entre primer y último término:

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cos x sen\ \Delta x - sen\ x\ (1 - \cos \Delta x)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \left[(\cos x) \frac{sen\ x}{\Delta x} - (sen\ x)\ \left(\frac{1-\cos x}{\Delta x}\right)\right]$$

Aplico propiedades de límites (resta y constante por una función)

$$= \cos x \left(\lim_{\Delta x \to 0} \frac{sen\ x}{\Delta x}\right) - sen\ x \left(\lim_{\Delta x \to 0} \frac{1 - \cos \Delta x}{\Delta x}\right)$$

$$= (\cos x)(1) - sen\ x\ (0)$$

Aplico límites trigonométricos especiales

$$= \boldsymbol{\cos x}$$

Derivada de la función coseno: $\frac{d}{dx}(\cos x) = -\operatorname{sen} x$

Demostración: derivada del $\cos x$:

$$\frac{d}{dx}(\cos x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cos(x+\Delta x) - \cos x}{\Delta x}$$

Aplico identidad trigonométrica del coseno de una suma:

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cos x \cos\Delta x - \operatorname{sen} x \operatorname{sen} \Delta x - \cos x}{\Delta x}$$

Extraigo factor común $\cos x$ entre el primer y último término:

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cos x\,(\cos \Delta x - 1) - \operatorname{sen} x \operatorname{sen} \Delta x}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \left[(\cos x)\frac{\cos \Delta x - 1}{\Delta x} - (\operatorname{sen} x)\left(\frac{\operatorname{sen} x}{\Delta x}\right)\right]$$

Aplico propiedades de límites (resta y producto):

$$= \cos x \left(\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cos \Delta x - 1}{\Delta x}\right) - \operatorname{sen} x \left(\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{\Delta x}\right)$$

Aplico límites trigonométricos especiales:

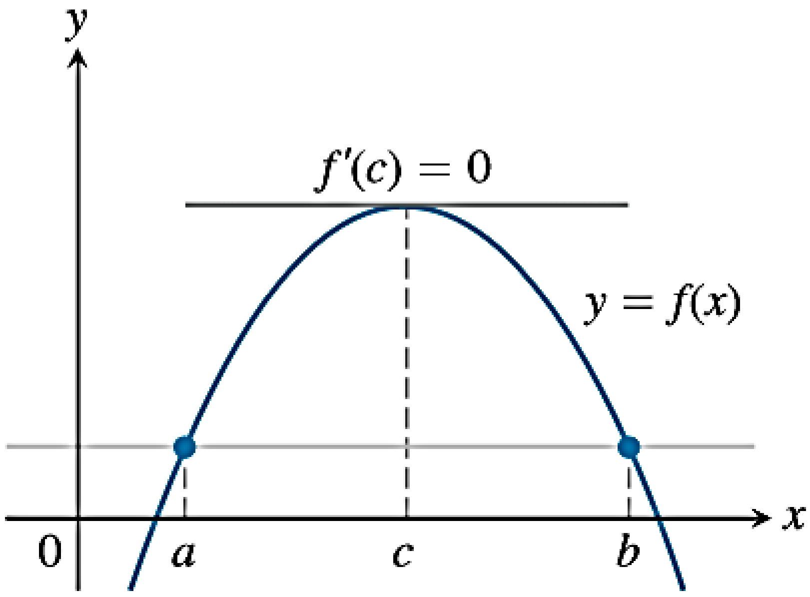
$$= (\cos x)(0) - \operatorname{sen} x\,(1)$$

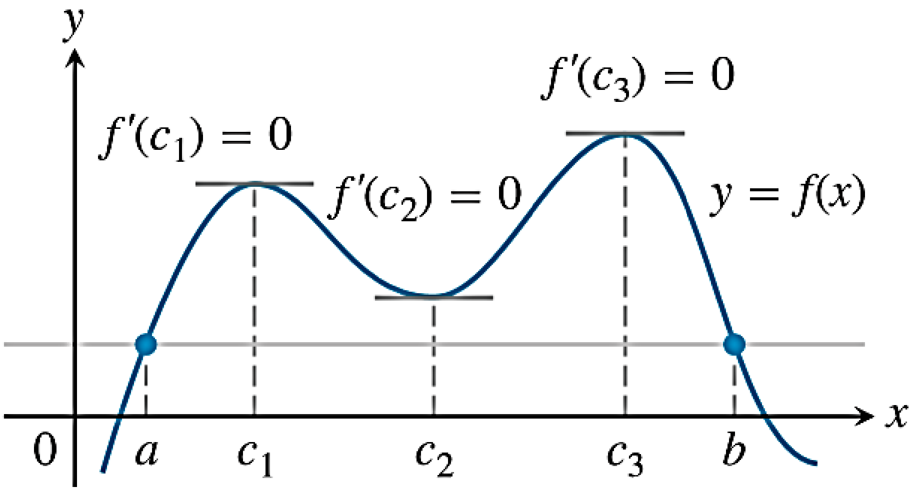
$$= \boldsymbol{-\operatorname{sen} x}$$

EL TEOREMA DE ROLLE

Teorema de Rolle

Suponga que $y = f(x)$ es continua en todo punto del intervalo cerrado $[a, b]$ y es derivable en todo punto de su interior (a, b). Si $f(a) = f(b)$, entonces existe al menos un número c en (a, b) en el que $f'(c) = 0$.





Hipótesis: f es continua en $[a,b]$

f es derivable en (a,b)

$f(a) = f(b)$

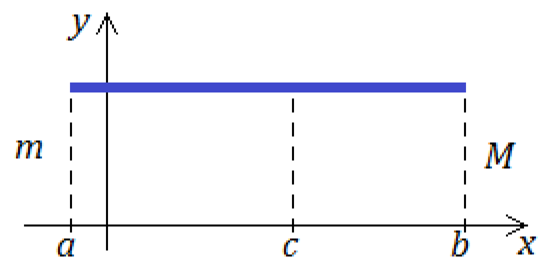
Tesis: Existe $c \in (a,b) / f'(c) = 0$

Demostración: al ser continua en $[a,b]$, por teorema de los valores extremos, f toma al menos un valor máximo M y un valor mínimo m absolutos en $[a,b]$.

