ELEMENTOS DE LÓGICA
Y TEORÍA DE CONJUNTOS

Dra. Patricia Kisbye

Dr. Alejandro L. Tiraboschi

INTRODUCCIÓN

Estas notas han sido elaboradas con el objetivo de ofrecer al ingresante a las carreras de la FaMAF un curso introductorio a la lógica elemental y teoría de conjuntos. Los temas abarcados son, a grandes rasgos, nociones básicas de conjuntos, operaciones entre conjuntos y producto cartesiano; proposiciones, conectivos lógicos y cuantificadores. Gran parte de los contenidos y ejercicios han sido extraídos de los primeros capítulos de nuestras notas *Elementos de Lógica y Computación*, Trabajos de Informática, No. 1/99.

Cada capítulo contiene un desarrollo teórico, variados ejemplos y una completa lista de ejercicios de aplicación.

Alejandro Tiraboschi
Patricia Kisbye

Índice general

CAPíTULO 1

LÓGICA

Uno de los procesos por los cuales adquirimos conocimiento es el proceso de razonamiento. A su vez, hay una variedad de modos o formas mediante las cuales razonamos o argumentamos a favor de una conclusión. Ciertas formas de razonamiento parecen mostrar que si se suponen ciertas premisas, entonces la conclusión se sigue necesariamente. A tales razonamientos se los ha denominado deductivos y forman el objetivo central de lo que clásicamente se ha denominado lógica.

En un sentido amplio, el término *lógica* hace referencia al estudio de todos los razonamientos, y en un sentido estricto ha estado circunscripto al estudio del razonamiento deductivo.

Cierto tipo de razonamiento deductivo se basa en la lógica proposicional. Lo que caracteriza a la lógica proposicional es que toma como unidades básicas a las proposiciones y que tiene en cuenta cómo se combinan entre ellas por medio de conectivos lógicos para formar argumentos válidos.

En este capítulo trataremos el concepto de proposición lógica, valor de verdad, y los conectivos lógicos principales para construir nuevas proposiciones,

1. Proposiciones

Una *proposición* es una sentencia declarativa que puede ser verdadera o falsa, pero no ambas a la vez. También podríamos decir que una proposición es una sentencia que expresa una propiedad para un individuo o ente, o que expresa la validez de una relación entre individuos o entes. Algunos ejemplos de proposiciones son:

- Hoy es sábado.
- Los triángulos tienen cuatro vértices.
- $25 + 24 = 49$.
- Juan va al trabajo en tren .

Las sentencias exclamativas, las interrogativas y las imperativas tales como:

¡Viva la patria!,

¿Está lloviendo?

Oprima la tecla $\langle$ *ENTER* $\rangle$

no son proposiciones puesto que no pueden ser declaradas como verdaderas o falsas.

La veracidad (V) o falsedad (F) de una proposición se llama *valor de verdad* de la proposición y viene dada por algún criterio independiente de la proposición.

Algunas proposiciones parecieran tener distintos valores de verdad según el caso. Por ejemplo, si decimos: *Hoy es sábado*, es falsa de domingo a viernes y es verdadera los sábados. O por ejemplo, *Nalbandián ganó* depende de a cuál partido nos estemos refiriendo. Esto se debe a que en nuestro lenguaje coloquial hay una gran parte de la información que está implícita. La palabra *hoy* está indicando una fecha particular, aunque no se esté diciendo explícitamente cuál. Un titular en un periódico que diga *Nalbandián ganó*, se está refiriendo a un determinado partido.

2. Conectivos lógicos

En el cálculo proposicional se suelen utilizar letras minúsculas como p, q, r,... para simbolizar las proposiciones. Estos símbolos pueden modificarse o combinarse mediante conectivos lógicos dando lugar a *proposiciones compuestas*. Los conectivos lógicos que estudiaremos son la negación: $\neg$, la conjunción: $\wedge$, la disyunción: $\vee$, la disyunción exclusiva: $\underline{\vee}$, la implicación: $\Rightarrow$ y la doble implicación: $\Leftrightarrow$. La negación modifica *una* proposición y por lo tanto se dice que es *1-aria* o *unitaria*. Los restantes conectivos se aplican a dos proposiciones y se los llama *2-arios* o *binarios*.

EJEMPLO 1.1. Consideremos las proposiciones p: "4 es positivo" y q: "$\sqrt{2}$ es racional". Algunas posibles combinaciones de p y q son:

$\neg\, p$:	4 **no** es positivo.
$p \wedge q$:	4 es positivo **y** $\sqrt{2}$ es racional.
$\neg\, p \wedge q$:	4 **no** es positivo **y** $\sqrt{2}$ es racional.
$p \vee q$:	4 es positivo **o** $\sqrt{2}$ es racional.
$p \Rightarrow q$:	Si 4 es positivo **entonces** $\sqrt{2}$ es racional.
$p \Leftrightarrow q$:	4 es positivo **si y sólo si** $\sqrt{2}$ es racional.

3. Negación

Si p es una proposición, simbolizamos con $\neg\, p$ a su negación.
La *negación* es una operación unitaria que se aplica a una proposición y tiene el efecto de revertir el valor de verdad. Esto es, si p es verdadera entonces $\neg\, p$ es falsa, y si p es falsa entonces $\neg\, p$ es verdadera.

EJEMPLO 1.2. Si p simboliza la proposición *estamos en la clase de Álgebra*, entonces $\neg\, p$ es *no estamos en la clase de Álgebra*.

En la siguiente tabla mostramos la relación entre los valores de verdad de p y $\neg\, p$:

p	$\neg\, p$
V	F
F	V

Una tabla de este tipo, en la que se listan simultáneamente los valores de verdad de la proposición p y la que resulta de aplicar un conectivo se llama *tabla de verdad*.

EJEMPLO 1.3. Consideremos la proposición

p: "10 es múltiplo de 5".

Entonces el valor de p es V. Su negación debe ser una proposición que es falsa siempre que p sea verdadera, por lo tanto $\neg\, p$ debe expresar exactamente lo contrario a lo que expresa p:

$\neg p$: "10 no es múltiplo de 5".

EJEMPLO 1.4. Consideremos la proposición

q : "Todos los perros son blancos".

¿Cuál es la negación de esta proposición?

Analicemos si alguna de las siguientes proposiciones es la negación de q:

r: *Algunos perros son blancos.*
s: *Ningún perro es blanco*
t: *Al menos un perro no es blanco.*

Si la proposición q es verdadera, entonces r también lo es. Por lo tanto r no es la negación de q.

Si existiera un perro blanco y un perro color marrón, entonces q y s serían ambas falsas, por lo tanto s tampoco es la negación de q.

Veamos el caso de la proposición t. Si q es verdadera es porque todos los perros son blancos. Por lo tanto t es falsa. A su vez, si t es verdadera es porque hay un perro que no es blanco, por lo tanto q es falsa. Por lo tanto t es la negación de q.

4. Conjunción

La *conjunción* es un conectivo que permite formar proposiciones compuestas a partir de dos o más proposiciones. Una conjunción de proposiciones es verdadera si y sólo si cada una de ellas es verdadera. Basta que un solo término de la conjunción sea falso para que toda la conjunción sea falsa. En castellano, normalmente la conjunción se expresa por medio de la 'y', de comas o de una combinación de éstas, o palabras como 'pero'. Así, por ejemplo, la proposición compuesta *Córdoba tiene sierras y tiene ríos* es verdadera porque cada parte de la conjunción es verdadera. No ocurre lo mismo con la proposición *Córdoba tiene sierras y tiene costa al mar*. Esta proposición es falsa porque Córdoba no tiene costa al mar.

La siguiente tabla corresponde a la tabla de verdad de la conjunción:

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

EJEMPLO 1.5. Si p es "algunas aves vuelan" y q es "el gato es un ave", entonces $p \wedge q$ expresa "algunas aves vuelan y el gato es un ave", que es obviamente falsa pues los gatos no son aves. Por otro lado la proposición $p \wedge \neg q$ que dice "algunas aves vuelan y el gato no es un ave" es verdadera pues es la conjunción de dos proposiciones verdaderas.

5. Disyunción

Existen dos operadores de disyunción: La *disyunción exclusiva o excluyente* y *la disyunción inclusiva o incluyente*.

La disyunción exclusiva de dos proposiciones es verdadera si sólo una de las proposiciones es verdadera, y la indicamos con el símbolo $\veebar$.

La disyunción inclusiva entre dos proposiciones es falsa sólo si ambas proposiciones son falsas y se indica con el símbolo $\vee$. En el lenguaje coloquial y en matemática es más frecuente el uso de la disyunción inclusiva, también llamada el "o inclusivo". A veces el contexto de una frase indica si la disyunción es excluyente o incluyente. Un ejemplo de disyunción de tipo inclusivo es:

Los alumnos de este curso son inteligentes o estudian mucho.

En este caso, los alumnos pueden cumplir cualquiera de los dos requisitos, o también cumplir los dos. Pero por ejemplo, si en un restaurante con menú fijo se nos dice que tenemos como postre 'helado o flan' normalmente no significa que podamos pedir ambos, siendo en este caso la disyunción exclusiva.

Frecuentemente y cuando no es claro en el contexto de la oración se indica que una disyunción es incluyente (excluyente respectivamente) terminando la frase con *o ambas* (respectivamente *pero no ambas*).

Las siguientes tablas resumen los valores de verdad de $p \veebar q$ y $p \vee q$:

p	q	$p \veebar q$
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	F

p	q	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

6. Propiedades de la conjunción y la disyunción

Los conectivos lógicos binarios combinan, como su nombre lo indica, dos proposiciones. Para la disyunción y para la conjunción se cumple la *propiedad conmutativa*:

$$p \wedge q = q \wedge p, \qquad p \vee q = q \vee p \qquad \text{y} \qquad p \veebar q = q \veebar p.$$

Si combinamos tres o más proposiciones utilizando uno de estos conectivos, entonces no importa cuál es el orden en que se realicen las operaciones. Por ejemplo, la conjunción entre tres proposicones p, q y r:

$$p \wedge q \wedge r$$

puede efectuarse operando $(p \wedge q) \wedge r$ o $p \wedge (q \wedge r)$. Es decir, la conjunción y la disyunción son operaciones *asociativas*.

En cambio, si utilizamos dos o más conectivos distintos, no se cumple la asociatividad en todos los casos. Por ejemplo, la expresión

$$(p \wedge q) \vee r$$

indica que se efectúa primero $p \wedge q$ y luego la disyunción con r; mientras que en la expresión

$$p \wedge (q \vee r)$$

se efectúa la conjunción de p con $q \vee r$. Notemos por ejemplo que si $p = F$, $q = V$ y $r = V$, entonces $(p \wedge q) \vee r = V$ y $p \wedge (q \vee r) = F$, por lo tanto $(p \wedge q) \vee r \neq p \wedge (q \vee r)$.

Las siguientes propiedades pueden comprobarse construyendo las tablas de verdad correspondientes.

