**Unidad 5: Espacios vectoriales**

**Definición de Espacio Vectorial**

Un espacio vectorial es una terna ordenada (V(IR), +, **·**), donde V es un conjunto no vacío, + es la suma definida en V, y **·** es el producto o multiplicación externa de un número real por un elemento de V:

+ : V x V → V **.** : IR x V → V

( u, v ) → u + v ( k, u ) → k**.**u

Se dice que V con dichas operaciones es un IR - espacio vectorial si se verifican los siguientes axiomas:

A1 – Asociativa: Cualesquiera sean u, v y w de V : (u + v) + w = u + (v + w)

A2 – Existencia de elemento neutro: Existe  en V, para todo u de V: u +  =  + u = u

A3 – Existencia de elemento opuesto: Para todo u de V, existe –u de V: u + (-u) = -u + u = 

A4 – Conmutativa: Cualesquiera sean u y v de V: u + v = v + u

A5 – Para todo k de IR, cualesquiera sean u y v de V: k. ( u + v ) = k.u + k.v

A6 – Cualesquiera sean k y k’ de IR, para todo u de V: (k + k’) . u = k.u + k’.u

A7 - Cualesquiera sean k y k’ de IR, para todo u de V: (k . k’) . u = k. ( k’. u )

A8 – Para todo u de V: 1 . u = u

A los elementos del espacio vectorial V (IR) se los llama *vectores*, y a los elementos de IR se los llama *escalares*.

Nota:

En este curso solo se estudian los espacios vectoriales sobre IR, aunque existen espacios vectoriales definidos sobre otros conjuntos que tienen estructura algebraica de cuerpos.

Ejemplos

* El conjunto V o,2 de las cuplas puntuales del plano ordinario, que tienen origen en un punto o del plano, es un IR- espacio vectorial, con la suma usual y el producto de un escalar por un vector fijo.
* El conjunto VL2 de los vectores libres del plano ordinario es un IR- espacio vectorial, con la suma usual y el producto de un escalar por un vector libre.
* El conjunto IR es un IR- espacio vectorial, con la suma y multiplicación usual en IR.
* El conjunto IR2 es un IR- espacio vectorial, con la suma y multiplicación usual en IR2.
* El conjunto IR3 es un IR- espacio vectorial, con la suma y multiplicación usual en IR3.
* El conjunto IRn es un IR- espacio vectorial, con la suma y multiplicación usual en IRn.
* El conjunto Mmxn de todas las matrices de orden mxn es un IR- espacio vectorial, con la suma usual entre matrices y el producto de un escalar por una matriz.
* *Sugerencia: realizar algún ejemplo de los Ejercicios 1, 2, 3 y 4.*

Teorema

***Sea V un K-espacio vectorial, u un vector de V y k un escalar, entonces:***

1. ***0 . u = ***
2. ***k .  = ***
3. ***(-1) . u = -u***
4. ***Si k.u = , entonces k = 0 o u =***

Demostración

Se probarán los incisos a) y c) , y se dejan los restantes como ejercicios.

Por el axioma 6: 0.u + 0.u = (0+0).u = 0.u

Por otro lado: (0.u+0.u) + (-0.u) = 0.u + (-0.u)

Por propiedad asociativa: 0.u+(0.u+(-0.u)) = 0.u+(-0.u)

Por propiedad del elemento opuesto: 0.u+****** = ******

Por propiedad del elemento neutro: 0.u = ******

c) Para demostrar que (-1).u = -u debe demostrarse que u+(-1)u = ******

 u+(-1).u = 1.u +(-1).u= (1+(-1)).u= 0.u=******

Propiedades

* Para todo λ de IR, y para todo v de V, se cumple que: (−λ.)v = −(λ.v).
* Todo vector a de V es regular para la adición, es decir, cualesquiera que sean u, v de V:

( a+u = a+v) ⇒ (u = v)

* Para toda cupla (a,b) de vectores de V, existe un vector u de V, único , tal que:

a+u = b

* *Sugerencia: realizar el Ejercicio 5.*

**Subespacio vectorial**

Si (V (IR), +, ·) es un espacio vectorial, existen ciertos subconjuntos de V que forman por si solos espacios vectoriales bajo la adición y multiplicación externa definidas en V.

Definición

Un subconjunto W de un (V (IR), +, ·) espacio vectorial, es un subespacio de V, si W (IR) es por sí mismo un espacio vectorial bajo la adición y multiplicación externa definidas en V. Es decir, W con la adición y con la multiplicación externa deberá verificar los ocho axiomas de espacios vectoriales.