Se presentan las siguientes situaciones:

1. **Puntos interiores donde f' no está definida**: por hipótesis, f tiene una derivada en todo punto interior, lo que elimina esta posibilidad.

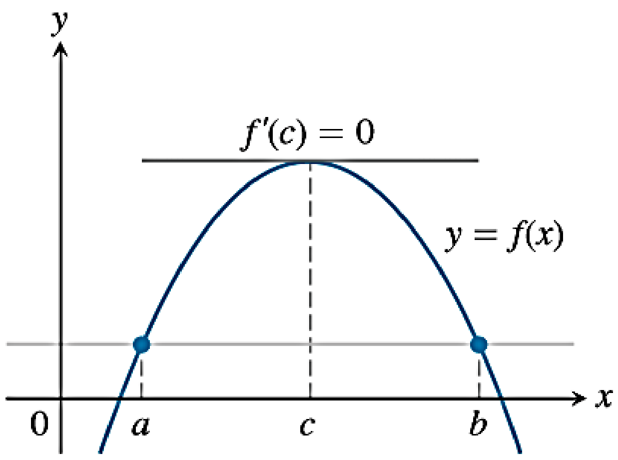
2. **Los puntos extremos del dominio de f:** si tanto el máximo absoluto como el mínimo absoluto se alcanzan en los extremos, entonces, ya que por hipótesis $f(a) = f(b)$, se tiene que $M = m$ y esto se cumple para el caso de que f sea una función constante con $f(x) = f(a) = f(b)$ para toda $x \in [a,b]$. Por lo tanto, la tesis $f'(x) = 0$ se verifica para cualquier punto c interior al intervalo (a,b).

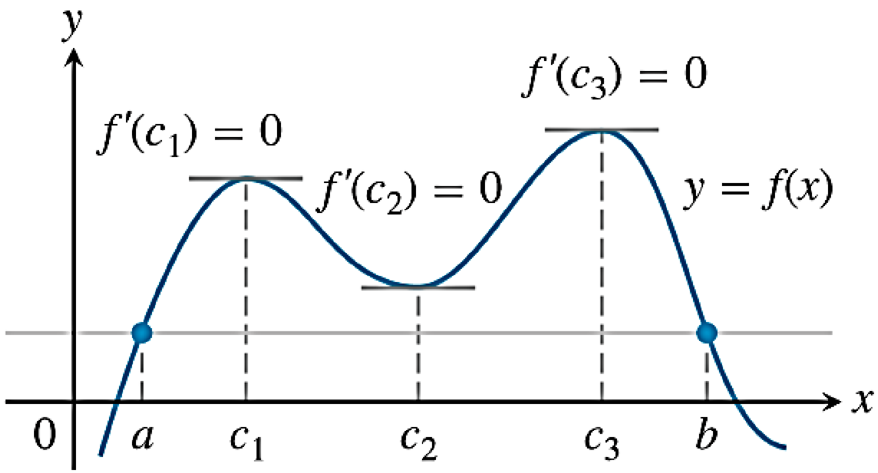


Demostración *(continuación)*:

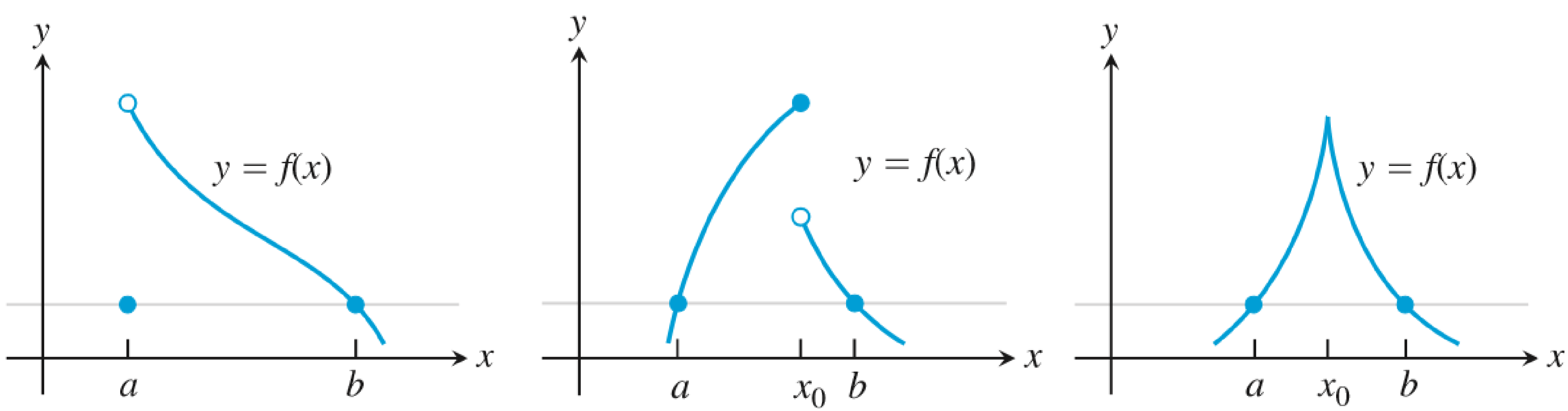
3. Puntos interiores donde $f' = 0$.

Si $M \neq m$, entonces uno de ellos, por lo menos es distinto de $f(a) = f(b)$. Por lo tanto, f alcanza dicho extremo absoluto en un punto c interior al intervalo y $f(c)$ es al mismo tiempo, extremo relativo y absoluto. Como f es derivable por hipótesis en (a, b), resulta por la condición necesaria para la existencia de extremos relativo que $f'(c) = 0$ y así se verifica la tesis propuesta.





Las hipótesis del Teorema de Rolle (continuidad y derivabilidad) deben cumplirse para que sea válida su aplicación.