Propiedad asociativa

$$(p \wedge q) \wedge r = p \wedge (q \wedge r)$$

$$(p \vee q) \vee r = p \vee (q \vee r)$$

Propiedad distributiva

$$p \wedge (q \vee r) = (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$$

$$p \vee (q \wedge r) = (p \vee q) \wedge (p \vee r).$$

Leyes de Morgan

$$\neg(p \wedge q) = \neg p \vee \neg q$$

$$\neg(p \vee q) = \neg p \wedge \neg q$$

Por ejemplo, para comprobar la propiedad asociativa construimos la tabla de verdad de $(p \wedge q) \wedge r$ y de $p \wedge (q \wedge r)$, y vemos que coinciden en su valor de verdad para cualquier terna de valores que demos a p, q y r.

p	q	r	$p \wedge q$	$(p \wedge q) \wedge r$
V	V	V	V	**V**
V	V	F	V	**F**
V	F	V	F	**F**
V	F	F	F	**F**
F	V	V	F	**F**
F	V	F	F	**F**
F	F	V	F	**F**
F	F	F	F	**F**

p	q	r	$q \wedge r$	$p \wedge (q \wedge r)$
V	V	V	V	**V**
V	V	F	F	**F**
V	F	V	F	**F**
V	F	F	F	**F**
F	V	V	V	**F**
F	V	F	F	**F**
F	F	V	F	**F**
F	F	F	F	**F**

7. Ejercicios

1. En la columna de la izquierda hay una lista de proposiciones. Para cada una de ellas, indicar si la correspondiente proposición a la derecha es o no su negación. Si no lo es, escribir correctamente la negación.

a) El pizarrón es verde.	*a*) El pizarrón es negro.
b) 4 es múltiplo de 8.	*b*) 4 no es múltiplo de 8.
c) La ecuación $x^2 - 9 = 0$ no tiene solución real.	*c*) La ecuación $x^2 - 9$ tiene dos soluciones reales.
d) La ecuación $2x + 3 = 0$ no tiene solución real.	*d*) La ecuación $2x + 3 = 0$ tiene al menos una solución real.
e) $a \leq b$	*e*) $a > b$
f) $a \geq b$	*f*) $a \leq b$
g) $a < b \leq c$	*g*) $a > b \geq c$
h) $a < b \leq c$	*h*) $a \geq b$ o $b > c$
i) m es múltiplo de n.	*i*) n es múltiplo de m.
j) h es divisible por 2 y por 3.	*j*) h no es divisible por 2 ni por 3.
k) 2 y 3 dividen al número f.	*k*) 2 no divide a f o 3 no divide a f.
l) No estudio los domingos.	*l*) No estudio de lunes a sábado.

2. Evaluar cada proposición según los valores de verdad $p = F$, $q = V$, $r = F$.

    a) $p \vee q$
    b) $\neg\, p \vee \neg\, q$
    c) $\neg\, p \vee q$
    d) $p \vee \neg\,(q \wedge r)$
    e) $\neg\,(p \vee q) \wedge (\neg\, p \vee r)$
    f) $\neg p \wedge (q \vee r)$

3. Suponer que a, b y c son números reales. Representar en forma simbólica los enunciados dados tomando: $p : a < b$, $q : b < c$, $r : a < c$, $s : b = c$
    a) $a < b < c$.
    b) $(a \geq b)$ y $(b < c)$.
    c) $b \leq c$
    d) $b \geq c$

4. Suponiendo p y q verdaderos, y r y s falsos, indica los valores de verdad de las siguientes expresiones:
    a) $p \vee (q \wedge r)$
    b) $(p \wedge (q \wedge r)) \vee \neg((p \vee q) \wedge (r \vee s))$
    c) $(\neg(p \wedge q) \vee \neg r) \vee (((\neg p \wedge q) \vee \neg r) \wedge s)$

5. Compruebe a través de las tablas de verdad, las propiedades distributivas de la disyunción y de la conjunción, y las leyes de Morgan.

CAPíTULO 2

OTROS CONECTIVOS

1. Condicional o implicación

Otra forma de conectar dos proposiciones p y q es diciendo: *si se cumple* p *entonces se cumple* q, es decir por medio de una implicación. Este conectivo lógico se llama *condicional* o *implicación* y se simboliza con $\Rightarrow$.

EJEMPLO 2.1. Supongamos que para regularizar cierta materia es necesario contar con el 80 % de asistencia. Entonces podemos conectar las proposiciones

p: *He regularizado la materia,*

q: *He asistido al 80 % de las clases,*

con el conectivo condicional $\Rightarrow$:

$p \Rightarrow q$: *Si he regularizado la materia entonces he asistido al 80 % de las clases.*

La proposición q en la implicación o condicional $p \Rightarrow q$ es lo que se afirma que ocurre si se cumple la proposición p. También decimos que p es el *antecedente* y q es el *consecuente*. El condicional es verdadero si el antecedente p es falso, o si el antecedente y el consecuente son ambos verdaderos. La implicación o condicional $p \Rightarrow q$ es falsa sólo si p es verdadera y q es falsa.

La siguiente tabla corresponde a los valores de verdad de la implicación:

p	q	$p \Rightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

En una implicación $p \Rightarrow q$, p es la *condición suficiente* para q y q es la *condición necesaria* para p. Es decir, es *suficiente* que ocurra p para que ocurra q, y *necesariamente* ocurrirá q si ocurre p.

A diferencia de los otros conectivos, la tabla de verdad del condicional no se condice con el uso que hacemos de este tipo de expresiones en el lenguaje natural. Por ejemplo, para el lenguaje cotidiano, la expresión: *Si llueve entonces Juan usa paraguas* pareciera que indica que si no llueve entonces Juan no usa paraguas. Es decir, no sería verdadera la proposición si el antecedente es falso y el consecuente verdadero. Sin embargo, para la lógica esto es verdadero.

Si $p \Rightarrow q$ es una implicación, entonces $q \Rightarrow p$ es la *recíproca*, $\neg p \Rightarrow \neg q$ es la *inversa* y $\neg q \Rightarrow \neg p$ es la *contrarrecíproca*. Las tablas de verdad para $q \Rightarrow p$, $\neg p \Rightarrow \neg q$ y $\neg q \Rightarrow \neg p$ son:

p	q	$q \Rightarrow p$
V	V	V
V	F	V
F	V	F
F	F	V

p	q	$\neg p \Rightarrow \neg q$
V	V	V
V	F	V
F	V	F
F	F	V

p	q	$\neg q \Rightarrow \neg p$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Observemos que los valores de verdad de una implicación $p \Rightarrow q$ y de su contrarrecíproca $\neg q \Rightarrow \neg p$ son los mismos para todos los valores de p y q posibles, es decir, son *lógicamente equivalentes.*

Existen otras formas de expresar un condicional que no es necesariamente el *si . . . entonces*. Los siguientes ejemplos también son condicionales de la forma $p \Rightarrow q$:

- *Viajo en taxi si estoy apurado.* (p : “Estoy apurado”, q : “Viajo en taxi”.)
- *Sólo si es sábado voy al cine.* (p : “Voy al cine”, q : “Es sábado”.)
- *Es suficiente que llueva para que me quede en casa.* (p : “Llueva”, q : “Me quedo en casa”.)

2. Bicondicional o doble implicación

Una proposición bicondicional será verdadera si y sólo si ambas proposiciones tienen el mismo valor de verdad. El bicondicional entre p y q se simboliza $p \Leftrightarrow q$ y se lee p *si y sólo si* q. El bicondicional $p \Leftrightarrow q$ puede pensarse también como la proposición compuesta

$$(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p).$$

EJEMPLO 2.2. Supongamos que para aprobar un parcial de Álgebra la nota debe ser mayor que 4. Entonces con las proposiciones simples

p: “Apruebo un parcial”,

q: “La nota es mayor que 4”,

y el conectivo $\Leftrightarrow$ formamos la proposición compuesta

$p \Leftrightarrow q$: “ Apruebo un parcial si y sólo si la nota es mayor que 4”.

La siguiente tabla corresponde a la doble implicación $p \Leftrightarrow q$:

p	q	$p \Leftrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Es un ejercicio sencillo comprobar que esta tabla coincide con la tabla de verdad de $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$.

3. Reglas de precedencia para los conectivos lógicos

Utilizando los conectivos lógicos estamos en condiciones de formar proposiciones compuestas. Si no tenemos el cuidado de hacer un uso adecuado de los paréntesis podremos formar expresiones que son ambiguas e imposibles de interpretar. Por ejemplo

$$p \Rightarrow p \wedge q \Rightarrow r \tag{3.1}$$

puede ser interpretada como $(p \Rightarrow (p \wedge q)) \Rightarrow r$ o como $(p \Rightarrow p) \wedge (q \Rightarrow r)$, o también hay otras posibilidades. Por lo tanto expresiones como (3.1) no son correctas y deben ser evitadas con un uso adecuado de paréntesis. Sin embargo, el exceso de paréntesis suele generar expresiones largas y difíciles de leer y, por lo tanto, se han creado reglas para eliminar algunos de ellos. Estas reglas son llamadas *reglas de prioridad* o *de precedencia*. Generalmente cada conectivo tiene una prioridad dada, y las conexiones con una prioridad más alta introducen una unión más fuerte que las conexiones con una prioridad más baja. El conectivo $\neg$ tiene la prioridad más alta. Por ejemplo, la proposición $\neg p \vee q$ debe ser entendida como $(\neg p) \vee q$, y no como $\neg(p \vee q)$. En el caso de los conectivos binarios el orden de prioridades, de mayor a menor, es $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$ y $\Leftrightarrow$. Pese a que la prioridad de $\wedge$ es mayor que la de $\vee$, suele no hacerse distinción entre ellos y escribir los paréntesis correspondientes para evitar confusiones. Lo mismo puede decirse de la relación entre $\Rightarrow$ y $\Leftrightarrow$. Veamos ejemplos donde se aplica el uso de las prioridades: $p \Rightarrow p \wedge q$, debe ser interpretada como $p \Rightarrow (p \wedge q)$. La expresión $p \vee \neg r \Leftrightarrow p \wedge q$, debe ser interpretada como $(p \vee (\neg r)) \Leftrightarrow (p \wedge q)$. Pese a estas reglas algunas expresiones requieren el uso de paréntesis. Por ejemplo, la expresión (3.1) es ambigua, y debe distinguirse si se trata de $(p \Rightarrow (p \wedge q)) \Rightarrow r$, o bien $p \Rightarrow ((p \wedge q) \Rightarrow r)$.

Ahora estamos en condiciones de evaluar el valor de verdad de cualquier proposición compuesta teniendo en cuenta los valores de verdad de las proposiciones que la componen y los conectivos lógicos.

EJEMPLO 2.3. Dar la tabla de verdad para $(p \Rightarrow q) \wedge [(q \wedge \neg r) \Rightarrow (p \vee r)]$.

p	q	r	$p \Rightarrow q$	$q \wedge \neg r$	$p \vee r$	$(q \wedge \neg r) \Rightarrow (p \vee r)$	$(p \Rightarrow q) \wedge [(q \wedge \neg r) \Rightarrow (p \vee r)]$
V	V	V	V	F	V	V	V
V	V	F	V	V	V	V	V
V	F	V	F	F	V	V	F
V	F	F	F	F	V	V	F
F	V	V	V	F	V	V	V
F	V	F	V	V	F	F	F
F	F	V	V	F	V	V	V
F	F	F	V	F	F	V	V

4. Ejercicios

1. Sean p, q, r las proposiciones siguientes:
   p: “ está lloviendo”
   q: “el sol está brillando”
   r: “hay nubes en el cielo”.
   Traducir lo siguiente a notación lógica, utilizando p, q, r y conectivos lógicos.
   a) Está lloviendo y el Sol está brillando”.
   b) Si está lloviendo , entonces hay nubes en el cielo.
   c) Si no está lloviendo, entonces el Sol no está brillando y hay nubes en el cielo.
   d) El Sol está brillando si y sólo si no está lloviendo.
   e) Si no hay nubes en el cielo, entonces el Sol está brillando.