Sin embargo, si W es parte o subconjunto de V del que ya se sabe que es un espacio vectorial, entonces no es necesario verificar ciertos axiomas para W porque se heredan de V. Por lo tanto, para demostrar que un conjunto W es un subespacio de un espacio vectorial V, se deberán verificar simultáneamente las tres condiciones siguientes:

1. W ⊂ V
2. W ≠ ∅
3. Si u y v son vectores de W, entonces u + v es un vector de W

Si k es un real y u un vector de W, entonces k.u es un vector de W

Nota:

La condición 3) también puede resumirse de la siguiente manera:

 3)’Si u y v son vectores de W, k y q son reales, entonces k.u + q.v es un vector de W

* *Sugerencia: realizar algún ejemplo de los Ejercicios 6, 7 y 8.*

**Subespacios triviales**

Cualquiera que sea el espacio vectorial V, el conjunto formado por el vector nulo {******} y el mismo V son subespacios de V, llamados subespacios **triviales** o **impropios**. Los subespacios no triviales se denominan **propios**.

Ejemplo

Sea V = IR2, espacio vectorial sobre IR. Los conjuntos W1 = IR2 y W2 = {******} son los subespacios triviales de V, y U1 = IR x {******} y U2 = {******} x IR son subespacios vectoriales propios de V.

Nota:

Todo espacio vectorial admite al menos los subespacios triviales.

**El subespacio intersección**

En el espacio vectorial (V (IR), +, ·) se consideran dos subespacios, U y W, y se define el conjunto intersección entre ambos:

U ∩ W = { v / v ∈ V ∧ ( v ∈U ∧ v ∈ W ) }

Teorema

***Dado un espacio vectorial (V (IR), +, ·) y dos subespacios U y W de V, entonces el conjunto intersección U ∩ W es también un subespacio de V.***

Demostración

Como U y W son subespacios de V, entonces se cumple que:

( ∈ U ∧  ∈ W ) ⇒  ∈ (U ∩ W) , luego U ∩ W ≠ ∅

(U ∩ W) ⊂ V por definición del conjunto intersección

Si v1 ∈ U ∧ v1 ∈ W ⇒ v1 ∈ U ∩ W

Si v2 ∈ U ∧ v2 ∈ W ⇒ v2 ∈ U ∩ W

(v1 + v2) ∈ U ∧ v1 + v2 ∈ W ⇒ v1 + v2 ∈ U ∩ W

t. v1 ∈ U ∧ t. v1 ∈ W ⇒ t. v1 ∈ U ∩ W

En conclusión: U ∩ W es un subespacio vectorial de V. La intersección de subespacios siempre es un subespacio.

Nota:

En consecuencia, todo subespacio vectorial W debe contener el elemento neutro del espacio V, así como los elementos opuestos de todos los vectores del subespacio.

* *Sugerencia: realizar el Ejercicio 9.*

**La unión de subespacios**

En el espacio vectorial (V (IR), +, ·) se consideran dos subespacios, U y W, y se define el conjunto unión entre ambos:

U ∪ W = { v / v ∈ V ∧ ( v ∈ U ∨ v ∈ W ) }

Resulta que la *unión de subespacios no siempre es un subespacio*, se muestra con un ejemplo:

En el espacio vectorial IR3 (IR) se tienen los subespacios:

U = { u / u ∈ IR3 ∧ u = ( x, 0, 0 ) } y W = { w / w ∈ IR3 ∧ w = ( 0, y, 0 ) }

El conjunto unión contiene a los vectores: v ∈ U ∨ v ∈ W es decir que contiene a los vectores que son de la forma: (x, 0, 0) ∨ (0, y, 0)

Analizamos si es un subespacio:

U ∪ W ≠ ∅ ya que al menos  pertenece a ambos.

(U ∪ W) ⊂ V por definición del conjunto unión

v1 ∈ U ∪ W ⇒ v1 = (x, 0, 0) ∨ v1 = (0, y, 0)

v2 ∈ U ∪ W ⇒ v2 = (x’, 0, 0) ∨ v2 = (0, y’, 0)

Considerando v1 = (x, 0, 0) y v2 = (0, y’, 0) entonces: v1 + v2 = (x, y’, 0)

Este vector no pertenece a U ni tampoco a W, por lo tanto, no es estable para la suma, lo que indica que no es un subespacio vectorial de IR3.