(a) Discontinuidad en un extremo del intervalo $[a, b]$

(b) Discontinuidad en un punto interior de $[a, b]$

(c) Continua en $[a, b]$, pero no diferenciable en un punto

Teorema del valor medio de Cauchy

Suponga que las funciones f y g son continuas en $[a, b]$ y derivables en todo el intervalo (a, b), también suponga que $g'(x) \neq 0$ en (a, b). Entonces existe un número c en (a, b) en el que:

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

Hipótesis: f y g continuas en $[a, b]$

f y g derivables en (a, b)

Para todo $x \in (a, b)$: $g'(x) \neq 0$

Tesis: Existe $c \in (a, b)$ / $\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$

Demostración: consideremos una función auxiliar h definida de la siguiente forma:

$$\boldsymbol{h(x) = [f(b) - f(a)] \cdot g(x) - [g(b) - g(a)] \cdot f(x)} \qquad \textbf{(i)}$$

Se verifica que:

1) h es continua en $[a, b]$ dado que es diferencia de dos funciones continuas en $[a, b]$ (por hipótesis f y g continuas en $[a, b]$)

2) h es derivable en (a, b) por ser diferencia de dos funciones derivables en (a, b) (por hipótesis f y g derivables en (a, b)

3) Reemplazando a x por a en (i) y luego a x por b en (i), se tiene:

$$\boldsymbol{h(a) = [f(b) - f(a)] \cdot g(a) - [g(b) - g(a)] \cdot f(a)} \qquad \textbf{(ii)}$$

$$\boldsymbol{h(b) = [f(b) - f(a)] \cdot g(b) - [g(b) - g(a)] \cdot f(b)} \qquad \textbf{(iii)}$$

Demostración (continuación):

Trabajando algebraicamente (ii) y (iii) se obtiene: $h(a) = h(b)$

De 1), 2) y 3) la función h cumple la hipótesis del Teorema de Rolle, por lo tanto verifica su Tesis, es decir: Existe $c \in (a, b)/h'(c) = 0$

Derivando h se tiene que:

$$h'(x) = [f(b) - f(a)] \cdot g'(x) - [g(b) - g(a)] \cdot f'(x)$$

Haciendo $x = c$:

$$h'(c) = [f(b) - f(a)] \cdot g'(c) - [g(b) - g(a)] \cdot f'(c) = 0$$

Luego, $\boldsymbol{[f(b) - f(a)] \cdot g'(c) = [g(b) - g(a)] \cdot f'(c)}$ **(iv)**

Como por hipótesis $g'(c) \neq 0$, y además $g(b) - g(a) \neq 0$ pues si $g(b) - g(a) = 0$ sería $g(b) = g(a)$ y g cumpliría el Teorema de Rolle y por lo tanto existiría $c \in (a, b)/g'(c) = 0$, contra lo que afirma la hipótesis. Por consiguiente, puede escribirse (iv) como:

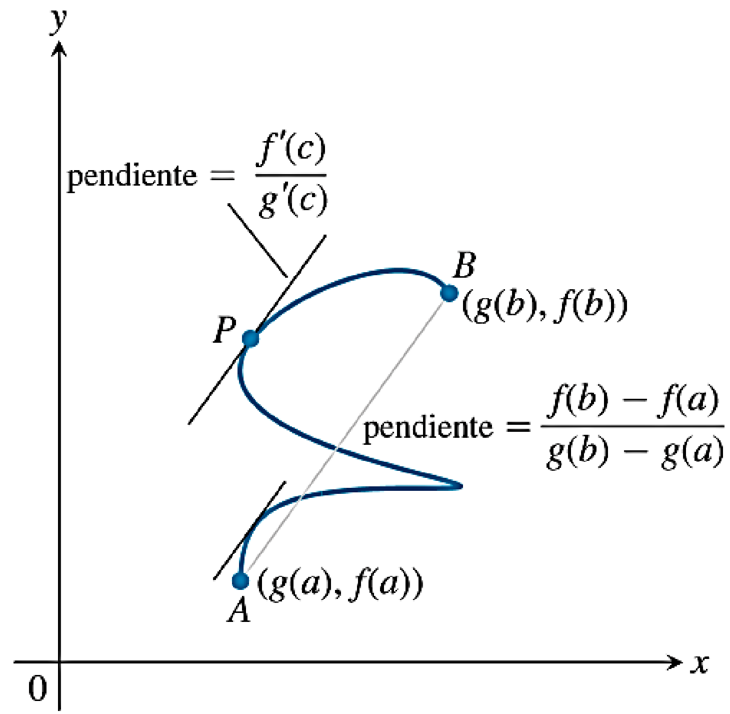
$$\boldsymbol{\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}}$$

Interpretación geométrica del teorema de Cauchy

Para una curva general C en el plano que une a los dos puntos $A = (g(a), f(a))$ y $B = (g(b), f(b))$, la pendiente de la recta secante que une a los puntos A y B es paralela a la pendiente de la recta tangente a la curva en un punto P de la misma. La pendiente de esa recta tangente resulta ser el cociente f'/g', evaluado en el número c en el intervalo (a, b). Puesto que la pendiente de la recta secante que une a A y B es:

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

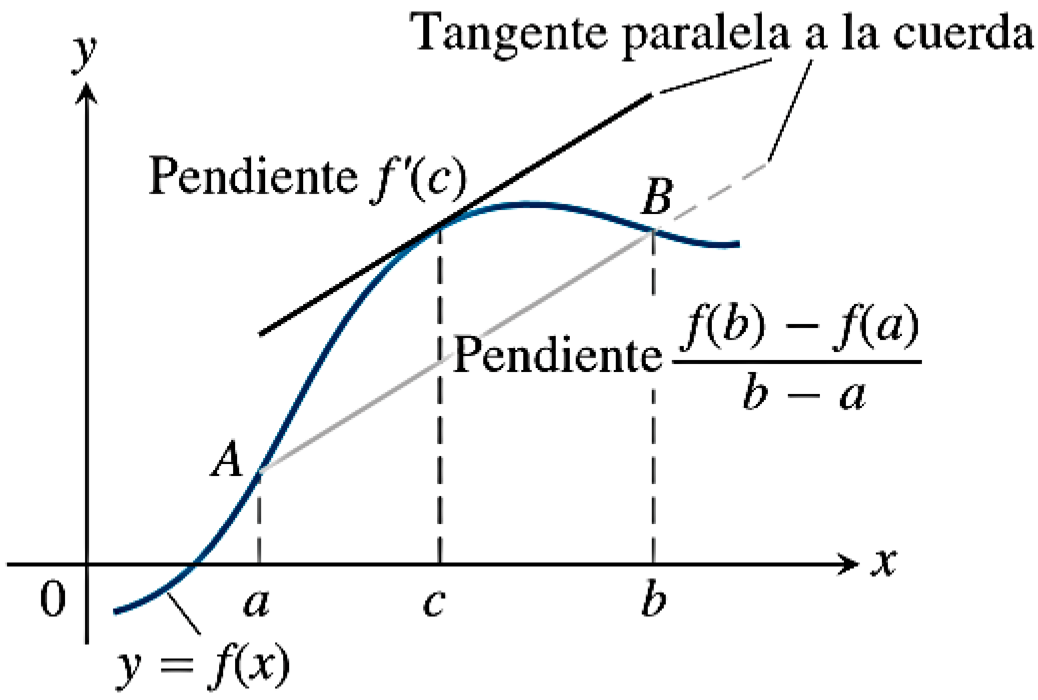
La ecuación en el teorema del valor medio de Cauchy dice que la pendiente de la recta tangente es igual a la pendiente de la secante.