2. Sean p, q y r como en el ejercicio anterior. Traducir lo siguiente a oraciones en español.
   a) $(p \wedge q) \Rightarrow r$
   b) $\neg p \Leftrightarrow (q \vee r)$
   c) $(p \Rightarrow r) \Rightarrow q$
   d) $\neg (p \Leftrightarrow (q \vee r))$
   e) $\neg (p \vee q) \wedge r$

3. Supongamos que todos los días que llueve Juan usa paraguas. ¿Cuáles de las siguientes proposiciones puede asegurar que son verdaderas y cuáles no puedes asegurar?
   a) Si llueve entonces Juan usa paraguas.
   b) Si Juan usa paraguas entonces llueve.

c) Si Juan no usa paraguas entonces no llueve.
d) Si no llueve entonces Juan no usa paraguas.
e) Si no llueve entonces Juan usa paraguas.

4. Escribir la recíproca, la contrarrecíproca y la inversa de cada una de las siguientes implicaciones:
   a) Si 4 es par entonces $1 > 0$.
   b) $2 + 3 = 5$ si $1 + 1 < 3$.
   c) Si 4 es impar entonces $1 > 0$.
   d) Si $1 + 1 < 3$ entonces $2 = 4$.

5. Determinar los valores de verdad de las siguientes proposiciones compuestas.
   a) Si $2 + 2 = 4$ entonces $2 + 4 = 8$.
   b) Si $2 + 2 = 5$ entonces $2 + 4 = 8$.
   c) Si $2 + 2 = 4$ entonces $2 + 4 = 6$.
   d) Si $2 + 2 = 5$ entonces $2 + 4 = 6$.

6. Suponiendo que $p \Rightarrow q$ es falso, indicar los valores de verdad para

   a) $p \wedge q$ *b*) $p \vee q$ *c*) $q \Rightarrow p$

7. Sabiendo que la proposición compuesta $(\neg q) \vee (q \Rightarrow p)$ es falsa, indicar cuál es el valor de verdad de las proposiciones p y q.

8. Indicar para qué valores de verdad de p y q resulta verdadera la proposición compuesta $(p \Rightarrow q) \wedge (\neg q \Rightarrow p)$.

9. Para las siguientes proposiciones compuestas, elabore las tablas de verdad correspondientes:
   a) $\neg\,(p \wedge q)$
   b) $\neg\,(p \vee q)$
   c) $(p \Rightarrow q) \Rightarrow [(p \vee \neg\, q) \Rightarrow (p \wedge q)]$
   d) $[(p \vee q) \wedge r] \Rightarrow (p \wedge \neg\, q)$
   e) $[(p \Leftrightarrow q) \vee (p \Rightarrow r)] \Rightarrow (\neg\, q \wedge p)$
   f) $\neg\,(p \wedge q) \vee (r \wedge \neg\, p)$
   g) $(p \vee q) \wedge (\neg\, p \vee q) \wedge (p \vee \neg\, q) \wedge (\neg\, p \vee \neg\, q)$

CAPíTULO 3

TEORÍA BÁSICA DE CONJUNTOS

Al hablar de conjuntos nos referiremos a cualquier colección de objetos, individuos o entes. Ejemplos de conjuntos son el conjunto de los números naturales, de los televisores de la ciudad de Córdoba y de los peces en los océanos. En este curso nos referiremos específicamente a los conjuntos formados por números y cómo trabajar con ellos desde un punto de vista formal de la matemática. Esta teoría elemental de conjuntos es fundamental en matemática y también de suma importancia en la definición de conceptos básicos de informática.

1. Conjuntos y pertenencia

Un *conjunto* está integrado por objetos y los objetos que integran el conjunto se llaman *elementos* de ese conjunto. Ejemplos de conjuntos son los siguientes:

- El conjunto de los números enteros.
- El conjunto de los números naturales mayores que 5 y menores que 9.
- El conjunto formado por un punto P en el plano y las rectas que pasan por él.
- El conjunto formado por los estudiantes de primer año de la FAMAF.

Como mencionamos anteriormente, trabajaremos con conjuntos cuyos elementos son números como es el caso de los dos primeros ejemplos.

En general usaremos letras mayúsculas para designar a los conjuntos y letras minúsculas para designar a sus elementos. Si a es un elemento de un conjunto A se escribe $a \in A$ y se lee a *pertenece a* A o a *es un elemento de* A. Si a no es un elemento del conjunto A se escribe $a \notin A$ y se lee a *no pertenece a* A o a *no es elemento de* A. Los símbolos $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{R}$ servirán para denotar a los siguientes conjuntos:

$\mathbb{N}$: el conjunto de los números naturales.

$\mathbb{Z}$: el conjunto de los números enteros.

$\mathbb{Q}$: el conjunto de los números racionales.

$\mathbb{R}$: el conjunto de los números reales.

Definir un conjunto es describir de una manera precisa, sin ambigüedades, cuáles son los elementos de dicho conjunto. Existen distintas maneras de definir un conjunto. La forma más simple, pero que no siempre es posible, es listar todos los elementos del conjunto separados por comas y encerrando todo entre llaves. Por ejemplo:

$$A = \{1,\, 2,\, 3,\, 5, \pi\}, \qquad U = \{0\}, \qquad M = \{2, 2^2, 2^3, 2^4\}.$$

En este caso decimos que el conjunto está definido *por extensión*.

EJERCICIO 3.1. Definir por extensión los siguientes conjuntos:

1. El conjunto T de los números naturales menores que 3.
2. El conjunto S de los números naturales mayores que 3.

En el caso del conjunto T, la definición por extensión es $T = \{1, 2\}$.

En el caso del conjunto S, resulta imposible listar todos los elementos porque hay infinitos. Esto muestra que no todos los conjuntos pueden definirse por extensión.

Una alternativa es definir al conjunto enunciando una propiedad de los elementos que lo integran, es decir:

$$A = \{x \mid x \text{ cumple la propiedad } P\}.$$

Esto se lee: *el conjunto formado por los x tales que x cumple la propiedad P.*

Esta forma de definir al conjunto se llama *por comprensión*. De esta manera, los conjuntos T y S del Ejercicio 3.1 se definen como

$$T = \{x \mid x \text{ es natural y } x < 3\}$$
$$S = \{x \mid x \text{ es natural y } x > 3\}$$

EJEMPLO 3.1. El conjunto

$$C = \{x \mid x \text{ es natural y } 2 \leq x \leq 2^6 \text{ y } x \text{ es potencia de } 2\}$$

es el conjunto formado por los elementos 2, 4, 8, 16, 32 y 64.

El conjunto C se define por extensión como

$$C = \{2,\ 4,\ 8,\ 16,\ 32,\ 64\}.$$

Una forma alternativa de definir por comprensión al conjunto C es

$$C = \{2^k \mid k \text{ es natural y } 1 \leq k \leq 6\},$$

donde indicamos que los elementos de C son de la forma 2^k, siendo k un natural entre 1 y 6. Esto es, los elementos de C son 2^1, 2^2, 2^3, 2^4, 2^5 y 2^6.

EJERCICIO 3.2. Describir por extensión los siguientes conjuntos:

- $M = \{2x + 1 \mid x \in \mathbb{N} \text{ y } x < 6\}$

- $Q = \{\frac{k}{2} \mid k \in \mathbb{N} \text{ y } 2 \leq k < 8\}$

Solución: Los elementos de M son de la forma $2x+1$, donde x es un natural menor que 6. Por lo tanto los elementos de M son

$$2\cdot 1+1, \quad 2\cdot 2+1, \quad 2\cdot 3+1, \quad 2\cdot 4+1, \quad 2\cdot 5+1,$$

es decir:

$$M = \{3,\ 5,\ 7,\ 9,\ 11\}$$

En el caso de Q, sus elementos son racionales de la forma $\frac{k}{2}$, donde k es un natural menor que 8 y mayor o igual a 2. Por lo tanto sus elementos son

$$\frac{2}{2}, \quad \frac{3}{2}, \quad \frac{4}{2}, \quad \frac{5}{2}, \quad \frac{6}{2}, \quad \frac{7}{2}.$$

Es decir:

$$Q = \{1,\ \frac{3}{2},\ 2, \frac{5}{2},\ 3,\ \frac{7}{2}\}$$

1.1. El conjunto vacío. En la teoría de conjuntos es necesario considerar los conjuntos sin elementos. Veamos el siguiente ejercicio:

EJERCICIO 3.3. Definir por extensión el conjunto

$$A = \{x \mid x > 0 \text{ y } x < 0\}.$$

Notemos que los elementos de este conjunto cumplen la propiedad de ser mayores que 0 y menores que 0. Como no existen números con esa propiedad, decimos que el conjunto A es un conjunto *vacío* y lo denotamos

$$A = \emptyset \qquad\qquad \text{o} \qquad\qquad A = \{\ \}.$$

1.2. Cardinalidad: Si un conjunto A tiene una cantidad finita de elementos, diremos que es un conjunto *finito* y llamaremos *cardinal de* A al número de elementos de A. El cardinal del conjunto vacío es 0, y si el conjunto tiene una cantidad no finita de elementos diremos que es un conjunto infinito y que su cardinal es infinito. En todos los casos, el cardinal del conjunto A se denota $|A|$ o también $\#A$.

EJEMPLO 3.2.

1. Si $A = \{3, 2, 1, 5, 4\}$, entonces $|A| = 5$.
2. Si $B = \{n \mid n \in \mathbb{N} \text{ y } n^2 = 2\}$, entonces $|B| = 0$.
3. Si $C = \{x \mid x \in \mathbb{R},\ x^2 = 1\}$, entonces $|C| = 2$.
4. $|\mathbb{Z}|$ es infinito.

2. Subconjuntos

Consideremos los conjuntos

$$A = \{1, 3, 5\}, \qquad \text{y} \qquad B = \{1, 2, 3, 4, 5\}.$$

Como podemos ver, los elementos de A: 1, 2 y 3, también son elementos de B. Decimos entonces que A es un *subconjunto* de B, o que A está *incluido en* B.

> Un conjunto A es un *subconjunto* del conjunto B si todo elemento de A es también elemento de B.
> Se denota $A \subseteq B$ y se dice que A está *incluido* o *contenido* en B.

En particular, todo conjunto está incluído en sí mismo: $A \subseteq A$.

Dos conjuntos A y B son *iguales* si los elementos de A son elementos de B, y viceversa. Es decir, si $A \subseteq B$ y también $B \subseteq A$.

> Dos conjuntos A y B son *distintos* si no son iguales.

Es posible que la definición de conjuntos iguales y distintos resulta un tanto obvia, sin embargo es necesaria y no siempre es tan sencillo detectar la igualdad de dos conjuntos.

EJEMPLO 3.3. Consideremos los conjuntos

$$A = \{1, 3\} \qquad \text{y} \qquad B = \{n \mid n \in \mathbb{N} \text{ y } n^2 - 4n = -3\}.$$

En principio A y B están definidos de manera diferente, por lo cual no podemos asegurar si son iguales o distintos.

Los elementos de A son 1 y 3. Notemos que 1 y 3 verifican la propiedad que define a B. En efecto

$$1^2 - 4 \cdot 1 = 1 - 4 = -3 \qquad \text{y} \qquad 3^2 - 4 \cdot 3 = 9 - 12 = -3.$$

Luego podemos afirmar que

$$A \subseteq B.$$

Además, los elementos de B son los números naturales que satisfacen la ecuación

$$n^2 - 4n + 3 = 0,$$

y esta ecuación tiene exactamente como raíces a 1 y 3. Por lo tanto también es cierto que todo elemento de B es un elemento de A, es decir

$$B \subseteq A.$$

Concluimos entonces que $A = B$.

