| UNCUYO UNIVERSIDAD NACIONAL DE CUYO | **EJERCITACIÓN REPASO 1º PARCIAL** | FCEN FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES Naturaleza - Ciencia - Humanismo | |
|---|---|---|---|
| **ASIGNATURA** | Cálculo I | **AÑO** | 2018 |

## A. TEORÍA (Nociones básicas)

1. *Preguntas de repaso*

a. ¿El rango y la imagen de una función son expresiones equivalentes? Explique.

b. Si $f$ y $g$ son funciones reales, ¿cómo están relacionados los dominios de $f + g, f - g, f * g$ y $f/g$ con los dominios de $f$ y $g$? Dé ejemplos.

c. ¿Cuándo es posible realizar la composición de una función con otra? Dé ejemplos de composiciones y sus valores en varios puntos. ¿Importa el orden en el que se lleva a cabo la composición de funciones?

d. ¿La existencia y el valor del límite de una función $f(x)$, cuando $x$ tiende a $c$, depende siempre de lo que pase en $x = c$? Explique y de ejemplos.

e. Para que el límite no exista, ¿qué comportamientos puede tener una función?

f. Dado: $\lim_{x \to c} f(x) = L$, ¿Por qué esta definición de límite es "informal"?

g. ¿Cuáles son las condiciones que debe cumplir una función para ser continua?

h. ¿Cuál de las condiciones indicadas en la *pregunta c* no se cumple en el caso de una discontinuidad evitable? ¿Cuál(es) en el caso de una discontinuidad inevitable? Explique y de ejemplos.

i. ¿Qué puede hacerse con una discontinuidad de tipo evitable?

j. Si las funciones $f(x)$ y $g(x)$ son continuas para $0 \leq x \leq 1$, ¿podría ser $f(x)/g(x)$ discontinua en algún punto de $[0, 1]$? Justifique su respuesta.

k. Si la función producto $h(x) = f(x) \cdot g(x)$ es continua en $x = 0$, ¿las funciones $f(x)$ y $g(x)$ deben ser continuas en $x = 0$? Justifique su respuesta.

l. Piense en un ejemplo de funciones $f$ y $g$, ambas continuas en $x = 0$, para las cuales la composición $f + g$ sea discontinua en $x = 0$. ¿Esto contradice el teorema de composición de funciones continuas? Justifique su respuesta.

## B. PRÁCTICA

2. Indique Verdadero (V) o Falso (F) según corresponda. Justifique las respuestas Falsas.

| Enunciado | V | F |
|---|---|---|
| Sea $f(x) = -3^x$ una función uno a uno, su inversa es la función $f^{-1}(x) = x^{-3}$. | | |
| Dadas $f(x) = x^2 + 1$ y $g(x) = \cos(x)$, la composición $(fog)(x)$ es una función par. | | |
| La función $f(x) = \ln(x^2 - 4)$ no es ni par ni impar. | | |
| Dadas las funciones $f(x) = \ln(x)$ y $g(x) = x^2 - 9$, la composición $(fog)(x) = \ln(x^2 - 9)$ y el dominio es $(0, \infty)$. | | |
| Las gráficas correspondientes a $f(x)$ y $f(x)^{-1}$, son simétricas respecto al eje de las abscisas. | | |
| La gráfica de la función $g(x) = sen(x) + \pi$, se obtiene al desplazar verticalmente $\pi$ unidades la función $g(x) = sen(x)$. | | |
| El teorema del valor intermedio asegura que si $f(x) = x^3 - 1$ es continua en $[-3, 0]$ entonces $f$ tiene una raíz en $(-3,0)$. | | |

3. Dadas las funciones: $f(x) = \frac{3x-3}{x+1}$ y $g(x) = \frac{x^2}{x-1}$ se pide indicar para cada una:
   a. Dominio implícito e Imagen.
   b. Ecuación de la función inversa (si existe).
   c. Comprobar el resultado anterior componiendo ambas funciones.
   d. Intersecciones con los ejes.
   e. Paridad.
   f. Intervalo de valores de x para los cuales $f(x)$ es positiva y para los cuales es negativa.
   g. Ecuaciones de sus asíntotas *(aplique lo aprendido en Límite)*.
   h. Graficar la función, empleando la información encontrada previamente.

4. Dada $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x - 7$. Escriba una ecuación para cada una de las gráficas que se obtienen a partir de $f(x)$ aplicando las siguientes transformaciones:
   a. Alargamiento vertical de 3 unidades y compresión horizontal de 2 unidades.
   b. Compresión vertical de 4 unidades y alargamiento horizontal de 3 unidades.
   c. Reflexión sobre el eje y.

5. Dadas las funciones $f(x) = \frac{3}{x}$ y $g(x) = x^2 - 1$, encontrar las funciones compuestas $(f\ o\ g)(x) y\ (g\ o\ f)(x)$. Indicar los dominios de las funciones resultantes.