Teorema del valor medio (Teorema de Lagrange)

Suponga que $y = f(x)$ es continua en un intervalo cerrado $[a, b]$ y es derivable en todo punto de su interior (a, b). Entonces existe al menos un punto c en (a, b) en el que:

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$$



El Teorema del valor medio o de Lagrange es una versión general del Teorema de Rolle, y a la vez un caso particular del Teorema de Cauchy.

Demostración

Hipótesis: f continua en $[a, b]$

f derivables en (a, b)

Tesis: Existe $c \in (a, b)$ / $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

Demostración: si en el Teorema de Cauchy, g es la función identidad, entonces $g(a) = a$; $g(b) = b$; $g'(x) = 1$ en particular $g'(c) = 1$ para algún $c \in (a, b)$. Es decir,

Existe $c \in (a, b)$ / $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

Interpretación geométrica

Dada una curva suave (no angulosa, con tangente no vertical en todo punto comprendido entre los extremos de la mencionada curva) por lo menos existirá un punto de ella, distinto de sus extremos, en el que la tangente a la curva es paralela a la recta secante que pasa por sus extremos.

CONSECUENCIAS MATEMÁTICAS

COROLARIO 1

Si $f'(x) = 0$ en cada punto x de un intervalo abierto (a, b), entonces $f(x) = C$ para toda $x \in (a, b)$, donde C es una constante.

COROLARIO 2

Si $f'(x) = g'(x)$ en cada punto x de un intervalo abierto (a, b), entonces existe una constante C tal que $f(x) = g(x) + C$ para toda $x \in (a, b)$. Esto es $f - g$ es una función constante en (a, b).

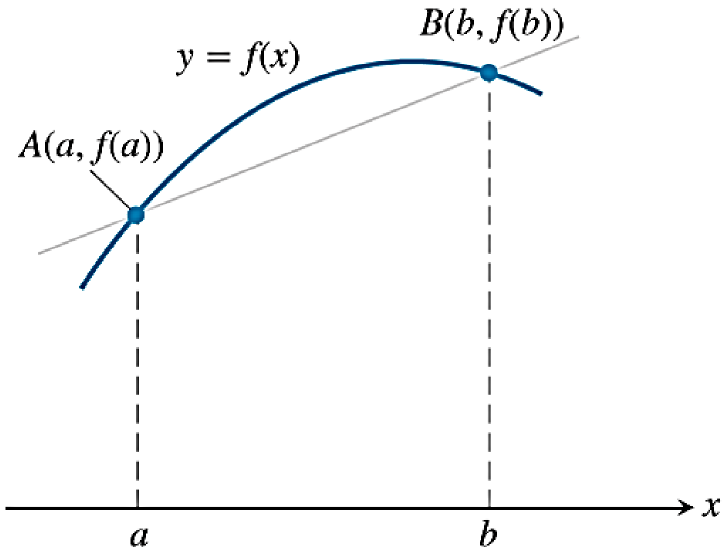
Demostración alternativa: se dibuja la gráfica de f y se traza una recta que pase por los puntos $A(a, f(a))$ y $B(b, f(b))$. La recta es la gráfica de la función:

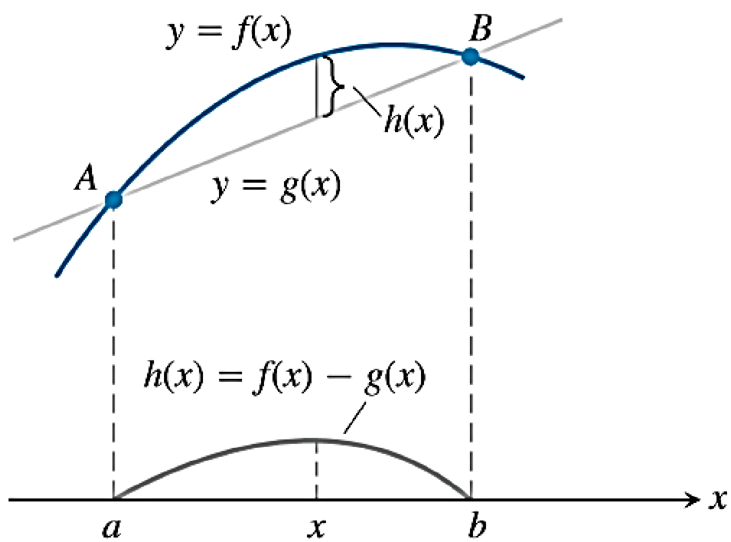
$$g(x) = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

(ecuación punto pendiente).

La diferencia vertical entre las gráficas de f y g en x es:

$$h(x) = f(x) - g(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$





Demostración alternativa (continuación): La función h satisface las hipótesis del Teorema de Rolle en $[a, b]$. Es continua en $[a, b]$, diferenciable en (a, b), ya que tanto f como g lo son. Además, $h(a) = h(b) = 0$ ya que las gráficas de f y g pasan por A y B. Por lo tanto, $h'(c) = 0$ en algún punto $c \in (a, b)$. Esto es lo necesario para la ecuación $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$.