Notemos que dos conjuntos pueden ser distintos pero tener uno o más elementos en común. Por ejemplo, $A = \{2, 4\}$ y $B = \{1, 4, 6\}$ son distintos pero el 4 es un elemento de ambos conjuntos.

Dos conjuntos se dicen *disjuntos* si no tienen ningún elemento en común.

EJEMPLO 3.4. Los conjuntos $C = \{2, 4, 6\}$ y $D = \{1, 3, 5, 7\}$ son disjuntos.

Si A es un subconjunto de B, pero distinto de B, se dice que A es un *subconjunto propio* de B.

EJEMPLO 3.5. Consideremos los conjuntos $A = \{x \mid x \text{ es un natural par y } x < 10\}$, y $B = \{2, 4, 6, 8, 10\}$.

En este caso, todo elemento de A es un elemento de B, y por lo tanto A es un subconjunto de B: $A \subseteq B$.

Además se cumple que 10 pertenece a B pero no pertenece a A, por lo cual A y B no son los mismos conjuntos. Decimos entonces que A es un subconjunto propio de B y lo escribimos $A \subsetneq B$.

EJEMPLO 3.6. El conjunto $\mathbb{N}$ de los números naturales es un subconjunto propio de $\mathbb{Z}$.

El conjunto vacío está incluido en todos los conjuntos. En efecto, si A es un conjunto cualquiera, entonces la proposición

$$\textit{Si } x \in \emptyset \textit{ entonces } x \in A$$

es verdadera, ya que el antecedente de la implicación ($x \in \emptyset$) es falso. [1]. Es decir que para todo conjunto A se verifica que $\emptyset \subseteq A$.

2.1. El conjunto de partes. El *conjunto de partes* de un conjunto A es el conjunto cuyos elementos son *todos* los subconjuntos de A. Lo denotamos $\mathcal{P}(A)$.

EJEMPLO 3.7. $A = \{1,\ 2,\ 3\}$ entonces

$$\mathcal{P}(A) = \{\emptyset,\ \{1\},\ \{2\},\ \{3\},\ \{1, 2\},\ \{1, 3\},\ \{2, 3\},\ \{1, 2, 3\}\}.$$

EJEMPLO 3.8. $B = \{a\}$ entonces $\mathcal{P}(B) = \{\emptyset,\ B\} = \{\emptyset,\ \{a\}\}$.

Si A es un conjunto finito, digamos de n elementos, entonces el cardinal del conjunto de partes es 2^n. Por ejemplo, para $A = \{1, 2, 3\}$, tenemos que $|A| = 3$ y $|\mathcal{P}(A)| = 8$. Para $B = \{a\}$, tenemos $|B| = 1$ y $|\mathcal{P}(B)| = 2$. También se cumple que $|\emptyset| = 0$, y $|\mathcal{P}(\emptyset)| = |\{\emptyset\}| = 1$.

[1]Recordar que si p es falso, entonces la implicación $p \Rightarrow q$ es verdadera.

2.2. Intervalos de números reales. Un *intervalo* de números reales es un subconjunto de $\mathbb{R}$ que tiene la siguiente propiedad: dados dos números a y b en el intervalo, todos los números comprendidos entre a y b también pertenecen al intervalo.

Gráficamente, un intervalo se identifica en la recta real con un segmento o una semirrecta, con o sin sus extremos, o con toda la recta real.

EJEMPLO 3.9. El conjunto

$$\{x \mid 2 \leq x \leq 8\}$$

es un intervalo, que se representa en la recta real como un segmento con extremos 2 y 8.

EJEMPLO 3.10. El conjunto

$$\{x \mid x > -5\}$$

es un intervalo, que se representa en la recta real como una semirrecta, con origen en -5, sin contar este extremo.

Para los intervalos se utiliza una notación específica, y se los clasifica además en intervalos cerrados, abiertos y semiabiertos.

El intervalo cerrado $[a, b]$, con a y b números reales, es el subconjunto de $\mathbb{R}$ definido como

$$[a, b] = \{x \mid a \leq x \leq b\}.$$

En particular, a y b son elementos de $[a, b]$.

El intervalo abierto (a, b), con a y b números reales, es el subconjunto de $\mathbb{R}$ definido como

$$(a, b) = \{x \mid a < x < b\}.$$

En este caso, a y b no son elementos de (a, b).

Los subconjuntos de la forma $\{x \mid x > a\}$ y $\{x \mid x < a\}$, también se llaman intervalos abiertos, y para éstos se utiliza la notación (a, ∞) y $(-\infty, a)$, respectivamente. Al símbolo ∞ se lo denomina *símbolo de infinito*. El conjunto $\mathbb{R}$ es también un intervalo abierto, que se denota $(-\infty, \infty)$.

Por último, los intervalos semiabiertos se denotan de la forma $[a, b)$, $(a, b]$, $[a, \infty)$ y $(-\infty, a]$, siendo a y b números reales. Se definen por comprensión de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} [a, b) &= \{x \mid a \leq x < b\} \\ (a, b] &= \{x \mid a < x \leq b\} \\ [a, \infty) &= \{x \mid x \geq a\} \\ (-\infty, a] &= \{x \mid x \leq a\} \end{aligned}$$

EJEMPLO 3.11. $[-2, 3) = \{x \mid -2 \leq x < 3\}$, y $(-2, 3] = \{x \mid -2 < x \leq 3\}$.

EJEMPLO 3.12. Si tomamos $a = b$ el intervalo cerrado $[a, b] = [a, a]$ tiene un sólo elemento: a. Por ejemplo para $a = b = 5$,

$$[5, 5] = \{x \mid 5 \leq x \leq 5\} = \{5\},$$

y este conjunto representa un punto en la recta real.

3. El conjunto Universal

No necesariamente los elementos de un conjunto son de la misma naturaleza, pero en general nos referiremos a conjuntos cuyos elementos tienen una propiedad en común.

EJEMPLO 3.13.

$$A = \{x \mid x \text{ es un natural par}\}, \qquad B = \{x \mid x \text{ es un natural mayor que 4}\}$$

$$\text{y } C = \{x \mid x \text{ es un natural menor que 23}\},$$

son conjuntos cuyos elementos tienen la propiedad común de ser números naturales.

EJEMPLO 3.14. Los elementos de los conjuntos X, Y y Z,

$$X = \{x \mid x \text{ es un entero negativo}\}, \qquad Y = \{x \mid x \text{ es entero y } |x| < 2\}$$

$$\text{y } W = \{x \mid x \text{ es entero y divide a 6}\},$$

tienen la propiedad de ser números enteros.

Resulta entonces conveniente considerar un conjunto $\mathcal{U}$ que contenga a todos los conjuntos que se estén considerando. A dicho conjunto se lo denomina *conjunto universal*.

En el Ejemplo 3.13 todos los conjuntos son subconjuntos de $\mathbb{N}$, y podemos considerar a $\mathbb{N}$ como conjunto universal:

$$\mathcal{U} = \mathbb{N},$$

y describir a A, B y C como

$$A = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ es par}\}, \qquad B = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ es mayor que 4}\}$$

$$\text{y } C = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ es menor que 23}\},$$

En el Ejemplo 3.14 podemos considerar a $\mathbb{Z}$ como conjunto universal, y describir X, Y y W como

$$X = \{x \in \mathbb{Z} \mid x < 0\}, \qquad Y = \{x \in \mathbb{Z} \mid |x| < 2\} \qquad W = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \text{ divide a 6}\},$$

4. Diagramas de Venn

Es frecuente utilizar ciertos diagramas, llamados diagramas de Venn, para representar a los conjuntos. Un conjunto se representa con una línea curva cerrada, y sus elementos con puntos en el interior. La Figura 1 ilustra el diagrama de Venn para el conjunto $A = \{a, b, c, d\}$.

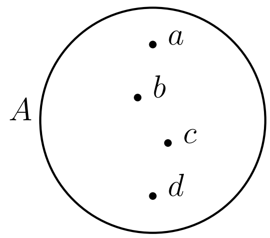


FIGURA 1. Representación del conjunto A mediante un diagrama de Venn.

En un diagrama de Venn el conjunto universal se representa con un rectángulo y el conjunto que nos interesa representar, digamos A, se denota con una curva cerrada dentro del rectángulo. La Figura 2 ilustra el caso general.

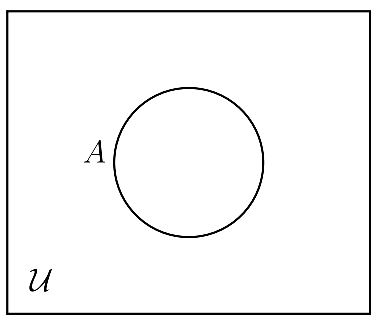


FIGURA 2. Representación del conjunto A mediante un diagrama de Venn.

Una de las propiedades más útiles de los diagramas de Venn es que dan una forma gráfica de visualizar las relaciones entre conjuntos, por ejemplo, en la Figura 3 representamos que todo elemento de B, es también elemento de A.

Cuando en un diagrama de Venn se desea enfatizar un conjunto es usual sombrear el interior de la curva cerrada que lo denota. Veremos ejemplos de esto al estudiar operaciones entre conjuntos.

5. Ejercicios

1. Definir por extensión cada uno de los siguientes conjuntos, en caso que sea posible.

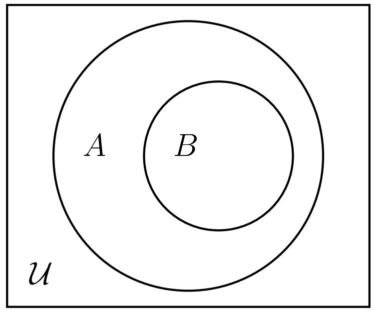


FIGURA 3. Los elementos de B también pertenecen a A.

a) $\{x \mid x$ es entero y $-3 < x < 4\}$
b) $\{x \mid x$ es entero positivo y x es múltiplo de $3\}$
c) $\{x \mid (3x-1)(x+2) = 0\}$
d) $\{x \mid x$ es un entero y $(3x-1)(x+2) = 0\}$
e) $\{x \mid 2x$ es entero positivo$\}$

2. Enumerar cinco elementos de cada uno de los siguientes conjuntos:
   a) $\{n \mid n$ es natural y n es divisible por 5$\}$
   b) $\{\frac{1}{n} \mid n$ es primo $\}$
   c) $\{2^n \mid n$ es natural$\}$
   d) $\{r \mid r$ es racional y $0 < r < 1\}$

3. Describir por extensión cada uno de los siguientes conjuntos o escribe $\emptyset$ si son vacíos:
   a) $\{n \in \mathbb{N} \mid n^2 = 9\}$
   b) $\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 = 9\}$
   c) $\{n \in \mathbb{Z} \mid 3 < |n| < 7\}$
   d) $\{x \in \mathbb{R} \mid x < 1$ y $x \geq 2\}$
   e) $\{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 = 3\}$
   f) $\{3n+1 \mid n \in \mathbb{N}$ y $n \leq 6\}$.

