ASIGNATURA	Elementos de Cálculo I	AÑO	2018

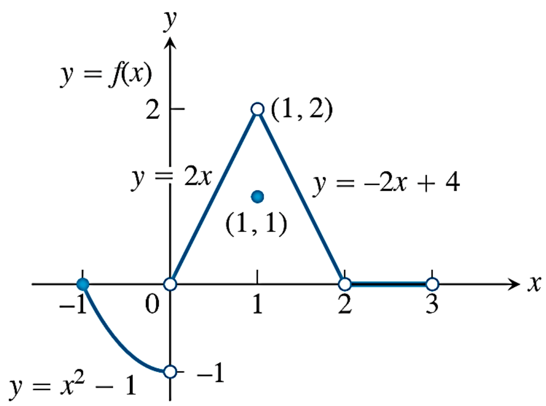
1. Indique Verdadero (V) o Falso (F) según corresponda. Justifique las respuestas Falsas.

Enunciado	V	F
Sea $f(x) = \log_3(x)$ una función uno a uno, su inversa es la función $f^{-1}(x) = -1/\log_3(x)$.		
Si $f(2) = 5$, entonces nada se puede asegurar acerca de $\lim_{x\to 2} f(x) = 5$.		
Dada $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + 2x^2 - 5$, la función g resultante luego de hacer una compresión horizontal en un factor de 3 y una reflexión respecto al eje x es $g(x) = -27x^3 + 18x^2 - 5$.		
Dadas $f(x) = \sqrt{x-1}$ y $g(x) = \sqrt{2-x}$, el dominio de f/g es $[1,2)$.		
Una función continua f que satisface que $\lim_{x\to -\infty} f(x) = 3$ y el $\lim_{x\to\infty} f(x) = 5$ tiene una raíz.		
La función $\frac{sen^2(2x)}{x}$ tiene límite para $x \to 0$ y es igual a 2.		
El teorema del valor intermedio asegura que si g es una función continua en $[-1,2]$ entonces existe una raíz en $(-1,2)$.		
Dada $f(x) = \frac{(x+2)^2+4}{3}$ con dominio restringido en $[-2,\infty)$, entonces su inversa es $f^{-1}(x) = \sqrt{3x-4} + 2$ y su dominio $D_{f^{-1}} = \left[\frac{4}{3},\infty\right)$.		
La función $f(x) = cos(x)/(x^2+2)$ es continua en la recta real.		
La función f tiene un máximo o un mínimo local en $x = c$, si y sólo sí c es un número crítico de f.		
Si f y g son derivables, entonces: $\frac{d[f(x).g(x)]}{dx} = f'(x).g'(x)$		
La derivada de una función polinomial, es otra función polinomial.		
Sea $f(x) = \ln(10)$, se tiene que $f'(x) = \frac{1}{10}$.		
Si $f(x)$ es derivable en (a,b), entonces $f(x)$ es continua en (a,b)		
Un punto crítico de una función f es un número $x = c$ en el dominio de f tal que $f'(c) = 0$.		
Si $f'(x) = 0$ y $f'''(x) < 0$ en $x = 4$ se puede asegurar que f tiene un máximo en $x = 4$.		
Si f es continua en $[-1,1]$ y derivable en $(-1,1)$ y $f(-1) = 0$ y $f(1) = 1$ entonces existe al menos un valor c en $(-1,1)$ para el cual $f'(c) = 2$.		
Un punto de inflexión P es un punto en el cual $f'(x) > 0$ hacia la derecha del mismo y $f'(x) < 0$ hacia la izquierda o viceversa.		
Si $\lim_{x\to c} f(x) = 0$ y $\lim_{x\to c} p(x) = 0$, entonces se tiene que $\lim_{x\to c}[p(x)]^{f(x)} = 0$.		
Dados $\lim_{x\to c} f(x) = 0$, $\lim_{x\to c} p(x) = \infty$ y $\lim_{x\to c} g(x) = 1$, las siguientes son formas indeterminadas de límites: $\lim_{x\to c}[g(x)]^{p(x)}$ y $\lim_{x\to c}[f(x) * p(x)]$.		
Supóngase que una función f es no negativa y creciente en $[a,b]$, si se divide el intervalo en n subintervalos, cada uno de longitud $\Delta x = \frac{b-a}{n}$, y se toma el extremo derecho c_i de cada subintervalo para obtener $f(c_i)$ en la suma de Riemann, entonces se obtiene una aproximación por defecto del área bajo la curva.		