**Familia de vectores**

Un conjunto ordenado de vectores: F = { u1, u2,, ... , um } de un espacio vectorial V ( IR ) se denomina **familia** *de vectores*.

**Combinaciones lineales**

Sea (V (IR), +, ·) un espacio vectorial y una familia de vectores F = { u1, u2,, ... , um }, se dice que un vector w de V es una combinación lineal de los vectores de F, si w se puede expresar en la forma:

 w = k1.u1 + k2.u2 +….+ km.um , en donde k1, k2,…., km son elementos de IR

Ejemplo:

Si V = IR2 (IR) y F = {}, el vector w = = -3. + 4. , en este caso k1 = -3 y k2 = 4

Si el vector w de V es el vector nulo, entonces la combinación lineal es:

  = k1 u1 + k2 u2 + ... + km um , denominada combinación trivial.

* *Sugerencia: realizar algún ejemplo de los Ejercicios 10, 11 y 12.*

**Familia libre y familia ligada**

Si en la combinación trivial resulta que todos los escalares son nulos, es decir: k1 = 0 = ... = km = 0 entonces la familia de vectores F = { u1, u2,, ... , um } recibe el nombre de **familia libre.**

En el caso contrario, si al menos uno de los escalares es no nulo, la familia F se denomina **ligada**.

**Vectores** **linealmente dependientes e independientes**

Un conjunto de vectores {v1,...,vn} se dice que es **linealmente independiente** si la única combinación lineal nula de ellos es la trivial, es decir, si siempre que se tenga:  = k1 u1 + k2 u2 + ... + km um, entonces ki = 0 para cada i. En caso contrario, se dice que son **linealmente dependientes**.

Los vectores de una familia libre son linealmente independientes, esto significa que ninguno de ellos se puede expresar como combinación lineal de los demás vectores de la familia. Los vectores de una familia ligada son linealmente dependientes.

* *Sugerencia: realizar algún ejemplo de los Ejercicios 13, 14, 15, 16, 17 y 18.*

Propiedades

* Si F es una familia libre, el vector nulo no pertenece a ella.

Demostración

Se supone la familia F = { , u1, u2,, ... , um } una familia de vectores de V ( IR), en la combinación trivial:

  = a0 + a1 u1 + a2 u2 + ... + am um

si: a1 = a2 = ... = am = 0 resulta entonces:

  = a0  pero por la propiedad que dice: Si k.u = , entonces k = 0 o u =

luego el escalar a0 no es necesariamente nulo, lo que indica que la familia no es libre.

* Si una familia de vectores de V consta de un solo vector no nulo, es una familia libre.

Demostración

Sea F = { u1 } , con u1 no nulo, una familia de vectores de V ( IR ), la combinación trivial:  = a1 u1 resulta que es verdadera si a1 = 0 o bien si u1 = , pero como u1 es no nulo, por lo tanto a1 = 0 , lo que indica que F es una familia libre.

* Si una familia F de vectores de V es libre, toda familia F’ incluida en F es también libre.

Demostración

Sea F = { u1, u2,, ... , um } una familia libre en V ( IR ) y sea F’ = { u1, u2,, ... , up } otra familia incluida en F ( p ≤ m ) . Por ser F familia libre resulta que:

  = a1 u1 + a2 u2 + ... + am um , con a1 = a2 = ... = am = 0

Sea la combinación lineal del vector nulo con los vectores de F’:

  = a1 u1 + a2 u2 + ... + ap up , como los m escalares son nulos, y p ≤ m, resulta que: a1 = a2 = ... = ap = 0 , por lo tanto F’ es también una familia libre.

* Si el vector nulo pertenece a una familia F de vectores de V, F es una familia ligada.

Demostración

Análoga a la presentada en la propiedad 1 de familia libre.

* Si F es una familia ligada de vectores de V, toda familia F’ que incluya a F es también ligada.

Demostración

Sea F = { u1, u2,, ... , um } una familia ligada en V ( IR ) y sea F’ = { u1, u2,, ... , up } otra familia que incluye a F ( p ≥ m ) . Por ser F familia ligada resulta que en la combinación lineal del vector nulo:

  = a1 u1 + a2 u2 + ... + am um , al menos un escalar ai es distinto de cero ( ai ≠ 0 ) para la combinación lineal del vector nulo con los vectores de F’:

  = a1 u1 + a2 u2 + ... + ap up

como al menos un escalar ai es no nulo, y resulta que p ≥ m , en esta segunda combinación lineal también está ese escalar no nulo, lo que indica que F’ es familia ligada.