Se toma la ecuación: $h(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x - a)$ y se derivan ambos miembros respecto de x. Luego se establece $x = c$:

$$h'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

$$h'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

$$0 = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Que es lo que se quería demostrar.

Demostración alternativa (empleando Lagrange): se aplica el teorema del valor medio dos veces. Primero para mostrar que $g(a) \neq g(b)$. Puesto que si $g(b)$ fuera igual a $g(a)$, entonces el teorema del valor medio daría:

$$\mathrm{g}'(\mathrm{c}) = \frac{g(b) - g(a)}{b - a} = 0$$

para alguna c entre a y b, lo cual no puede ocurrir ya que $\mathrm{g}'(\mathrm{c}) \neq 0$ en (a, b).

Luego se aplica el teorema del valor medio a la función:

$$F(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}[g(x) - g(a)]$$

Esta función es continua y derivable donde f y g lo sean, mientras $F(b) = F(a) = 0$. Por tanto, existe un número c entre a y b para el que $F'(c) = 0$. Cuando se expresa en términos de f y g, la ecuación se convierte en:

$$F'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}[g'(c)] = 0$$

Por lo que:

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO INTEGRAL (PARTE I)

Si f es continua en $[a,b]$, entonces la función $F(x)=\int_a^x f(t)dt$ es continua en $[a,b]$ y derivable en (a,b), y su derivada es $f(x)$:

$$F'(x)=\frac{d}{dx}\left[\int_a^x f(t)dt\right]=f(x)$$

Hipótesis:

f es continua en $[a,b]$

F es continua en $[a,b]$ y derivable en (a,b)

Tesis:

$$F'(x)=\frac{d}{dx}[F(x)]=\frac{d}{dx}\left[\int_a^x f(t)dt\right]=f(x)$$

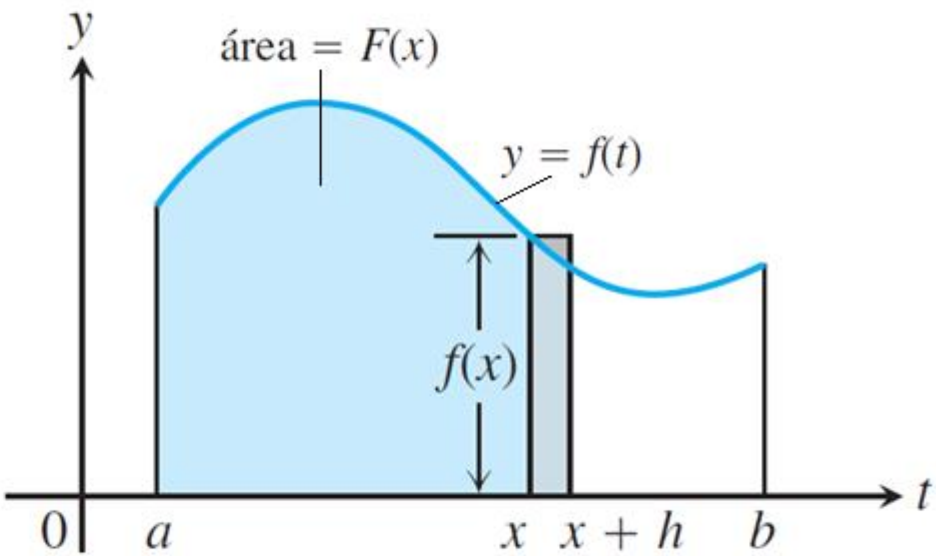
Demostración:

Se aplica a la función F la definición de derivada:

$$F'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} \qquad \mathbf{(1)}$$

Sabiendo que :

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$



La expresión **(1)** puede escribirse como:

$$F'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h}\left[\int_a^{x+h} f(t)dt - \int_a^{x} f(t)dt\right]$$

aplico propiedad de la integral

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h}\left[\int_a^{x+h} f(t)dt + \int_x^{a} f(t)dt\right]$$

aplico propiedad de la integral

$$\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx$$

<u>Demostración (continuación)</u>:

$$= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left[\int_x^a f(t)dt + \int_a^{x+h} f(t)dt\right] = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left[\int_x^{x+h} f(t)dt\right]$$

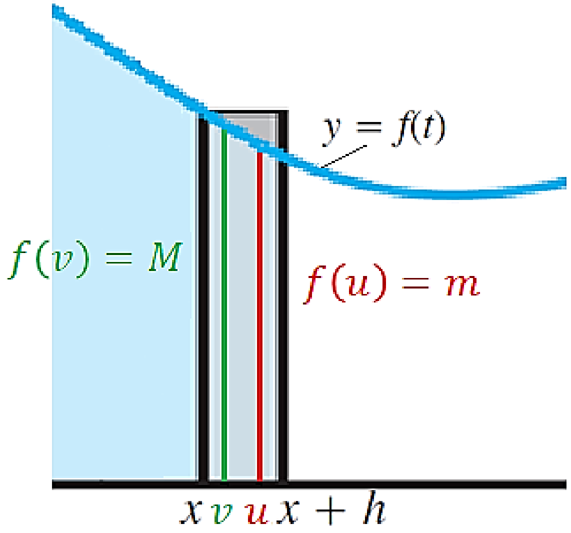
Suponiendo que $h > 0$, puesto que f es continua en el intervalo $[x, x+h]$, el teorema de valores extremos para funciones continuas establece que hay números u y v en $[x, x+h]$ tales que $f(u) = m$ y $f(v) = M$, donde m y M son los valores mínimo y máximo absolutos de f sobre $[x, x+h]$.

De acuerdo con la propiedad de *desigualdad min-max* de integrales, se tiene que:

$$m\cdot h \le \int_x^{x+h} f(t)dt \le M\cdot h$$

$$f(u) \le \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)dt \le f(v)$$

$$f(u) \le \frac{F(x+h)-F(x)}{h} \le f(v) \qquad \mathbf{(2)}$$



Nota: esta desigualdad puede demostrarse de una manera similar para $h < 0$.