2. Sea $f(x) = \frac{-2x+3}{x+5}$, se pide indicar:
    a. Dominio implícito e Imagen.
    b. Ecuación de la función inversa (si existe).
    c. Comprobar el resultado anterior componiendo ambas funciones.
    d. Intersecciones con los ejes.
    e. Paridad.
    f. Intervalo de valores de x para los cuales $f(x)$ es positiva.
    g. Ecuaciones de sus asíntotas *(aplique lo aprendido en Límite)*.
    h. Graficar la función, empleando la información encontrada previamente.

3. Calcular los siguientes límites:
    a. $\lim_{x \to 0} \frac{\tan(2x)}{tan(\pi x)}$
    b. $\lim_{x \to -\infty} \frac{4-3x^3}{\sqrt{x^6+9}}$

4. A partir de la gráfica de f:
    a. Establezca para <u>cada valor</u> de x, siendo $x = -1, 0, 1, 2$ y 3 si existe o no continuidad. Para ello, evalúe para cada x las 3 condiciones necesarias para que una función sea continua.
    b. En los puntos en los cuales encontró discontinuidades, indique si es evitable o inevitable, y en caso de que sea evitable indique qué valor debe asignarse a $f(x)$ para eliminar la discontinuidad?



5. La curva cuya ecuación está dada por $2(x^2 + y^2)^2 = 25(x^2 - y^2)$ se conoce como ***lemniscata***. Emplee la derivación implícita para encontrar en el punto (3,1):
    a. Ecuación de la recta tangente a la curva.
    b. Ecuación de la recta normal a la curva.

6. Hallar la derivada y' en cada caso.
    a. $y = \frac{1}{\sqrt[3]{x+\sqrt{x}}}$
    b. $y = \ln(x^2 + y^2)$
    c. $y = x^{\sqrt[3]{x}}$

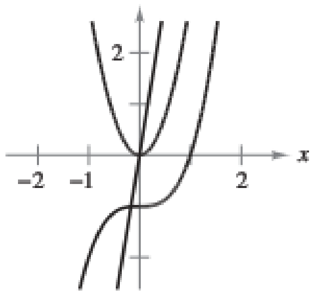
d. $y^3 + y^2 - 5y - x^2 = -4$

e. $y = \{x + [x + sen^2(x)]^3\}^4$

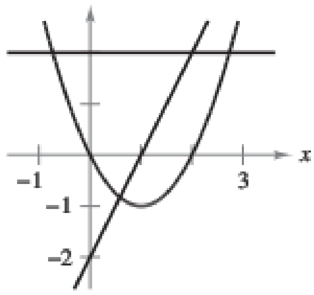
f. $y = [\tan(x^2)]^{1/x}, x \neq 0 \ \wedge x \neq \sqrt{n\frac{\pi}{2}}$, siendo n impar (Exprese el resultado en función de x)

7. Se muestran las gráficas de la función y de sus derivadas en el mismo plano cartesiano. Clasificar la gráficas como f , f' o f'' y argumentar tu elección.

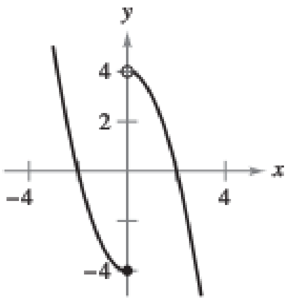
A)

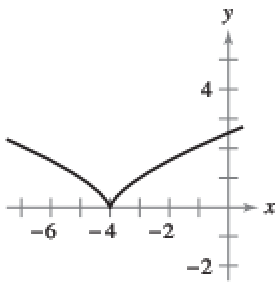


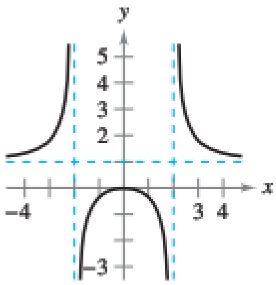
B)



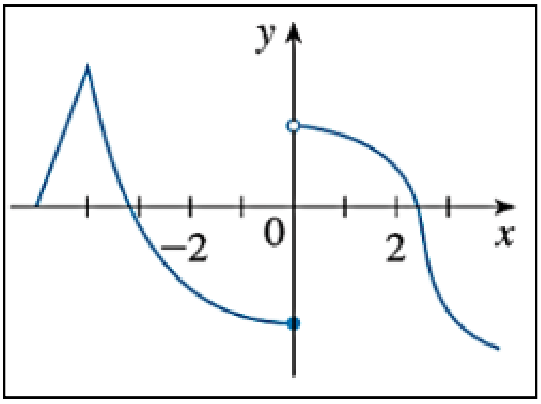
8. A partir de la gráfica de las siguientes funciones, argumentar en qué valores la función no es derivable.







9. Para cada uno de los valores de x indique si la función cuya gráfica se muestra tiene un máximo o mínimo absoluto, un máximo o mínimo local, o ni un máximo ni un mínimo.