* Si F es una familia ligada de vectores de V, al menos uno de sus vectores se puede expresar como combinación lineal de los demás.

Demostración

Sea F = {u1, u2, ... , um } una familia ligada en V ( IR ), y sea la combinación trivial:

 = a1 u1 + a2 u2 + ... + am um , por ser F ligada al menos uno de los escalares es no nulo, se supone que a1 es un escalar no nulo, entonces:

 = a1 u1 + a2 u2 + ... + am um , a1 ≠ 0 luego u1 = -  u2 -  u3 - … -  um

Lo que indica que el vector u1 es combinación lineal de los demás vectores de la familia F.

**Familia generatriz o conjunto generador**

Sea (V (IR), +, ·) un espacio vectorial y una familia de vectores F = { u1, u2,, ... , um }, F recibe el nombre de **familia generatriz** o **conjunto generador**, si todo vector del espacio vectorial V se puede expresar como combinación lineal de los vectores de F.

Es decir cualquiera sea u de V, es posible expresarlo como: u = a1 u1 + a2 u2 + ... + am um , con u1, u2,, ... , um vectores de F y a1, a2,... ,am de IR.

Definición

Si u1, u2,, ... , um son vectores en un espacio vectorial V sobre IR, y si todo vector en V es expresable como combinación lineal de los vectores u1, u2,, ... , um, entonces se dice que estos vectores **generan** a V.

En general una familia de vectoresF = { u1, u2,, ... , um }, en un espacio vectorial V puede generar o no a V. Si lo genera, entonces todo vector de V es expresable como combinación lineal de los vectores de F. Sin embargo, puede generar un subconjunto o parte de V, entonces se obtiene un subespacio de V. Este subespacio se denomina el **espacio lineal generado** por la familia F. Al subespacio lineal generado por la familia F, se lo suele representar como Gen({u1,u2,...,um}).

Teorema

***Si F = { u1, u2,, ... , um } es una familia generatriz de un espacio vectorial V, entonces:***

1. ***El conjunto W de todas las combinaciones lineales de los vectores de la familia F, es un subespacio de V.***
2. ***W es el subespacio más pequeño (en el sentido de la inclusión) de V, que contiene a los vectores de la familia F.***
* *Sugerencia: realizar algún ejemplo de los Ejercicios 19 y 20.*

**Bases de un espacio vectorial**

Sea (V (IR), +, ·) un espacio vectorial y una familia de vectores F = { u1, u2,, ... , um }, F recibe el nombre de **base de un espacio vectorial** si:

* F es una familia libre
* F es familia generatriz de V

Lo que equivale a decir que todo u de V se puede expresar como combinación lineal de los vectores de la familia F:

 u = a1 u1 + a2 u2 + ... + am um

y además si u es el vector nulo entonces:

  = k1 u1 + k2 u2 + ... + km um entonces ki = 0 para cada i, 1≤ i ≤ m

Ejemplos

* Sea V = IR (IR) , la familia Bc = {1}, es una base de IR denominada base canónica.
* Sea V = IR2 (IR) , la familia Bc = {}, es su base canónica.
* Sea V = IR3 (IR) , la familia Bc = {,,}, es su base canónica.
* Sea V = IRn (IR) , la familia Bc = {, ,…,}, es su base canónica.
* Sea V = M2x2 (IR) , la familia Bc = {**, , **}, es su base canónica.
* *Sugerencia: realizar algún ejemplo de los Ejercicios 21, 22 y 23.*

**Dimensión de un espacio vectorial**

Definición

La dimensión de un espacio vectorial V se define como el número de vectores en una base de V. Además, por definición, el espacio formado por el vector nulo, tiene dimensión nula.

* Todas las bases de un espacio vectorial de dimensión finita n tienen exactamente n vectores.
* Existen espacios vectoriales de dimensión infinita.
* Toda familia libre de V con n elementos es una base de V.
* Toda familia generatriz de V con n elementos es una base de V.

**Dimensión de los subespacios**

Sea el espacio vectorial V (IR), de dimensión finita n, todo subespacio de V tiene dimensión finita m tal que m ≤ n.