Demostración (continuación):

Ahora, si $h \to 0$, $u \to x$ y $v \to x$, ya que u y v se encuentran entre x y $x + h$. Por tanto,

$$\lim_{h\to 0} f(u) = \lim_{u\to x} f(u) = f(x) \quad \text{y} \quad \lim_{h\to 0} f(v) = \lim_{v\to x} f(v) = f(x)$$

Porque f es continua en x. Aplicando el teorema del emparedado a **(2)**:

$$f(x) \leq \lim_{h\to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} \leq f(x)$$

$$F'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = f(x)$$

Si $x = a$ o b, entonces la ecuación (3) puede interpretarse como un límite unilateral, y aplicando el teorema de derivabilidad implica continuidad (Si f es derivable en *x=a*, entonces f es continua en $x = a$), F es continua en $[a, b]$. Por tanto,

$$F'(x) = \frac{d}{dx}\left[\int_a^x f(t)dt\right] = f(x)$$

Cuando f es continua. Esta ecuación establece que si primero se integra f y luego se deriva el resultado, se regresa a la función original f.

TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO INTEGRAL (PARTE II)

Si una función f es continua en el intervalo cerrado $[a, b]$ y F es una antiderivada de f en el intervalo $[a, b]$, entonces:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Hipótesis:

f es continua en $[a, b]$

F es una antiderivada de f en $[a, b]$

Tesis:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Demostración 1:

Se escribe la diferencia $F(b) - F(a)$ en una forma conveniente. Sea Δ la siguiente partición de $[a, b]$:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

Mediante la resta y suma de términos análogos, se obtiene:

$$F(b) - F(a) = F(x_n) - F(x_{n-1}) + F(x_{n-1}) - \cdots - F(x_1) + F(x_1) - F(x_0)$$
$$= \sum_{i=1}^{n} [F(x_i) - F(x_{i-1})]$$

De acuerdo con el teorema del valor medio de Lagrange, se sabe que si existe un número c_i en el i-ésimo subintervalo tal que:

$$F'(c_i) = \frac{F(x_i) - F(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}}$$

Demostración 1 *(continuación)*:

Se sabe que $F'(c_i) = f(c_i)$ y $\Delta x = x_i - x_{i-1}$ y obtenerse:

$$F(b) - F(a) = \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i$$

Esta ecuación dice que al aplicar repetidamente el teorema del valor medio, se puede encontrar una colección de c_i tal que la constante $F(a) - F(b)$ es una suma de Riemann de f en $[a, b]$ para cualquier partición. Por teorema "continuidad implica integrabilidad":

$\lim\limits_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i$ existe y por tanto:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

Demostración 2:

De acuerdo con una de las consecuencias del Teorema del valor medio de Lagrange, dos funciones que tienen iguales derivadas en todos los puntos de un intervalo, difieren en una constante. Si una de esas funciones es conocida y su derivada es igual a f, se tiene:

$$G(x) = \int_a^b f(t)dt$$

Si F es cualquier otra de esas funciones:

$F(x) = G(x) + C$ en $[a, b]$ donde C es una constante.

$$\begin{aligned} F(b) - F(a) &= [G(b) + C] - [G(a) + C] \\ &= G(b) - G(a) \\ &= \int_a^b f(t)dt - \int_a^a f(t)dt = \int_a^b f(t)dt \end{aligned}$$

$$\boldsymbol{F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)dx}$$

Area entre curvas

H_ $f(x)$ y $g(x)$ funciones continuas arbitrarias en $[a,b]$
$f(x) \geq g(x)$ a lo largo de $[a,b]$

T_ $A = \int_a^b [f(x)-g(x)]\,dx$

D_ Para hallar el área de la región acotada por arriba, por la curva $y=f(x)$, por abajo por la curva $y=g(x)$ y por la izquierda y por la derecha por las rectas $x=a$ y $x=b$ respectivamente, aproximamos la misma diviéndola en "n" rectángulos verticales con base en la partición $P: a=x_0<x_1<x_2<\dots<x_{n-1}<x_n=b$ de $[a,b]$.
El k-ésimo rectángulo tiene un área:

$A_k = \text{base} \cdot \text{altura}$
$A_k = \Delta x_k \cdot [f(c_k)-g(c_k)]$
$A_k = [f(c_k)-g(c_k)]\,\Delta x_k$

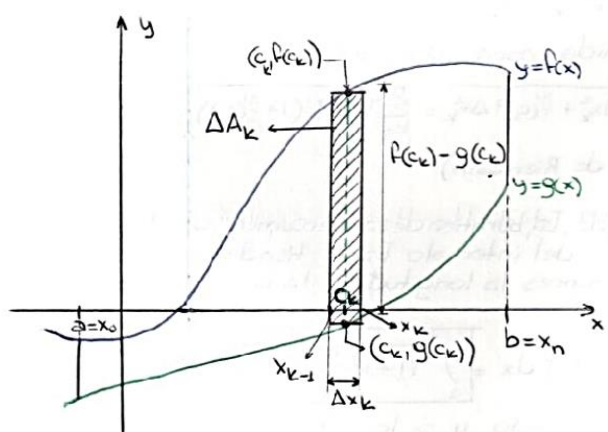
Para aproximar el área de la región sumamos las áreas de los "n" rectángulos verticales con base en la partición P del intervalo $[a,b]$:

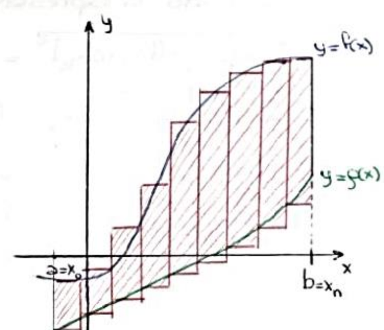
$$A \cong \sum_{k=1}^{n} \Delta A_k = \sum_{k=1}^{n} [f(c_k)-g(c_k)]\,\Delta x_k \quad \text{(suma de Riemann)}$$

Cuando la norma de la partición tiende a cero, $\|P\| \to 0$, las sumas de la derecha tienden al límite $\int_a^b [f(x)-g(x)]\,dx$, porque $y=f(x)$ e $y=g(x)$ son continuas.
Tomamos el área de la región como el valor de esa integral, es decir:

$$A = \lim_{\|P\|\to 0} \sum_{k=1}^{n} [f(c_k)-g(c_k)]\,\Delta x_k = \int_a^b [f(x)-g(x)]\,dx$$

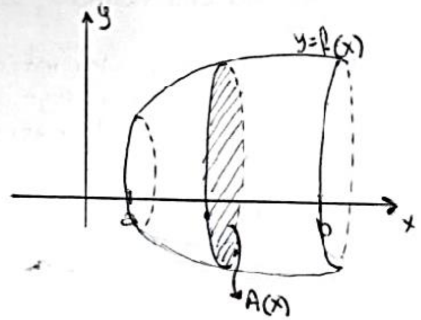
con lo cual queda demostrado que se verifica la tesis.





