Cálculo II

Examen diagnóstico

7/3/2013

Problema 1

Sean

$$a = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 8 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad c = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

- Determinar si a, b y c son linealmente independientes.
- Calcular $a + 5b - 3c$.
- Calcular $|a|$, $|b|$, $a \bullet b$ y el ángulo entre a y b.

Problema 2

Decir si la serie

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{2n}$$

es convergente y calcular su valor.

Problema 3

Sean

$$a = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 8 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

- Determinar cuál es la dimensión del espacio vectorial generado por a y b.
- Encontrar una base ortogonal del espacio vectorial generado por a y b.
- Expresar a y b como combinación lineal de la base obtenida.

Problema 4

Encontrar los máximos, mínimos y puntos de inflexión de $f(x) = 3x^4 + 4x^3 - 12x^2$.

Problema 5

Encontrar la solución del siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} 3x - y + z &= -10 \\ 2x + 5y + 3z &= 2 \\ x + 3y + 2z &= 0 \end{aligned}$$

Problema 6

Calcular la serie de Taylor hasta el 5^{to} término para $f(x) = e^{x^2}$.

Problema 7

Calcular el determinante de

$$\begin{bmatrix} 2 & 7 & -5 \\ 6 & 6 & 0 \\ -1 & -1 & -2 \end{bmatrix}$$

Problema 8

Supongamos que una pista de descenso puede ser aproximada por la función $y = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$, donde y es la altura de la pista y x la distancia horizontal desde la base de la pista, con x en el intervalo $(0, 3)$. Calcular el área bajo la pista de descenso.

Problema 9

Sean

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & 4 & -5 \\ 6 & -2 & 0 \\ 4 & 3 & -7 \end{bmatrix}.$$

Encontrar $\quad A+B, \quad A-B, \quad 5.A, \quad A.B, \quad A^{-1}, \quad B^T.$

Problema 10

Sea $f(x) = e^x$, $g(x) = x^2 + 5$. Encontrar: $\quad (f+g)(x), \quad (f \cdot g)(x), \quad (f \circ g)(x).$

Problema 11

Encontrar los siguientes límites:

$$\lim_{x\to 3} \frac{x^3-3}{x^2}, \qquad \lim_{x\to 1^-} \frac{|x-1|}{x-1}, \qquad \lim_{x\to 2} \frac{x^2-5x+6}{x-2},$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(2x)}{x}, \qquad \lim_{x\to \infty} \frac{(x-1)^3}{3x(x-2)^2}, \qquad \lim_{x\to \infty} \frac{e^x}{\operatorname{senh}(x)}.$$

Problema 12

Calcular las siguientes integrales:

$$\int (x^3-1)dx, \qquad \int xe^x dx, \qquad \int \operatorname{sen}(x)\cos(x)dx.$$

Problema 13

Encontrar los autovectores y autovalores de

$$\begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$$

Problema 14

Calcular las derivadas de

$$3x^5 + 2x, \qquad (3x+1)\operatorname{sen}(x), \qquad \frac{\cos(x)}{x^2+1}, \qquad e^{\cos(x)}, \qquad \ln(\operatorname{sen}(x^2+3)).$$

Problema 15

Sean $\hat{x}$, $\hat{y}$ una base ortonormal de un espacio vectorial de dimensión 2. Sea A la transformación lineal dada por

$$\begin{aligned} A(\hat{x}) &= 5\hat{x} + 3\hat{y} \\ A(\hat{y}) &= -10\hat{x} - 6\hat{y} \end{aligned}$$

- Encontrar la matriz de la transformación lineal.
- Encontrar la imagen de la transformación lineal.
- Encontrar el núcleo de la transformación lineal.

Problema 16

Graficar $f(x) = \operatorname{sen}(3x+2)$.

Problema 17

Supongamos que una pista de descenso puede ser aproximada por la función $y = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$, donde y es la altura de la pista y x la distancia horizontal desde la base de la pista, con x en el intervalo $(0,3)$. Calcular la longitud de dicha pista.

Soluciones

Problema 5

$$x = 0,\ y = 4,\ z = -6.$$

Problema 9

$$A + B = \begin{bmatrix} 3 & 3 & -4 \\ 8 & 3 & 3 \\ 5 & 6 & -5 \end{bmatrix},\ A - B = \begin{bmatrix} 3 & -5 & 6 \\ -4 & 7 & 3 \\ -3 & 0 & 9 \end{bmatrix},\ 5.A = \begin{bmatrix} 15 & -5 & 5 \\ 10 & 25 & 15 \\ 5 & 15 & 10 \end{bmatrix},$$

$$A.B = \begin{bmatrix} -2 & 17 & -22 \\ 42 & 7 & -31 \\ 26 & 4 & -19 \end{bmatrix},\ A^{-1} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 1 & 5 & -8 \\ -1 & 5 & -7 \\ 1 & -10 & 17 \end{bmatrix},\ B^T = \begin{bmatrix} 0 & 6 & 4 \\ 4 & -2 & 3 \\ -5 & 0 & -7 \end{bmatrix}.$$