4. Sea $X = \{0, 1, 2\}$. Lista los elementos de cada uno de los siguientes conjuntos:
   a) $\{z \mid z = 2x$ y $x \in X\}$
   b) $\{z \mid z = x + y$ donde x e y son elementos de $X\}$
   c) $\{z \mid z \in X$ o $-z \in X\}$
   d) $\{z \mid x = z + y$ donde x e y son elementos de $X\}$
   e) $\{z \mid z$ es entero y $z^2 \in X\}$

5. Determinar la cardinalidad de cada uno de los siguientes conjuntos:
   a) $\{x \mid x$ es entero y $1/8 < x < 17/2\}$
   b) $\{x \mid x \in \mathbb{R}$ y $\sqrt{x}$ es entero $\}$
   c) $\{x \mid x \in \mathbb{R},\ x^2 = 1$ o $2x^2 = 1\}$
   d) $\{a, b, c, \{a, b, c\}\}$
   e) $\{a, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$

6. Describir por comprensión los siguientes conjuntos:
   a) El conjunto de todos los enteros que pueden ser escritos como suma de cuadrados de dos enteros.
   b) El conjunto de todos los enteros menores que 1000 que son cuadrados de un número entero.
   c) El conjunto de todos los números que son múltiplos enteros de 13.
   d) { 1, 3, 5, 7, 9 }

7. Definir por extensión los siguientes subconjuntos de $\mathbb{N}$:
   a) $\{x \in \mathbb{N} \mid\ x + 1$ es par y $x < \frac{19}{3}\}$
   b) $\{x \in \mathbb{N} \mid\ x + 1$ es impar y $x < \frac{22}{3}\}$
   c) $\{2x - 1 \in \mathbb{N} \mid x \in \mathbb{N}$ y $x < \frac{32}{5}\}$
   d) $\{3x - 1 \in \mathbb{N} \mid x \in \mathbb{N}$ y $5 \leq x \leq 8\}$
   e) $\{n \in \mathbb{N} \mid 2n + 3 < 15\}$

8. Para cada uno de los siguientes pares de conjuntos A y B definir por extensión A y B y decir si $A \subseteq B$, $B \subseteq A$ o ninguna de las anteriores.
   a) $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x$ es par y $x^2 \leq 149\}$
   $B = \{x \in \mathbb{N} \mid x + 1$ es impar y $x \leq 10\}$,
   b) $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x$ es impar y $x^2 \leq 130\}$
   $B = \{x \in \mathbb{N} \mid x + 1$ es par y $x \leq 12\}$,
   c) $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x$ es impar y $x^2 \geq 4$ y $x^2 \leq 141\}$
   $B = \{x \in \mathbb{N} \mid x - 1$ es par y $x \leq 9\}$,
   d) $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x$ es par y $x^2 \leq 150\}$
   $B = \{x \in \mathbb{N} \mid x - 1$ es impar y $x \leq 11\}$

9. En cada uno de los siguientes casos establecer si $x \in A$, $x \subseteq A$, ambas cosas o ninguna:
   a) $x = \{1\}$ $\qquad A = \{1,\ 2,\ 3\}$

b) $x = \{1\}$ $\quad A = \{\{1\},\ \{2\},\ \{3\}\}$
c) $x = \{1\}$ $\quad A = \{1,\ 2,\ \{1,\ 2\}\}$
d) $x = \{1, 2\}$ $\quad A = \{1,\ 2,\ \{1,\ 2\}\}$
e) $x = \{1\}$ $\quad A = \{\{1,\ 2,\ 3\}\}$
f) $x = 1$ $\quad A = \{\{1\},\ \{2\},\ \{3\}\}$
g) $x = \{1, 2\}$ $\quad A = \{1, 2\}$

10. Representar en la recta real cada uno de los siguientes intervalos, y describirlos por comprensión:

a) $[1, 5]$
b) $(-2, 4)$
c) $[-1, \infty)$
d) $(-\infty, 5]$
e) $(2, 7]$
f) $[-4, 0)$

11. Dado el conjunto $X = \{1, 2, 3, 4\}$, listar los elementos de cada uno de los siguientes conjuntos:
a) $\{A \mid A \subseteq X$ y A tiene 2 elementos $\}$
b) $\{A \mid A \subseteq X$ y A tiene 1 elemento$\}$
c) $\{A \mid A$ es subconjunto propio de $X\}$
d) $\{A \mid A \subseteq X$ y $1 \in A\}$

12. En cada uno de los siguientes casos, demostrar que $A \subseteq B$, es decir, que todo elemento de A es un elemento de B.
a) $A = \{x \mid 2x^2 + 5x = 3\}$
$B = \{x \mid 2x^2 + 17x + 27 = 18/x\}$
b) $A = \{x \mid x$ es entero positivo y x es par $\}$
$B = \{x \mid x$ es entero positivo y x^2 es par $\}$
c) $A = \{x \mid x$ es entero y x es un múltiplo de 6$\}$
$B = \{x \mid x$ es entero y x es múltiplo de 3$\}$

13. Describir por extensión el conjunto de partes de cada uno de los siguientes conjuntos y calcular su cardinal:
a) $A = \{1\}$,
b) $B = \{a,\ b\}$,
c) $S = \{1,\ 2,\ 3\}$,
d) $C = \{1,\ a,\ x,\ w\}$.

CAPíTULO 4

OPERACIONES ENTRE CONJUNTOS

Así como pueden definirse diversas operaciones entre números, también existen operaciones entre conjuntos. El resultado de una operación entre conjuntos es a su vez un conjunto.

Fijemos un conjunto universal $\mathcal{U}$ y consideremos todos los subconjuntos de $\mathcal{U}$. Entre estos conjuntos están definidas las operaciones de unión, intersección y diferencia. Además, para cada conjunto se define el complemento. El resultado de cada una de estas operaciones es un subconjunto de $\mathcal{U}$.

1. Unión de conjuntos

Sean A y B dos conjuntos.

La unión $A \cup B$ *de* A *con* B *es el conjunto cuyos elementos pertenecen a* A *o pertenecen a* B.

Por comprensión, la unión entre los conjuntos A y B se define así:

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$$

En particular, A y B son subconjuntos de $A \cup B$, pues todos los elementos de A y todos los elementos de B pertenecen a $A \cup B$.

En un diagrama de Venn representamos la unión de dos conjuntos sombreando el área que cubren ambos conjuntos (ver Figura 1).

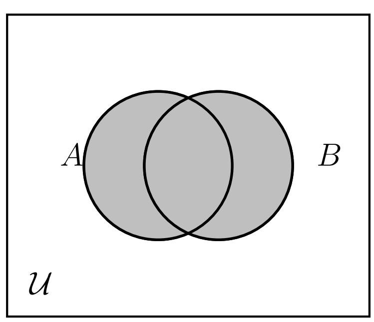


FIGURA 1. La unión de los conjuntos A y B.

EJEMPLO 4.1. Si $A = \{1, 3, 5\}$ y $B = \{2, 5\}$, entonces

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 5\}.$$

EJEMPLO 4.2. Si consideramos el intervalo abierto $(0, 1)$ y el conjunto de dos elementos $\{0, 1\}$, entonces $(0, 1) \cup \{0, 1\} = [0, 1]$

Si A es un subconjunto de B, esto es, $A \subseteq B$, entonces $A \cup B = B$.

EJEMPLO 4.3. Si $A = \{1, 4, 9\}$ y $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, entonces $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.

EJEMPLO 4.4. Si $A = \{x \mid x$ es múltiplo de 5$\}$ y $B = \{x \mid x$ es múltiplo de 10$\}$, entonces

$$A \cup B = \{x \mid x \text{ es múltiplo de 5 } \},$$

puesto que todo número múltiplo de 10 es también múltiplo de 5. En este caso, $B \subseteq A$.

La unión de un conjunto A con el conjunto vacío es el mismo conjunto A, puesto que $\emptyset$ no tiene elementos:

$$A \cup \emptyset = A.$$

La unión de un conjunto A con A es el mismo conjunto A:

$$A \cup A = A.$$

2. Intersección de conjuntos

Sean A y B dos conjuntos.

La *intersección* $A \cap B$ entre A y B es el conjunto cuyos elementos pertenecen a A y pertenecen a B.

Por comprensión, la intersección de los conjuntos A y B se define como

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}.$$

EJEMPLO 4.5. Sean $\mathcal{U} = \mathbb{N}$, $A = \{n \mid n \leq 11\}$, $P = \{n \mid n$ es primo$\}$y $B = \{n \mid n$ es impar y $n \leq 20\}$, entonces

$$A \cap B = \{1,\ 3,\ 5\ ,\ 7,\ 9,\ 11\}$$

$$A \cap P = \{2,\ 3\ ,5\ ,7\ ,\ 11\}$$

$$B \cap P = \{3,\ 5,\ 7,\ 11,\ 13,\ 17,\ 19\}$$

EJEMPLO 4.6. Si consideramos los intervalos $[0,5)$ y $(3,6]$, entonces

$$[0,5) \cup (3,6] = [0,6] \qquad \text{y} \qquad [0,5) \cap (3,6] = (3,5).$$

Si A es un subconjunto de B, esto es $A \subseteq B$, entonces

$$A \cap B = A.$$

En particular, $A \cap A = A$ y $A \cap \emptyset = \emptyset$.

EJEMPLO 4.7. La intersección del intervalo $(0,1)$ con el conjunto $\{0,1\}$ no tiene elementos, es decir, es el conjunto vacío:

$$(0,1) \cap \{0,1\} = \emptyset,$$

es decir que $(0,1)$ y $\{0,1\}$ son conjuntos disjuntos.

En general, dos conjuntos son *disjuntos* si y sólo si su intersección es vacía.

En un diagrama de Venn la intersección de dos conjuntos se representa por la región que está determinada por el interior de las curvas cerradas que determinan los conjuntos. Esta región se la destaca con un sombreado (ver Figura 2). Obsérvese que la intersección de dos conjuntos es vacía si y sólo si no hay elementos comunes entre ellos. Esto se grafica con dos curvas cerradas que no se cortan.

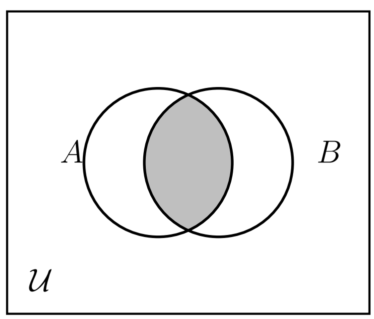


FIGURA 2. Intersección de A y B.

3. Complemento de un conjunto

Fijemos $\mathcal{U}$ un conjunto universal y A un subconjunto de $\mathcal{U}$.

El complemento *de A con respecto a $\mathcal{U}$ es el conjunto cuyos elementos son todos los elementos de $\mathcal{U}$ que no pertenecen a A y se denota por A^c.*

En símbolos,

$$A^c = \{x \in \mathcal{U} \mid x \notin A\} = \{x \in \mathcal{U} \mid \neg(x \in A)\}.$$

En un diagrama de Venn el complemento de A es la región exterior de la curva cerrada que determina A y lo destacamos con un subrayado o sombreado.

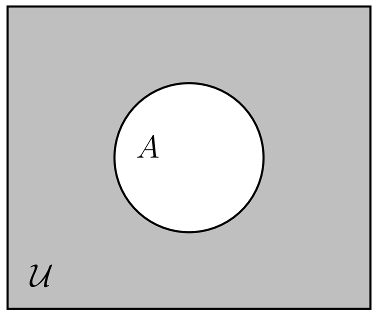


FIGURA 3. Complemento de A.

EJEMPLO 4.8. Si $\mathcal{U} = \mathbb{N}$ y $\mathbb{P}$ es el conjunto de los números pares, entonces $\mathbb{P}^c$ es el conjunto de los números naturales impares.

EJEMPLO 4.9. Si $\mathcal{U}$ es un plano, y P es un punto en el plano, entonces P^c es el plano sin el punto P.

EJEMPLO 4.10. Sea $\mathcal{U} = \mathbb{Z}$. Entonces $\mathbb{Z}^c = \emptyset$.

4. Diferencia de conjuntos

Sean A y B dos conjuntos.

