| ASIGNATURA | Elementos de Cálculo I | AÑO | 2018 |
|---|---|---|---|

## A. TEORÍA (Nociones básicas)

1. *Preguntas de repaso*

a. ¿Si se habla de rango e imagen de una función, se está diciendo lo mismo? Explique.

b. Si $f$ y $g$ son funciones reales, ¿cómo están relacionados los dominios de $f + g$, $f - g$, $f * g$ y $f/g$ con los dominios de $f$ y $g$? Dé ejemplos.

c. ¿Cuándo es posible realizar la composición de una función con otra? Dé ejemplos de composiciones y sus valores en varios puntos. ¿Importa el orden en el que se lleva a cabo la composición de funciones?

d. ¿La existencia y el valor del límite de una función $f\ (x)$, cuando $x$ tiende a $c$, depende siempre de lo que pase en $x = c$? Explique y de ejemplos.

e. Para que el límite no exista, ¿qué comportamientos puede tener una función?

f. ¿Cuáles son las condiciones que debe cumplir una función para ser continua?

g. ¿Cuál de las condiciones indicadas en la *pregunta c* no se cumple en el caso de una discontinuidad evitable? ¿Cuál(es) en el caso de una discontinuidad inevitable? Explique y de ejemplos.

h. ¿Qué puede hacerse con una discontinuidad de tipo evitable?

i. Si las funciones $f\ (x)$ y $g(x)$ son continuas para $0 \leq\ x\ \leq 1$, ¿podría ser $f\ (x)/g(x)$ discontinua en algún punto de $[0, 1]$? Justifique su respuesta.

j. Si la función producto $h(x) = f\ (x) \cdot g(x)$ es continua en $x = 0$, ¿las funciones $f\ (x)$ y $g(x)$ deben ser continuas en $x = 0$? Justifique su respuesta.

## B. PRÁCTICA

2. Indique Verdadero (V) o Falso (F) según corresponda. Justifique las respuestas Falsas.

| Enunciado | V | F |
|---|---|---|
| Sea $f(x) = -3^x$ una función uno a uno, su inversa es la función $f^{-1}(x) = x^{-3}$. | | |
| Dadas $f(x) = x^2 + 1$ y $g(x) = \cos(x)$, la composición $(fog)(x)$ es una función par. | | |
| La función $f(x) = \ln(x^2 - 4)$ no es ni par ni impar. | | |
| Dadas las funciones $f(x) = \ln(x)$ y $g(x) = x^2 - 9$, la composición $(fog)(x) = \ln(x^2 - 9)$ y el dominio es $(0, \infty)$. | | |
| Las gráficas correspondientes a $f(x)$ y $f(x)^{-1}$, son simétricas respecto al eje de las abscisas. | | |
| La gráfica de la función $g(x) = sen\ (x) + \pi$, se obtiene al desplazar verticalmente $\pi$ unidades la función $g(x) = sen\ (x)$. | | |
| El teorema del valor intermedio asegura que si $f(x) = x^3 - 1$ es continua en $[-3, 0]$ entonces $f$ tiene una raíz en $(-3,0)$. | | |

3. Dadas las funciones: $f(x) = \frac{3x-3}{x+1}$ y $g(x) = \frac{x^2}{x-1}$ se pide indicar para cada una:
   a. Dominio implícito e Imagen.
   b. Ecuación de la función inversa (si existe).
   c. Comprobar el resultado anterior componiendo ambas funciones.
   d. Intersecciones con los ejes.
   e. Paridad.
   f. Intervalo de valores de x para los cuales $f(x)$ es positiva y para los cuales es negativa.
   g. Ecuaciones de sus asíntotas *(aplique lo aprendido en Límite)*.
   h. Graficar la función, empleando la información encontrada previamente.

4. Dada $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x - 7$. Escriba una ecuación para cada una de las gráficas que se obtienen a partir de $f(x)$ aplicando las siguientes transformaciones:
   a. Alargamiento vertical de 3 unidades y compresión horizontal de 2 unidades.
   b. Compresión vertical de 4 unidades y alargamiento horizontal de 3 unidades.
   c. Reflexión sobre el eje y.

5. Dadas las funciones $f(x) = \frac{3}{x}$ y $g(x) = x^2 - 1$, encontrar las funciones compuestas $(f\ o\ g)(x) y\ (g\ o\ f)(x)$. Indicar los dominios de las funciones resultantes.

