Introducción al Álgebra Lineal

Año 2014

Ejercicios teóricos

Ejercicio 1. Sea Π un plano de $\mathbb{R}^3$ y sea N su vector normal. Sea L una recta de $\mathbb{R}^3$ y sea v un vector director de L. Demostrar que si $L \subseteq \Pi$ entonces v es perpendicular a N.

Ejercicio 2. Sean Π y Π' planos de $\mathbb{R}^3$. Demostrar que si $\Pi \cap \Pi' \neq \varnothing$ entonces existe una recta L de $\mathbb{R}^3$ tal que $L \subseteq \Pi \cap \Pi'$.

Ejercicio 3.

(a) Sea $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ tal que $\det(A) = 5$. Calcular $\det(\mathrm{adj}(A))$.

(b) Generalizar el resultado del item anterior.

Ejercicio 4. Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tal que existe $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tal que $AB = I$. Demostrar que A es inversible y que $A^{-1} = B$.

Ejercicio 5.

(a) Sean $v, w \in \mathbb{R}^3 - \{0\}$ tales que $\langle v, w\rangle = 0$. Demostrar que el conjunto $\{v, w\}$ es linealmente independiente.

(b) Sean $v_1, v_2, \dots, v_k \in \mathbb{R}^n - \{0\}$ tales que $\langle v_i, v_j\rangle = 0$ para todos $i, j \in \{1, \dots, k\}$ distintos. Demostrar que el conjunto $\{v_1, v_2, \dots, v_k\}$ es linealmente independiente.

Ejercicio 6. Decidir si la siguiente afirmación es verdadera o falsa y justificar:
"Si u, v y w son vectores de $\mathbb{R}^3$ tales que los conjuntos $\{u, v\}$, $\{u, w\}$ y $\{v, w\}$ son linealmente independientes entonces el conjunto $\{u, v, w\}$ es linealmente independiente."

Ejercicio 7. Sea $\mathbb{V}$ un espacio vectorial y sean $v_1, v_2, \dots, v_n \in \mathbb{V}$. Sea $w \in \mathbb{V}$. Demostrar que $\mathrm{Gen}(\{v_1, v_2, \dots, v_n, w\}) = \mathrm{Gen}(\{v_1, v_2, \dots, v_n\})$ si y sólo si w es combinación lineal de los vectores $v_1, v_2, \dots, v_n$.

Ejercicio 8. Sea $\mathbb{V}$ un espacio vectorial y sean S y T subespacios de $\mathbb{V}$. Demostrar que $\mathbb{V} = S \oplus T$ si y sólo si para todo $v \in \mathbb{V}$ existen únicos $s \in S$ y $t \in T$ tales que $v = s + t$.

Ejercicio 9. Sea $\mathbb{V}$ un espacio vectorial de dimensión n y sea B una base de $\mathbb{V}$. Sea $f : \mathbb{V} \to \mathbb{R}^n$ definida por $f(v) = [v]_B$.

(a) Demostrar que f es una transformación lineal.

(b) Demostrar que f es un isomorfismo.

Ejercicio 10. Sea $\mathbb{V}$ un espacio vectorial de dimensión finita y sea B una base de $\mathbb{V}$. Sean $w_1, w_2, \ldots, w_m \in \mathbb{V}$. Demostrar que $\{w_1, w_2, \ldots, w_m\}$ es linealmente independiente si y sólo si $\{[w_1]_B, [w_2]_B, \ldots, [w_m]_B\}$ es linealmente independiente.

Ejercicio 11. Sea $\mathbb{V}$ un espacio vectorial y sea B una base de $\mathbb{V}$. Sea $f : \mathbb{V} \to \mathbb{V}$ una transformación lineal. Demostrar que f es un isomorfismo si y sólo si la matriz $M_{BB}(f)$ es inversible.

Ejercicio 12. Sea $\mathbb{V}$ un espacio vectorial, sean B y B' bases de $\mathbb{V}$ y sea $f : \mathbb{V} \to \mathbb{V}$ una transformación lineal.

(*a*) Demostrar que las matrices $M_{BB}(f)$ y $M_{B'B'}(f)$ tienen los mismos autovalores.

(*b*) Demostrar que $M_{BB}(f)$ es diagonalizable si y sólo si $M_{B'B'}(f)$ lo es.