La diferencia *o* complemento relativo $A - B$ *entre* A *y* B
es el conjunto de todos los elementos que pertenecen a A *y no pertenecen a* B.

$$A - B = \{x \mid x \in A \text{ y } x \notin B\}$$

Observemos que $A^c = \mathcal{U} - A$. En un diagrama de Venn representamos la diferencia entre los conjuntos A y B, destacando la región que es interior a A y exterior a B (ver Figura 4).

EJEMPLO 4.11. $\mathbb{Z} - \mathbb{N} = \{n \mid n \in \mathbb{Z} \text{ y } n \leq 0\}$.

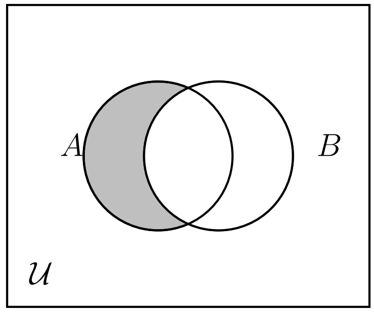


FIGURA 4. Diferencia entre el conjunto A y el conjunto B.

EJEMPLO 4.12. $\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\} - \{2,\ 4,\ 6,\ 8\} = \{1,\ 3,\ 5\}$

EJEMPLO 4.13. $[-1,1] - \{0\} = [-1,0) \cup (0,1]$

4.1. Propiedades de las operaciones entre conjuntos. Resumimos a continuación las propiedades que cumplen las operaciones de unión, intersección y complementación:

Propiedad conmutativa

$$A \cup B = B \cup A$$

$$A \cap B = B \cap A.$$

Propiedad asociativa

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$$

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$

Propiedad distributiva

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

Leyes de Morgan

$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c \qquad\qquad (A \cap B)^c = A^c \cup B^c.$$

Los siguientes ejemplos ilustran estas propiedades.

EJEMPLO 4.14. Si $A = \{1,2,3\}$, $B = \{2,3,4\}$ y $C = \{1,3,5\}$, entonces

$$\begin{aligned}
(A \cap B) \cap C &= \{2,3\} \cap \{1,3,5\} = \{3\} \\
A \cap (B \cap C) &= \{1,2,3\} \cap \{3\} = \{3\}. \\
(A \cup B) \cup C &= \{1,2,3,4\} \cup \{1,3,5\} = \{1,2,3,4,5\} \\
A \cup (B \cup C) &= \{1,2,3\} \cup \{1,2,3,4,5\} = \{1,2,3,4,5\}.
\end{aligned}$$

EJEMPLO 4.15. Sea $\mathcal{U} = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$, y sean $A = \{0,2,4,6,8\}$, $B = \{0,3,6,9\}$ y $C = \{1,3,5,7,9\}$. Entonces,

$$\begin{aligned}
(A\cap B)\cup(A\cap C) &= \{0,6\}\cup\emptyset = \{0,6\},\\
A\cap(B\cup C) &= \{0,2,4,6,8\}\cap\{0,1,3,5,6,7,9\} = \{0,6\},\\
(A\cup B)\cap(A\cup C) &= \{0,2,3,4,6,8,9\}\cap\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\} = \{0,2,3,4,6,8,9\},\\
A\cup(B\cap C) &= \{0,2,4,6,8\}\cup\{3,9\} = \{0,2,3,4,6,8,9\}.
\end{aligned}$$

EJEMPLO 4.16. Si A, B y $\mathcal{U}$ son como en el Ejemplo 4.15, entonces

$$\begin{aligned}
(A\cup B)^c &= \{0,2,3,4,6,8,9\}^c = \{1,5,7\} \qquad \text{y}\\
A^c\cap B^c &= \{1,3,5,7,9\}\cap\{1,2,4,5,7,8\} = \{1,5,7\}.\\
(A\cap B)^c &= \{0,6\}^c = \{1,2,3,4,5,7,8,9\} \qquad \text{y}\\
A^c\cup B^c &= \{1,3,5,7,9\}\cup\{1,2,4,5,7,8\} = \{1,2,3,4,5,6,8,9\}
\end{aligned}$$

Destacamos que en estos ejemplos sólo hemos hecho una comprobación en un caso particular, y no es suficiente para demostrar que la misma se cumple para cualquier par de conjuntos A y B.

5. Ejercicios

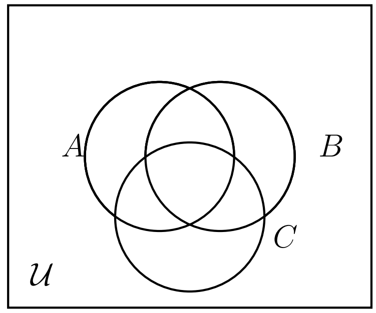
1. Dados $\mathcal{U} = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10\}$ el conjunto universal y $A = \{1,\ 4,\ 7,\ 10\}$, $B = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$, $C = \{2,\ 4, 6,\ 8\}$, definir por extensión los siguientes conjuntos:

    a) $A\cup B$
    b) $A - B$
    c) A^c
    d) $\mathcal{U}^c$
    e) $B\cap\mathcal{U}$
    f) $B^c\cap(C-A)$
    g) $(A\cap B)^c\cup C$
    h) $B\cap C$
    i) $A\cup\emptyset$
    j) $A\cap(B\cup C)$
    k) $(A\cap B)\cup C$
    l) $A\cap B) - C$
    m) $(A\cup B)-(C-B)$

2. Sea $\mathcal{U} = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ldots,12\}$, $A = \{1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9,\ 11\}$, $B = \{2,\ 3,\ 5,\ 7,\ 11\}$, $C = \{2,\ 3,\ 6,\ 12\}$ y $D = \{2,\ 4,\ 8\}$. Definir por extensión los conjuntos

    a) $A\cup B$
    b) $A\cap C$
    c) $(A\cup B)\cap C^c$
    d) $A-B$
    e) $C-D$
    f) $(B-D)\cup(D-B)$

3. En diagramas de Venn como el de la figura, sombrear los conjuntos siguientes:



a) $A \cup B$
b) $A \cap B$
c) $(A \cup C) \cap B$
d) $A \cap B \cap C$
e) $(A \cup C)^c$
f) $(A - B) \cap C$
g) $(A \cap C) \cup C^c$
h) $(A \cap B \cap C)^c$
i) $(A - B) - C$
j) $(A \cap B) \cup (A \cap C)$

4. De un total de 60 alumnos de un colegio:
   - 15 estudian francés solamente,
   - 11 estudian francés e inglés;
   - 12 estudian alemán solamente;
   - 8 estudian francés y alemán;
   - 10 estudian inglés solamente;
   - 5 estudian inglés y alemán; y
   - 3 los tres idiomas.

   Determina:
   a) ¿Cuántos no estudian ningún idioma?
   b) ¿Cuántos estudian alemán?
   c) ¿Cuántos estudian alemán e inglés solamente?
   d) ¿Cuántos estudian francés?

5. Describir por comprensión el conjunto que resulta de las siguientes operaciones y graficarlo en la recta real. Indicar si el conjunto obtenido es un intervalo, y en tal caso representarlo en la notación de intervalos.
   a) $[-1, \infty] \cap (-3, 2)$.
   b) $(-\infty, 2) \cup [0, \infty)$
   c) $(-3, 1] \cap (2, \infty)$
   d) $(-2, 3] \cup (-\infty, 1)$

e) $[-3,0)\cap(-2,3)$

6. Utilizando las propiedades de asociatividad, conmutatividad y distributividad de la unión y la intersección, y las Leyes de Morgan, comprobar las siguientes identidades. Ilustrar cada caso con un diagrama de Venn. Recordar que $A-B=A\cap B^c$.

   a) $(A^c\cap B)^c=A\cup B^c$

   b) $A\cap(B\cup A)^c=\emptyset$

   c) $(A-B)-C=(A-C)-(B-C)$

   d) $(A\cap B)\cup(A\cap B^c)=A$

   e) $(A\cup B)\cap(A\cup B^c)=A$

7. Simplificar la expresión de modo que A, B y C aparezcan a lo sumo una vez:

   a) $((A^c\cup C^c)\cap B)^c\cup(A\cup(C\cap B)^c\cup C)^c$

   b) $(A\cup(B\cup C)^c)^c\cap(A^c\cup(B\cap C)^c)^c$

   Solución: a) $(A\cap C)\cup B^c$, b) $\emptyset$

CAPíTULO 5

CUANTIFICADORES

1. Funciones proposicionales

Consideremos las siguientes proposiciones:

$$q \ : \ \text{El perro es un animal.}$$

$$r \ : \ \text{La rosa es un animal.}$$

$$s \ : \ \text{La vaca es un animal.}$$

Las tres proposiciones tienen en común el *predicado lingüístico* “es un animal”, y tienen diferente el *sujeto*. La frase “es un animal” está dando una propiedad del sujeto. Si escribimos:

$$x \text{ es un animal}$$

obtenemos una oración que <u>no</u> es una proposición dado que su valor de verdad dependerá del valor de x. Así, si a x le damos el valor $x =$ “El perro” obtenemos la proposición

El perro es un animal

que es verdadera, mientras que si a x le damos el valor $x =$ “La rosa” obtenemos la proposición

La rosa es un animal

que es falsa.

En este ejemplo, la frase

$$x \text{ es un animal}$$

es una es una *función proposicional*, y la variable x toma valores en un conjunto llamado *universo del discurso* . Entonces, las funciones proposicionales *no* son proposiciones, pero para cada valor que le demos a x obtenemos una proposición. A las funciones proposicionales las denotamos con una letra mayúscula seguida de la variable entre paréntesis. Por ejemplo:

$$P(x) : x \text{ es un animal.}$$

También podemos tener funciones proposicionales con más de una variable, por ejemplo

$$x \text{ es mayor que } y.$$

El valor de verdad en estos casos dependerá de los valores que tomen las variables x e y. Así, si $x = 0$ e $y = 3$, la proposición *0 es mayor que 3* es falsa, mientras que si $x = 4$ e $y = \pi$, la proposición *4 es mayor que* π es verdadera.

2. Cuantificadores

Los *cuantificadores* nos permiten construir proposiciones a partir de funciones proposicionales ya sea particularizando o generalizando. Ejemplifiquemos esto. Si consideramos la función proposicional

$$P(x): x \text{ es mayor que } 0,$$

podemos particularizar esto diciendo:

Existe un número real que es mayor que 0,

o generalizarlo diciendo

Todos los números reales son mayores que 0.

Notemos que tanto en la particularización como en la generalización se especifica un conjunto en donde toma valores la variable, en este ejemplo el conjunto son los números reales.

Existe una notación específica para la particularización y la generalización:

$$\exists x \in \mathbb{R} \;\mid\; x > 0,$$

que se lee *existe un* $x \in \mathbb{R}$ *tal que* x *es mayor que 0*; mientras que

$$\forall x \in \mathbb{R},\; x > 0$$

se lee *para todo* $x \in \mathbb{R}$ *se cumple que* x *es mayor que* 0.

El símbolo $\forall$ se llama *cuantificador universal*
y el símbolo $\exists$ es el *cuantificador existencial*

Como ya lo hemos afirmado, un cuantificador transforma una función proposicional en una proposición, a la cual se le asigna un valor de verdad.

EJEMPLO 5.1. Consideremos la función proposicional $P(x)$: *4x es par*. Entonces la proposición

$$\forall n \in \mathbb{N},\; P(n)$$

es decir, "para todo n natural se cumple que $4\,n$ es par", es equivalente a enunciar

$$4 \cdot 1 \text{ es par y } 4 \cdot 2 \text{ es par y } 4 \cdot 3 \text{ es par y } 4 \cdot 4 \text{ es par y ....}$$

Por lo tanto esta proposición es verdadera ya que cada una de las proposiciones $P(n)$ es verdadera.