6. Demuestre los siguientes límites utilizando la definición formal. A continuación, interprete gráficamente considerando $\varepsilon = 1$:
   a. $\lim_{x\to 3} x^2 = 9$
   b. $\lim_{x\to -1} x^2 + 3x - 1 = -3$

7. Calcular los siguientes límites:
   a. $\lim_{x\to 2} \frac{x^5-32}{x-2}$
   b. $\lim_{t\to 0} \frac{ctg(2t)\cdot sen(5t)}{t\cdot sen(7t)}$
   c. $\lim_{x\to \infty} \frac{\sqrt{9x^2+2}}{x+3}$
   d. $\lim_{x\to -\infty} \frac{4-3x^2}{\sqrt{x^4+9}}$
   e. $\lim_{x\to -\infty} \frac{\sqrt{2x^2+1}}{3x-5}$
   f. $\lim_{x\to \infty} \frac{\sqrt{2x^2+1}}{3x-5}$
   g. $\lim_{x\to 0} x^2 cos\left(\frac{\pi}{x}\right)$
   h. $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+sen(x)}-\sqrt{1-sen(x)}}{x}$
   i. $\lim_{x\to 2} (x+3)\frac{|x+2|}{x+2}$
   j. $\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{2x}\,(x-1)}{|x-1|}$

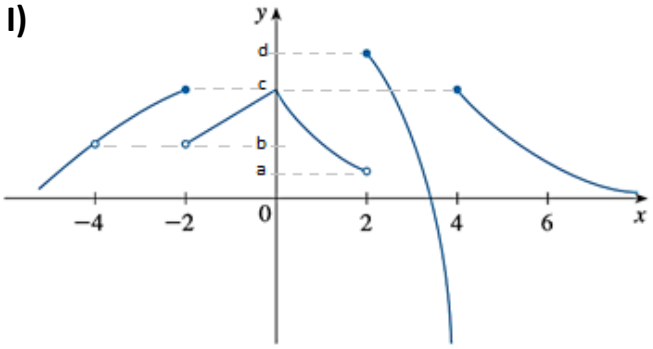
8. Suponga que $f$ y $g$ son funciones para las cuales:

   $\lim_{x\to a}[f(x) + 2g(x)] = A$ y $\lim_{x\to a} \sqrt{f(x)} = B$

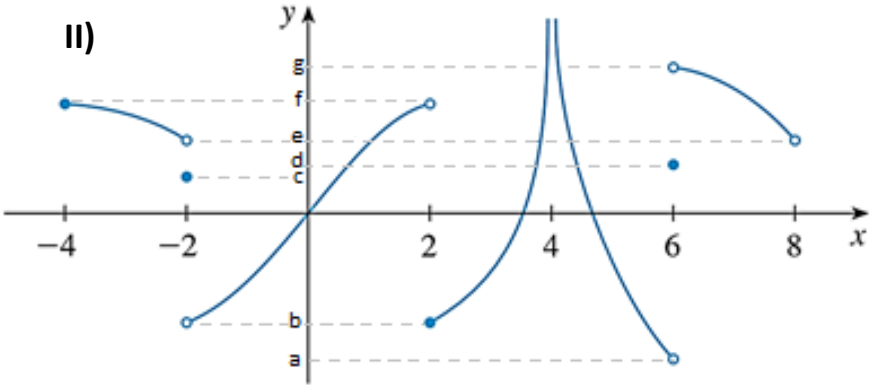
   Use propiedades de límites para determinar si $\lim_{x\to a} g(x)$ existe.

9. A partir de la gráfica de $f$ establezca, en cada caso:
   a. Para qué valores de $x$ la función es discontinua. Justifique aplicando definición de continuidad.
   b. Para cada uno de esos valores determine si $f$ es continua por derecha, izquierda o por ninguno de los dos.

**I)**




**II)**




10. Dada $f(x) = \begin{cases} 3 - x\,, & x \leq 0 \\ 3 + \frac{1}{2}x\,, & > 0 \end{cases}$

    Evaluar la continuidad de la función en el intervalo cerrado $[-1,4]$

11. Dadas las siguientes funciones por partes $f$ en el intervalo $[-3,4\,]$ grafique y:

i. $f(x) = \begin{cases} -2x + 4 & si\ x \leq 1 \\ \frac{1}{x} & si\ 1 < x < 2 \\ \frac{x^2 - x - 6}{x - 3} & si\ x \geq 2 \end{cases}$

ii. $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + 3x + 2}{x + 2} & si\ x \leq 1 \\ \frac{1}{x} & si\ 1 < x < 3 \\ \sqrt{x - 3} & si\ x \geq 3 \end{cases}$

    a. Determine para qué valores $x$ la función es discontinua (evalúe para cada $x$ las 3 condiciones de continuidad).

    b. Clasifique las discontinuidades halladas en inevitable o evitable según corresponda. En este último caso, indique cómo se puede redefinir $f(x)$ para eliminar la discontinuidad.

12. ¿Para qué valores de $a$ y $b$ la siguiente función es continua en todos los números reales?

$$f(x) = \begin{cases} x + a & si\ x \leq -1 \\ bx^2 + 3 & si\ -1 < x \leq 0 \\ a\,\dfrac{sen(x)}{x} & si\ x > 0 \end{cases}$$