VOLUMEN DE UN SÓLIDO DE REVOLUCIÓN

Un sólido de revolución es el generado por la rotación de una superficie alrededor de un eje.



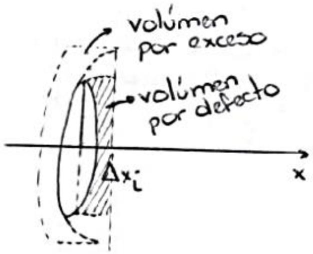
H. $f(x)$ continua en $[a,b]$

$P: a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$

T. $V_r = \pi \int_a^b f^2(x)\,dx$

D. En el intervalo $[x_{i-1}; x_i]$

$\exists\, m_a \wedge \exists\, M_a$



$v_i = \pi m_i^2 \Delta x_i$

$V_i = \pi M_i^2 \Delta x_i$

$v_i < V_{r_i} < V_i$ (Los volúmenes por exceso y por defecto contienen al volúmen de revolución)

$$V_r = \lim_{\|P\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} V_{r_i}$$

$$V_r = \lim_{\|P\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} \pi f^2(x_i)\,\Delta x_i$$

$$\boxed{V_r = \pi \int_a^b f^2(x)\,dx}$$

Volumen de sólidos de sección conocida: "Volumen por rebanadas"

En cada punto x del intervalo $[a,b]$, la sección transversal típica del sólido es una región $R(x)$ con un área $A(x)$. Esto hace que el área A sea una función de x de valores reales. Si además la función, es una función continua en "x" podemos emplearla para definir y calcular el volúmen del sólido como una integral indefinida.

Para hallar el volúmen del sólido, hacemos la partición usual del intervalo $[a,b]$, $P: a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$ y rebanamos el sólido mediante planos trazados perpendicularmente al eje x en los puntos de la partición. La k-ésima rebanada ubicada entre los planos x_{k-1} y x_k tiene un volúmen aproximadamente igual al volúmen de un cilindro ubicado entre dichos planos, cuya base está ubicada en la región $R(x_k)$

El volúmen de tal cilindro es:

$$V_k = (\text{área de la rebanada}) \cdot (\text{distancia entre los planos } x_{k-1} \text{ y } x_k)$$

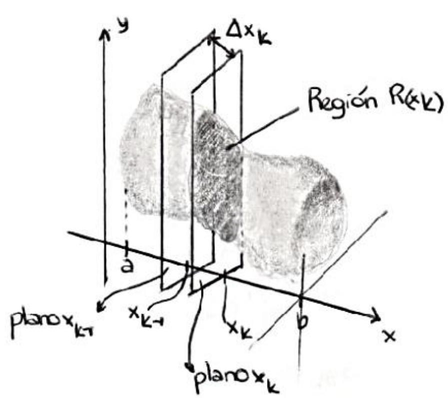
$$V_k = A(x_k) \cdot \Delta x_k$$

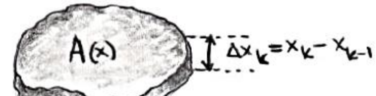
Para aproximar el volúmen del sólido original sumamos los volúmenes de los "n" cilindros considerados al realizar la partición del intervalo $[a,b]$, cuyas bases se encuentran ubicadas en la región $R(x_k)$:

$$V \cong \sum_{k=1}^{n} \Delta A_k = \sum_{k=1}^{n} A(x_k)\,\Delta x_k \quad \text{(suma de Riemann)}$$

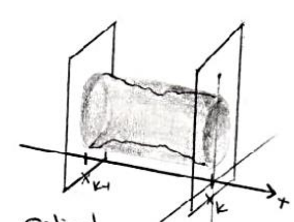
Cuando la norma de la partición del intervalo $[a,b]$ tiende a cero, $\|P\| \to 0$, la cantidad de cilindros considerados tiende a infinito, y las sumas de la derecha tienden al límite $\int_a^b A(x)\,dx$. Definimos el volúmen del sólido como el valor de esa integral:

$$V = \lim_{\|P\| \to 0} \sum_{k=1}^{n} A(x_k)\,\Delta x_k = \int_a^b A(x)\,dx$$





Sección transversal típica: Rebanada



Cilindro de aproximación con base en $R(x_k)$

Casquillos cilíndricos

Luego de hacer girar una curva alrededor del eje y para generar un sólido de revolución, podemos hallar su volumen, aproximando la región con rectángulos con base en una partición P del intervalo cerrado [a,b] donde se encuentra la región.