6. Calcular los siguientes límites:

   a. $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x^5-32}{x-2}$  b. $\lim\limits_{t\to 0} \frac{ctg(2t)\cdot sen(5t)}{t\cdot sen(7t)}$  c. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x-x.cos\,(x)}{sen(3x)}$

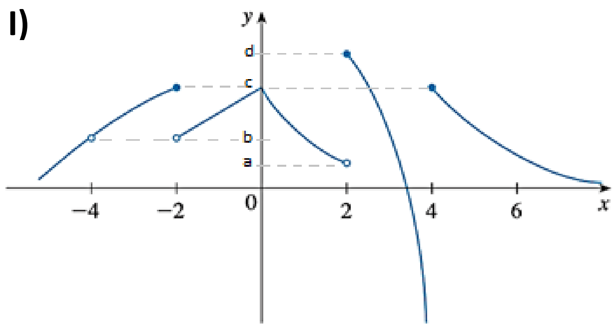
   d. $\lim\limits_{x\to \infty} \frac{\sqrt{9x^2+2}}{x+3}$  e. $\lim\limits_{x\to -\infty} \frac{4-3x^2}{\sqrt{x^4+9}}$  f. $\lim\limits_{x\to 0} x^2 cos\left(\frac{\pi}{x}\right)$

   g. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+sen(x)}-\sqrt{1-sen(x)}}{x}$  h. $\lim\limits_{x\to 2}(x+3)\frac{|x+2|}{x+2}$  i. $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\sqrt{2x}\,(x-1)}{|x-1|}$

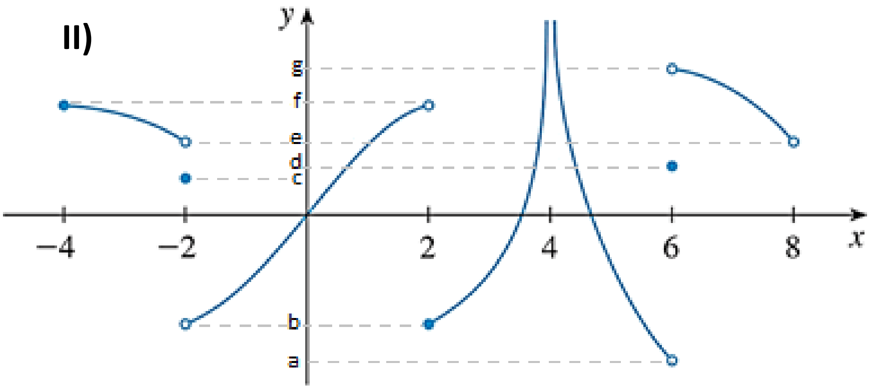
7. Suponga que $f$ y $g$ son funciones para las cuales:
   $\lim\limits_{x\to a}[f(x) + 2g(x)] = A$ y $\lim\limits_{x\to a}\sqrt{f(x)} = B$
   Use propiedades de límites para determinar si $\lim\limits_{x\to a} g(x)$ existe.

8. A partir de la gráfica de $f$ establezca, en cada caso:
   a. Para qué valores de $x$ la función es discontinua. Justifique aplicando definición de continuidad.
   b. Para cada uno de esos valores determine si $f$ es continua por derecha, izquierda o por ninguno de los dos.

**I)**



**II)**




9. Dada $f(x) = \begin{cases} 3 - x\,, & x \leq 0 \\ 3 + \frac{1}{2}x\,, & > 0 \end{cases}$

   Evaluar la continuidad de la función en el intervalo cerrado $[-1,4]$

10. Dadas las siguientes funciones por partes $f$ en el intervalo $[-3,4\,]$ grafique y:

i. $f(x) = \begin{cases} -2x + 4 & si\ x \leq 1 \\ \frac{1}{x} & si\ 1 < x < 2 \\ \frac{x^2 - x - 6}{x - 3} & si\ x \geq 2 \end{cases}$

ii. $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + 3x + 2}{x + 2} & si\ x \leq 1 \\ \frac{1}{x} & si\ 1 < x < 3 \\ \sqrt{x - 3} & si\ x \geq 3 \end{cases}$

   a. Determine para qué valores $x$ la función es discontinua (evalúe para cada $x$ las 3 condiciones de continuidad).
   b. Clasifique las discontinuidades halladas en inevitable o evitable según corresponda. En este último caso, indique cómo se puede redefinir $f(x)$ para eliminar la discontinuidad.

11. ¿Para qué valores de $a$ y $b$ la siguiente función es continua en todos los números reales?

$$f(x) = \begin{cases} x + a & si\ x \leq -1 \\ bx^2 + 3 & si - 1 < x \leq 0 \\ a\,\dfrac{sen(x)}{x} & si\ x > 0 \end{cases}$$