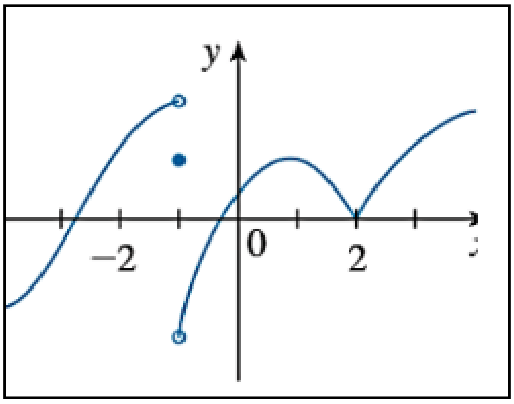


En x= -5 ______________________

En x=-4______________________

En x= -2______________________

En x= 0 ______________________



En x= -1 ______________________

En x=0_____________________

En x=2 _____________________

En x=3 _____________________

10. Dadas las funciones $f(x)=\frac{2+x^2}{x-3}$ definida en $[-5\ ,10]$y $g(x)=\frac{x^2+1}{x}$ definida en $[-2{,}3]$, determine:
    a. Intervalos de crecimiento y decrecimiento.
    b. Extremos relativos y absolutos.
    c. Intervalos de concavidad y puntos de inflexión.
    d. Emplee la información de los incisos a) al c) para bosquejar la gráfica de f.

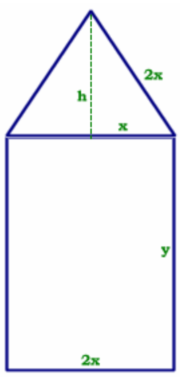
11. De una lámina cuadrada de 10 cm de lado se cortan cuadrados en cada uno de los vértices con el objeto de hacer una caja abierta por arriba. Calcular la longitud del lado del cuadrado que se debe cortar para que el volumen de la caja sea máximo.

12. Determinar las dimensiones del rectángulo de área máxima inscrito en un círculo de radio ½.

13. Descomponer el número 16 en dos sumandos positivos tales que su producto sea máximo.

14. Una imprenta recibe el pedido de diseñar un cartel con las siguientes características: la región impresa debe ocupar $100\mathrm{m}^2$, el margen superior debe medir $3cm$, el inferior $2cm$ y los márgenes laterales $4cm$ cada uno. Calcula las dimensiones que debe tener el cartel de modo que se utilice la menor cantidad de papel posible.

15. Se considera una ventana rectangular en la que el lado superior ha sido sustituido por un triángulo equilátero como indica la figura. Sabiendo que el perímetro de la ventana es de 6.6 m, halle sus dimensiones para que su superficie sea máxima.



16. Evaluar las siguientes integrales:

a. $\int_1^9 \frac{1}{\sqrt{x}\,\left(1+\sqrt{x}\right)^2}\,dx$ b. $\int_{-1}^0 x\sqrt{1-2x}\,dx$ c. $\int \frac{\ln(x)}{x^3}\,dx$

d. $\int e^x \cos(x)\,dx$ e. $\int_1^2 \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\,dx$

17. Dada la siguiente integral

$$\int_{-1}^{2} \frac{dx}{x^3}$$

¿Es continua en todo punto interior del intervalo? ¿Qué ocurre? Resuelva y establezca si se trata de una integral convergente o divergente.

18. Demuestre los siguientes enunciados utilizando la regla de L'Hopital

a. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{x}{x+1}-\frac{1}{\ln x}\right)=\frac{1}{2}$

b. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x^{\frac{1}{x}}\right)=1$

c. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{2\sin x-\sin(2x)}{x-\sin x}\right)=6$

19. Demuestre que el volumen determinado por las siguientes curvas al rotarlas alrededor del eje x es $392\pi/3$ unidades cúbicas:

$$x^2+y^2=9, \qquad y=4, \qquad y=-4$$

20. Demuestre que la longitud del arco de curva entre 1 y 2 de la siguiente función es 17/12 unidades:

$$f(x)=\frac{x^3}{6}+\frac{1}{2x}$$

21. Comprobar que $s(t)=\frac{t^4}{16}$, es una solución de la ecuación diferencial: $s`(t)=t\sqrt{s(t)}$.

22. Resolver las siguientes ecuaciones lineales aplicando el método que le resulte conveniente y considerando en los casos que corresponda, las condiciones iniciales:

a. $y' - 2y = 3e^{2x}; y(0)=0$

b. $2xy' + y = 10\sqrt{x}$

c. $\frac{dy}{dx} + y\cot(x) = \cos(x)$