El rectángulo típico de aproximación es Δx_k unidades de ancho por $f(c_k)$ unidades de altura, donde c_k es el punto medio de la base del rectángulo. El volumen de un casquillo barrido por un rectángulo es:

$$V_k = 2\pi \text{ (radio promedio del casquillo) (altura) (grosor)}$$

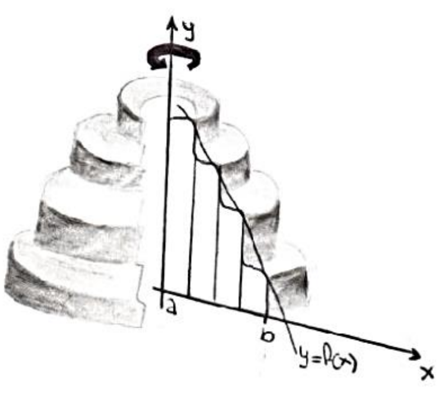
$$V_k = 2\pi \cdot c_k \cdot f(c_k)\,\Delta x_k$$

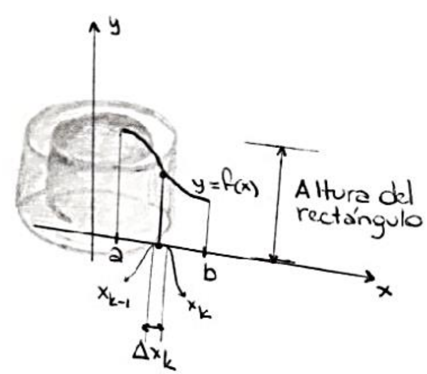
Para aproximar el volumen del sólido, sumamos los volumenes de los casquillos barridos por los "n" rectángulos con base en la partición P de [a,b]:

$$V \cong \sum_{k=1}^{n} \Delta v_k = \sum_{k=1}^{n} 2\pi \cdot c_k \cdot f(c_k) \cdot \Delta x_k \quad \text{(suma de Riemann)}$$

Cuando la norma de la partición tiende a cero, $\|P\| \to 0$, las sumas de la derecha tienden al límite $\int_a^b 2\pi x\, f(x)\, dx$. Definimos el volumen del sólido como el valor de esta integral:

$$V = \lim_{\|P\| \to 0} \sum_{k=1}^{n} 2\pi \cdot c_k \cdot f(c_k) \cdot \Delta x_k = \int_a^b 2\pi x\, f(x)\, dx$$





SERIES GEOMÉTRICA

Dada la **serie geométrica:**

$$a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} ar^n$$

Donde a y r son números reales fijos y $a \neq 0$ pudiendo ser la razón r **positiva** o **negativa**, se cumple que:

-Si $|\boldsymbol{r}| < \mathbf{1}$, la serie geométrica converge y tiene por suma a $\frac{\boldsymbol{a}}{\mathbf{1}-\boldsymbol{r}}$, es decir, $\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = \frac{a}{1-r}$

-Si $|\boldsymbol{r}| \geq \mathbf{1}$, la serie diverge.

Demostración:

- Si $\boldsymbol{r = 1}$, la n-ésima suma parcial de la serie geométrica es:

$$s_n = a + a(1) + a(1)^2 + \cdots + a(1)^{n-1} = na$$

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} an = \pm\infty \text{ (según sea el signo de } a\text{)}$$

Por lo tanto, la **Serie diverge.**

- Si $\boldsymbol{r = -1}$, se tiene que las sumas pueden ser pares o impares:

Sumas pares: $s_{2m} = 0$ (Ej.$s_4 = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 = 0$)

Sumas impares: $s_{2m-1} = a$ (Ej.$s_3 = a_1 - a_2 + a_3 = a$)

Por lo tanto, la **serie diverge** porque las *n-ésimas* sumas parciales alternan entre a y 0, según se trate de sumas impares o pares respectivamente.

Si $|\boldsymbol{r}| \neq \mathbf{1}$ la convergencia o divergencia se determina de la siguiente forma:

$$s_n = a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1}$$

$$r \cdot s_n = ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} + ar^n$$

$$s_n - rs_n = a - ar^n$$

Multiplico s_n por r en ambos miembros.

Resta rs_n de s_n. La mayoría de los términos del miembro derecho de la ecuación se cancelan.

Factoriza en ambos miembros y se despeja s_n en el izquierdo.

$$\boldsymbol{s_n = \frac{a(1 - r^n)}{1 - r} \qquad r \neq 1}$$

Ahora se halla el límite de s_n cuando $n \to \infty$:

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \frac{a(1 - r^n)}{1 - r} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{a}{1 - r} - \frac{ar^n}{1 - r} \right)$$

Si $\boldsymbol{r \neq 1}$, n aparece sólo en el segundo término del último miembro de la igualdad y se cumple que:

Si $|\boldsymbol{r}| < \mathbf{1}$, entonces $r^n \to 0$ cuando $n \to \infty$ y $\boldsymbol{s_n} \to \boldsymbol{\frac{a}{1-r}}$

Si $|\boldsymbol{r}| > \mathbf{1}$, entonces $|r^n| \to \infty$ cuando $n \to \infty$ y la serie diverge.

Conclusión:

Si $|\boldsymbol{r}| < \mathbf{1}$, la serie geométrica $a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} + \cdots$ converge y por lo tanto existe su suma la cual se calcula como:

$$s_n = \sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = \frac{a}{1-r}$$

Si $|\boldsymbol{r}| \geq \mathbf{1}$, la serie diverge.

Con lo que queda demostrado el teorema.

Condición necesaria para la convergencia de las series numéricas

Enunciado: una condición necesaria para la convergencia de la serie es que el término general o *n-ésimo* término tienda a cero cuando n tiende a infinito, es decir: $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

Hipótesis:

s_n sucesión de sumas parciales de la serie dada y s_{n-1} convergentes.

$\lim_{n\to\infty} s_n = S$ (único y finito)

$\lim_{n\to\infty} s_{n-1} = S$ (único y finito)

Cuando n es grande, tanto s_n como s_{n-1} están cerca de S.

Tesis: $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

Demostración:

Sea $\{s_n\}$ la sucesión de sumas parciales para la serie dada, si ésta es convergente se verifica entonces que su límite para n tendiendo a infinito, es único y finito, y además es igual a la suma. Es decir,

$\lim_{n\to\infty} s_n = S$ (finito)

$\lim_{n\to\infty} s_{n-1} = S$ (finito)

Como $a_n = s_n - s_{n-1}$, se tiene:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} s_n - \lim_{n\to\infty} s_{n-1} = S - S = 0$$

Por lo tanto: $\boldsymbol{\lim_{n\to\infty} a_n = 0}$

Con lo que se verifica la tesis.

El teorema da sólo la condición necesaria para la convergencia de una serie, pero no la condición suficiente, pues existen series cuyo término n-ésimo o general tiende a cero y son divergentes.

$$\boldsymbol{\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \nRightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n}$$