EJEMPLO 5.2. Dada la función proposicional

$$P(x): x \text{ es un número mayor que } 1,$$

entonces la proposición

$$\forall x \in \mathbb{N},\ P(x)$$

nos está enunciando que cualquiera sea el número natural x, se cumple que x es mayor que 1. Por lo tanto la proposición es falsa ya que 1 es un número natural que no es mayor que 1, es decir, la proposición $P(1)$ es falsa. No importa que para todos los demás valores de x la proposición $P(x)$ sea verdadera.

Si aplicamos el cuantificador existencial y enunciamos

$$\exists x \in \mathbb{N} \ \mid \ P(x),$$

es equivalente a enunciar

1 *es mayor que 1* o 2 *es mayor que 1* o 3 *es mayor que 1* o 4 *es mayor que 1* o ...

y así siguiendo. Esta proposición es verdadera, pues al menos existe un número natural, por ejemplo el 3, para el cual se cumple $P(3)$ verdadero, es decir, 3 es mayor que 1.

Si $P(x)$ es una función proposicional, entonces la proposición
$$\forall x \in A,\ P(x)$$
es verdadera si y sólo si $P(a)$ es verdadera para *todos* los $a \in A$.

Si $P(x)$ es una función proposicional, entonces la proposición
$$\exists x \in A \ \mid \ P(x)$$
es verdadera si y sólo si $P(a)$ es verdadera para *algún* $a \in A$.

3. Negación de cuantificadores

La negación de una proposición cuantificada es también una proposición, que a su vez puede describirse con un cuantificador. La proposición $p:\ (\forall x)P(x)$ es verdadera si y sólo si $P(x)$ es verdadero para todo x. Su negación es una proposición que es falsa siempre que p sea verdadera, y que es verdadera siempre que p sea falsa.

Luego $\neg\, p$ es la proposición que es verdadera si $P(x)$ es falsa para algún valor de x, y que es falsa si $P(x)$ es verdadera para todos los valores de x. Dicho de otro modo, es verdadera si $\neg P(x)$ es verdadera para algún valor de x, es falsa si $\neg P(x)$ es falsa para todos los valores de x. Luego

$$\neg\ (\forall x,\ P(x)) \equiv \exists x \mid \neg\, P(x).$$

Por ejemplo, la negación de la proposición *Todos los números son positivos* es: *existe un número que no es positivo*.

Análogamente, la negación de la proposición $\exists x \mid P(x)$ será verdadera si y sólo si $P(x)$ es falsa para todo x, y falsa si $P(x)$ es verdadera para algún x. Equivalentemente, $\neg(\exists x \mid P(x))$ es verdadera si $\neg P(x)$ es verdadera para todo x, y es falsa si $\neg P(x)$ es falsa para algún x. Luego

$$\neg(\exists x \mid P(x)) \equiv \forall x,\ \neg P(x).$$

Por ejemplo, la negación de la proposición *Existe un número que es primo* es la proposición: *Todos los números cumplen que no son primos*, o lo que coloquialmente es equivalente: *Ningún número es primo*.

4. Ejercicios

1. Para cada una de las siguientes proposiciones analizar el valor de verdad de las mismas y escribir, en forma simbólica, su negación.
   a) $\exists x \in \mathbb{R},\ 3 \cdot x - 2 = -4x + 1$
   b) $\exists x \in \mathbb{Z},\ 3 \cdot x - 2 = -4x + 1$
   c) $\forall x \in \mathbb{R},\ 3 \cdot x - 2 \neq -4x + 1.$
   d) $\forall x \in \mathbb{Z},\ 3 \cdot x - 2 \neq -4x + 1.$
   e) $\exists x \in \mathbb{R} \mid x^2 + x + 1 = 0$
   f) $\forall x \in \mathbb{R},\ (x-1) \cdot (x+1) = x^2 - 1$
   g) $\exists x \in \mathbb{R} \mid x^2 + 1 \geq 0$
   h) $\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 + 3x + 2 = 0$
   i) $\exists x \in \mathbb{R} \mid x = -x$
   j) $\exists x \in \mathbb{R} \mid x^3 + 6x^2 + 11x + 6 = (x+3) \cdot (x+1)$
   k) $\forall x \in \mathbb{R},\ x + x = 0$
   l) $\forall x \in \mathbb{R},\ (\exists y \in \mathbb{R} \mid x^2 + y^2 = (x+y)^2)$
   m) $\forall x \in \mathbb{R},\ (\forall y \in \mathbb{R},\ x + y = y + x)$
   n) $\exists x \in \mathbb{R} \mid (\forall y \in \mathbb{R},\ x + y = 0)$
   ñ) $\exists x \in \mathbb{R} \mid x^2 + x = 2$
   o) $\exists x \in \mathbb{R},\ \frac{9}{8} < x < \frac{5}{4}$
   p) $\forall x \in \mathbb{R},\ x \leq \frac{3}{2}$ o $x \geq \frac{8}{5}$

CAPíTULO 6

PRODUCTO CARTESIANO

1. Pares ordenados y producto cartesiano

Dos elementos dados en cierto orden forman un par ordenado. Por ejemplo, un punto geográfico está determinado por las coordenadas latitud y longitud, una fecha en el año está dada por dos números: el mes y el día. En general, si x e y son dos objetos, se puede formar el par ordenado de x e y , y este par se denota como (x, y). De esta manera, la fecha (10,03) significa "3 de octubre", mientras que (03,10) indica el "10 de marzo". Como vemos, el orden en que se dan los elementos es relevante.

Los elementos que forman un par ordenado pueden o no pertencer a un mismo conjunto. Por ejemplo, en el caso de las fechas, el primer elemento del par es un número natural entre 1 y 12, mientras que el segundo es un natural entre 1 y 31.

Pero también podemos formar los pares ordenados de la forma

(apellido, nro. de documento),

donde el primer elemento del par es un apellido tomado de un conjunto de personas, y el segundo elemento del par es un número. En este caso, los elementos del par son de distinta naturaleza.

Sean A y B dos conjuntos no vacíos. El conjunto de todos los pares ordenados tales que el primer miembro del par ordenado es un elemento de A y el segundo miembro es un elemento de B , se llama el producto cartesiano *de A por B y se escribe $A \times B$.*

En símbolos, $A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \quad \text{y} \quad b \in B\}$.

EJEMPLO 6.1. Si $A = \{2, 4, 6\}$ y $B = \{4, 5, 6\}$, el producto cartesiano de A por B es

$$A \times B = \{(2, 4),\ (2, 5),\ (2, 6),\ (4, 4),\ (4, 5),\ (4, 6),\ (6, 4),\ (6, 5),\ (6, 6)\}$$

EJEMPLO 6.2. Si $A = \{\alpha,\ \beta\}$ y $B = \{1,\ 2,\ 3\}$, entonces:

$$A \times B = \{(\alpha, 1),\ (\alpha, 2),\ (\alpha, 3),\ (\beta, 1),\ (\beta, 2),\ (\beta, 3)\}$$

$$B \times A = \{(1, \alpha),\ (1, \beta),\ (2, \alpha),\ (2, \beta),\ (3, \alpha),\ (3, \beta)\}$$

$$A \times A = \{(\alpha, \alpha),\ (\alpha, \beta),\ (\beta, \alpha), (\beta, \beta)\}$$

$$B \times B = \{(1, 1),\ (1, 2),\ (1, 3),\ (2, 1),\ (2, 2),\ (2, 3),\ (3, 1),\ (3, 2),\ (3, 3)\}.$$

Si los conjuntos tienen una cantidad finita de elementos puede resultar útil el uso de una tabla de doble entrada, como la siguiente:

$A \times B$	1	2	3
α	$(\alpha, 1)$	$(\alpha, 2)$	$(\alpha, 3)$
β	$(\beta, 1)$	$(\beta, 2)$	$(\beta, 3)$

$B \times A$	α	β
1	$(1, \alpha)$	$(1, \beta)$
2	$(2, \alpha)$	$(2, \beta)$
3	$(3, \alpha)$	$(3, \beta)$

Así, en la tabla del producto cartesiano $X \times Y$ de dos conjuntos finitos X e Y, tenemos que la fila correspondiente al elemento x de X contiene todos los pares ordenados de $X \times Y$ cuyo primera coordenada es x, mientras que la columna correspondiente al elemento y de Y contiene todos los pares ordenados de $X \times Y$ cuya segunda coordenada es y.

Si A y B son conjuntos finitos, entonces el cardinal de $A \times B$ es el número de elementos de A por el número de elementos de B

2. Representación en ejes cartesianos

Si los conjuntos A y B son subconjuntos de los números reales, entonces resulta útil la representación gráfica del producto cartesiano en *ejes cartesianos*. Los ejes cartesianos están formados por dos rectas perpendiculares, donde una de ellas representa el *eje de las abscisas* y el otro el *eje de las ordenadas*. En ambas rectas se representan los números reales y el punto de intersección de ambas corresponde *usualmente* al origen de coordenadas, en el sentido que corresponde al 0 en ambos ejes. Al lado de cada eje se deja indicada una letra que sugiere qué coordenada se representa en dicho eje. Las “flechas” dibujadas indican el sentido creciente en cada una de las rectas (Figura 1).

Dado un punto P en el plano, trazamos las rectas perpendiculares a cada uno de estos ejes por el punto P. Los puntos de intersección de cada una de estas rectas con los ejes de las abscisas y de las ordenadas se denominan *abscisa* y *ordenada* del punto P, respectivamente, o también primera y segunda coordenada. De este modo, cada punto P del plano está en correspondencia con un par ordenado (x, y), donde x es la abscisa de P e y es la ordenada. A su vez, a cada par ordenado (a, b) le corresponde un punto del plano cuya abscisa es a y cuya ordenada es b.

En la Figura 2 podemos ver la representación gráfica en ejes cartesianos de (una parte de) los siguientes conjuntos:

$$C = \{(m, n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid m = n^2\} \qquad L = \{(x, y) \mid (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \text{ e } y = x + 1\}$$

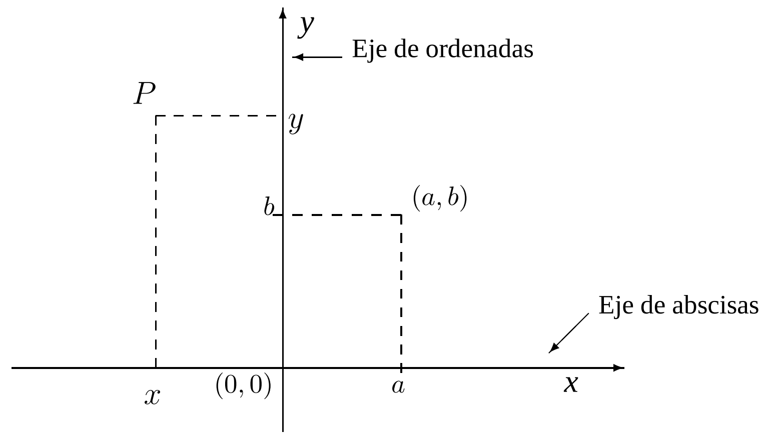


FIGURA 1. Representación de puntos en ejes cartesianos

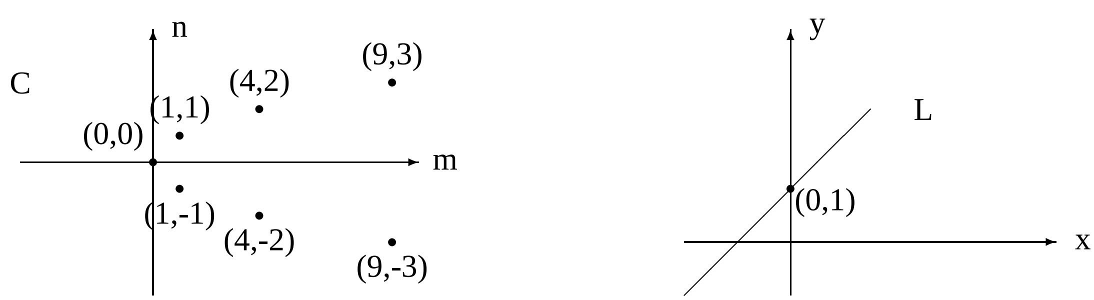


FIGURA 2. Representación gráfica de los conjuntos C y L

Notemos que C es un conjunto infinito de puntos *separados*, pues sus coordenadas son números enteros, mientras que L es una recta continua de puntos.