Problema 1

$det[a, b, c] = 68 \Rightarrow$ son linealmente independientes.

$$a + 5b - 3c = (25, -24, -7)$$

$$|a| = \sqrt{69} \approx 8,3, \quad |b| = \sqrt{13} \approx 3,6, \quad a \bullet b = 7, \quad \theta \approx 1,33\text{rad} \approx 76^o.$$

Problema 3

El espacio vectorial es de dimensión 2.

$$\hat{a} = \frac{1}{5}(4, 0, 3),\ \ \hat{b} = (0, 1, 0),\ \ a = 5\hat{a},\ \ b = 10\hat{a} + 3\hat{b}.$$

Problema 15

$$[A] = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ -10 & -6 \end{bmatrix}$$

Base de la imagen: $\hat{x} - 2\hat{y}$, base del núcleo: $3\hat{x} - 5\hat{y}$.

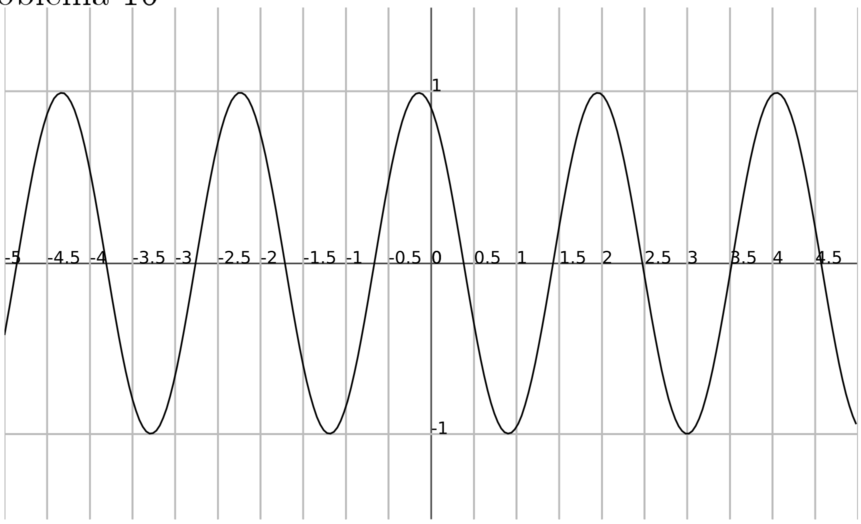
Problema 7

$$60$$

Problema 13

$$\lambda_1 = 3,\ u_1 = (-5, 1), \qquad \lambda_2 = -3,\ u_2 = (1, 1).$$

Problema 16



Problema 10

$$\begin{aligned}(f+g)(x) &= e^x + x^2 + 5\\ (f\cdot g)(x) &= e^x(x^2+5)\\ (f\circ g)(x) &= e^{x^2+5}\end{aligned}$$

Problema 11

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^3-3}{x^2}=\frac{8}{3},\qquad \lim_{x\to 1^-}\frac{|x-1|}{x-1}=-1,\qquad \lim_{x\to 2}\frac{x^2-5x+6}{x-2}=-1,$$
$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}(2x)}{x}=2,\qquad \lim_{x\to\infty}\frac{(x-1)^3}{3x(x-2)^2}=\frac{1}{3},\qquad \lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{\operatorname{senh}(x)}=2.$$

Problema 14

$$\begin{aligned}3x^5+2x &\to 15x^4+2\\ (3x+1)\operatorname{sen}(x) &\to 3\operatorname{sen}(x)+(3x+1)cos(x)\\ \frac{\cos(x)}{x^2+1} &\to -\frac{(x^2+1)\operatorname{sen}(x)+2x\cos(x)}{(x^2+1)^2}\\ e^{\cos(x)} &\to -\operatorname{sen}(x)e^{\cos(x)}\\ \ln(\operatorname{sen}(x^2+3)) &\to \frac{2x\cos(x^2+3)}{\operatorname{sen}(x^2+3)}\end{aligned}$$

Problema 4

Máximo: 0, mínimos: -2 y 1, puntos de inflexión: $\frac{-1\pm\sqrt{7}}{3}$, aproximadamente $0,55$ y $-1,21$.

Problema 12

$$\begin{aligned}\int(x^3-1)dx &= \frac{1}{4}x^4-x\\ \int xe^x dx &= e^x(x-1)\\ \int \operatorname{sen}(x)\cos(x)dx &= \frac{1}{2}\operatorname{sen}^2(x).\end{aligned}$$

Problema 17

$$l = \int_0^3 \sqrt{1+x}\,dx = \frac{2}{3}(1+x)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^3 = \frac{14}{3}.$$

Problema 8

$$A = \int_0^3 \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} = \frac{4 \cdot 3^{\frac{3}{2}}}{5} \approx 4,2.$$

Problema 2

$$r = \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{4} < 1 \Rightarrow \text{ la serie converge}$$

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n = \frac{1}{1-\frac{1}{4}} = \frac{4}{3}.$$

Problema 6

$$T_5(x) = 1 + x^2 + \frac{1}{2}x^4.$$