También podemos graficar regiones del plano, como muestra la Figura 3, siendo

$$R = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \ \mid -1 \leq x \leq 2, \ -1 \leq y \leq 1\}.$$

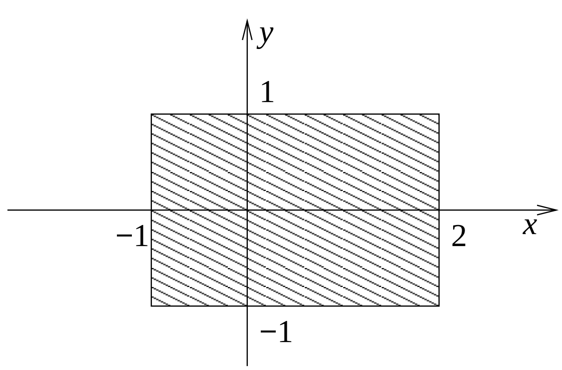


FIGURA 3. Representación gráfica del conjunto R.

Pueden ser también regiones no acotadas. Por ejemplo, la banda infinita

$$A = \{(x, y) \mid 0 \leq y < 3\},$$

representada en la Figura 4.

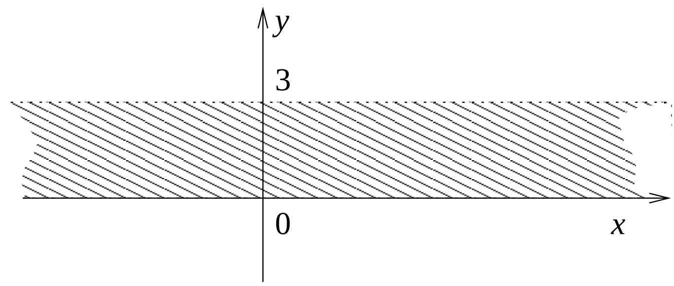


FIGURA 4. Representación gráfica del conjunto A.

La línea punteada en el borde superior de la banda indica que los puntos con segunda coordenada igual a 3 no pertenecen a A, mientras que la línea llena inferior indica que los puntos con segunda coordenada 0 sí pertenecen.

Siempre que representemos puntos o conjuntos de puntos en un diagrama cartesiano, debemos elegir una escala apropiada en cada uno de los ejes. La escala elegida dependerá del conjunto a representar. Por ejemplo, si queremos representar el conjunto

$$A = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 0{,}01,\ 0 \leq y \leq 0{,}005\}$$

será conveniente tener escalas en cada uno de los ejes en la que $0{,}01$ y $0{,}005$ puedan ser representados a una cierta distancia del 0. De lo contrario nuestra gráfica se parecerá más a un punto que a un rectángulo.

O si por ejemplo, queremos representar el conjunto

$$B = \{(x, y) \mid -10^6 < x < 10^6,\ y > 10^3\},$$

será conveniente usar escalas distintas en el eje de las abscisas que en el de las ordenadas, ya que 10^6 es mil veces el número 10^3. (Figura 5).

También puede ocurrir que los datos que se quieren representar tienen una o ambas coordenadas muy alejadas del 0. En este caso se suele convenir que el punto de intersección de ambos ejes coordenados no sea el $(0, 0)$ sino otro punto. Este punto nuevamente dependerá del problema en cuestión.

Por ejemplo, si queremos representar

$$D = \{(x, y) \mid -1010 < x < -1000,\ y \leq 5\},$$

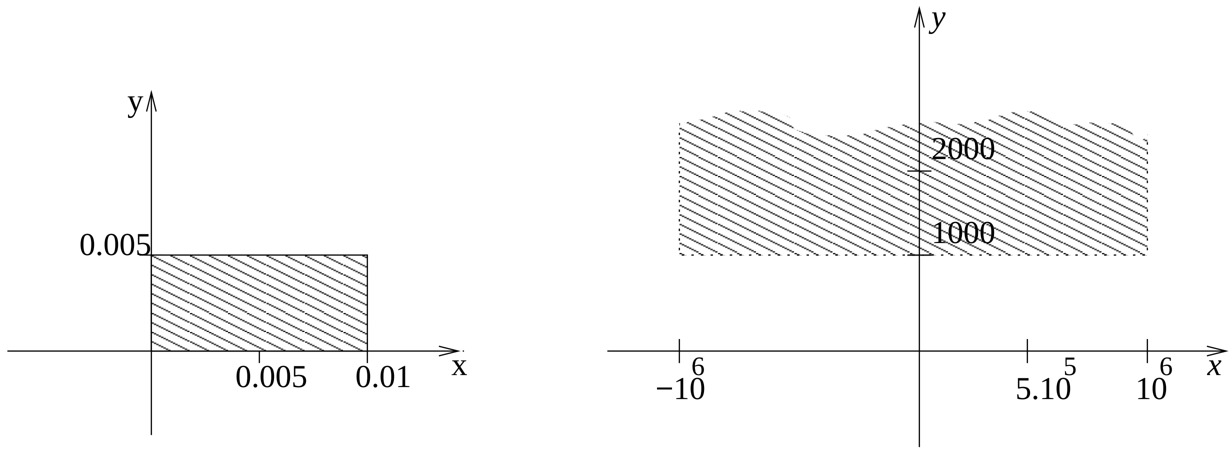


FIGURA 5. Uso de escalas apropiadas

será conveniente desplazar el origen en el eje de las x como muestra la Figura 6.

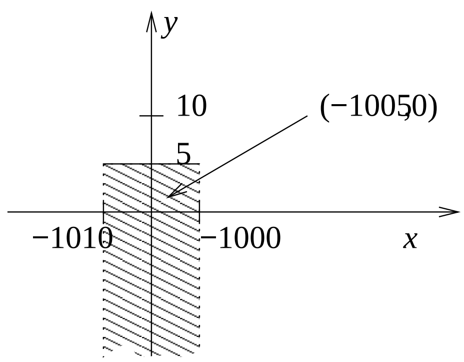


FIGURA 6. Desplazamiento del origen

En este caso hemos elegido las coordenadas de modo que el punto de intersección de los ejes corresponda al punto -1005 en el eje de las abscisas y a 0 en el eje de las coordenadas.

3. Ejercicios

1. Sea $A = \{a,\ b,\ c\}$ y $B = \{a,\ b,\ d\}$.
   a) Listar los pares ordenados de $A \times A$.
   b) Listar los pares ordenados de $A \times B$.
   c) Listar los elementos del conjunto $\{(x, y) \mid (x, y) \in A \times B \text{ y } x = y\}$

2. Sean los conjuntos $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ y $B = \{2, 5, 10\}$ Describir por extensión los siguientes conjuntos:
   (i) $\{(a, b) \in A \times B \,|\, a + b < 11\}$.

(ii) $\{(a,b) \in A \times B \,|\, a+b \geq 11$ y $a+b$ es par $\}$.

3. Sea $S = \{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4\}$ y $T = \{0,\ 2,\ 4\}$.
   a) ¿ Cuántos pares ordenados hay en $S \times T$? ¿ En $T \times S$?
   b) Listar los elementos de
      1) $\{(m,n) \mid (m,n) \in S \times T$ y $m < n\}$
      2) $\{(m,n) \mid (m,n) \in T \times S$ y $m < n\}$
      3) $\{(m,n) \mid (m,n) \in S \times T$ y $m+n \geq 3\}$
      4) $\{(m,n) \mid (m,n) \in S \times T$ y $m.n \geq 4\}$
      5) $\{(m,n) \mid (m,n) \in S \times T$ y $m+n = 10\}$
   c) Para cada uno de los items anteriores, representar el conjunto en un diagrama de ejes cartesianos.

4. Definir por comprensión los subconjuntos de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ representados en la Figura 7:

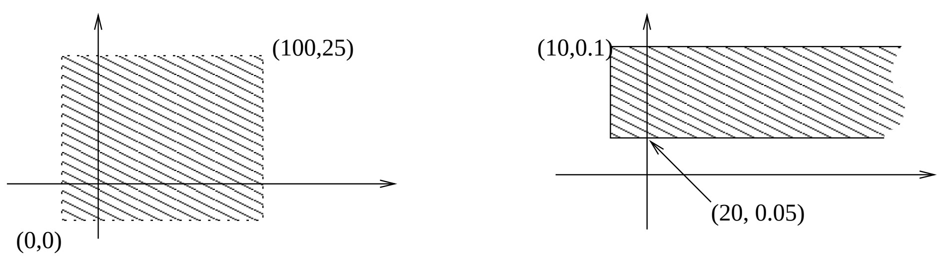


FIGURA 7

5. Graficar en ejes cartesianos las siguientes regiones o conjuntos:

   a) $\{(x,y) \mid 0 \leq x \leq 2,\ -2 < y < 3\}$
   b) $\{(x,y) \mid x = 2\}$
   c) $\{(x,y) \mid x \leq y\}$
   d) $\{(x,y) \mid x > 2\}$
   e) $\{(x,y) \mid y < 3\}$
   f) $\{(x,y) \mid 0 < x < y\}$

   g) El conjunto de puntos interiores del triángulo con vértices en $(-1,-1)$, $(-1,3)$, $(2,0)$

6. Describir por comprensión los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$:
   a) El eje de las ordenadas.
   b) El eje de las abcisas.
   c) El segundo cuadrante.
   d) El conjunto de puntos interiores al rectángulo con vértices en $(-1,-1)$, $(-1,3)$, $(2,-1)$ y $(2,3)$.
   e) El borde del rectángulo dado en el ítem 6*d*.

7. Elegir escalas adecuadas en cada uno de los ejes como así también el punto de intersección de los mismos para representar los siguientes conjuntos:
   a) $\{(x,y) \mid -5000 \leq x \leq 500,\ y \leq 1\}$
   b) $\{(x,10^4) \mid -200 < x < 500\}$
   c) $\{(10^4, 10^4+1),\ (10^4, 10^4+2),\ (10^4+1, 10^4-3),\ (10^4-2, 10^4-6)\}$
   d) $\{(0{,}5,\ 0{,}6),\ (0{,}5,\ 0{,}7), (0{,}2,\ -0{,}3),\ (0{,}05,\ -0{,}125)\}$

8. Considerar los conjuntos:
   $A = \{(x,y) \mid (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ 2x - y = 4\}$,
   $B = \{(x,y) \mid x + 3y = 9\}$ y
   $C = \{(x,y) \mid (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ y = 2x\}$.
   Describir y graficar los siguientes conjuntos:
   (a) $A \cap B$
   (b) $A \cap C$
   (c) $B \cap C$
   (d) $A^c \cup C^c$