* Por convención el subespacio trivial U = { } como carece de base, entonces se dice que su dimensión es cero, dim { } = 0 , en este caso el único subespacio es él mismo, por lo tanto mantiene la dimensión nula.
* Si dim V = 1, admite subespacios de dimensión 0 y dimensión 1. Esto significa que sólo admite a los subespacios triviales, ya que no existe otro subespacio de la misma dimensión incluido en él.
* Si dim V = 2, admite los subespacios triviales, de dimensión 0 y de dimensión 2. Pero también admite subespacios de dimensión 1.
* En general si dim V = n admite los subespacios triviales de dimensión 0 y n, y además todos los de dimensión m tal que 0 < m < n.

A los espacios vectoriales de dimensión 1 se los llama rectas vectoriales, a los de dimensión 2 planos vectoriales, a los de dimensión n espacios n-dimensionales.

* *Sugerencia: realizar algún ejemplo de los Ejercicios 24 y 25.*

**Componentes de un vector en una base**

Sea V (IR) un espacio vectorial y B = {u1, u2,, ... , un } una base de V, un vector u cualquiera de V se expresa de manera única como: u = a1 u1 + a2 u2 + ... + an un, los escalares que permiten esta combinación lineal reciben el nombre de componentes del vector u y se puede anotar así:

u = a1 u1 + a2 u2 + ... + an un = 

Teorema

***Si B = { u1, u2,, ... , un }, es una base para un espacio vectorial V, entonces todo conjunto con más de n vectores es una familia ligada, es decir sus vectores son linealmente dependientes.***

Demostración

Sea B’ = {w1, w2,, ... , wm },una familia de m vectores en V, en donde m > n. Se desea demostrar que B’ es una familia ligada, es decir sus vectores son linealmente dependientes.

Como B = {u1, u2,, ... , un } es una base de V, cada vector wj de V se puede expresar como combinación lineal de los vectores de B, por ejemplo:

w1 = a11 u1 + a21 u2 + ... + an1 un

w2 = a12 u1 + a22 u2 + ... + an2 un

 ……………………………………

wm = a1m u1 + a2m u2 + ... + anm un

para demostrar que B’ es una familia ligada, se deben hallar todos lo escalares k1, k2,…, km, no todos nulos, tales que:

k1w1+k2w2+…+kmwm=

reemplazando resulta:

k1(a11 u1 + a21 u2 +... + an1 un ) + k2 (a12 u1 + a22 u2 +...+ an2 un) + …+ km (a1m u1 + a2m u2 +...+ anm un ) = 

Por tanto, el problema de probar que B’ es una familia ligada, se reduce a demostrar que existen k1, k2, …, km escalares no todos nulos, que satisfacen el sistema:

 ****

Dado que el sistema es homogéneo y posee más incógnitas que ecuaciones, garantiza la existencia de soluciones no triviales, por lo tanto, no todos los escalares son nulos y la familia es ligada, es decir, sus vectores son linealmente dependientes.

Teorema

***Dos bases cualesquiera para un espacio vectorial de dimensión finita, tienen el mismo número de vectores.***

Demostración

Sean B = {u1, u2, ... , un } y B’ = { w1, w2,, ... , wm }, dos bases para un mismo espacio vectorial V. Dado que B es una base y B’ es una familia libre, por el teorema anterior implica que m ≤ n. De modo análogo, dado que B’ es base de V y B es familia libre, también implica que n ≤ m. Por tanto, m = n.

**Cambio de base**

Se desarrolla para un espacio vectorial de dimensión 2 y luego se generaliza a un espacio de dimensión finita n:

Sea V (IR) un espacio vectorial y B1 = { u1 , u2 } y B2 = { v1 , v2 } dos bases de V. Un vector u de V se expresa de manera única en B1 y de manera única en B2:

 u = α1 u1 + α2 u2 =  u = β1 v1 + β2 v2 = 

es decir: u = α1 u1 + α2 u2 = β1 v1 + β2 v2

Si se sabe que las componentes de los vectores de B2 en la base B1 son:

v1 =  = a11 u1 + a21 u2 y v2 =  = a12 u1 + a22 u2

Es posible relacionar ambas expresiones de u:

u = α1 u1 + α2 u2 = β1 v1 + β2 v2 = β1  + β2  = β1 (a11 u1 + a21 u2) + β2 (a12 u1 + a22 u2)

u = α1 u1 + α2 u2 = β1 a11 u1 + β1 a21 u2 + β2 a12 u1 + β2 a22 u2 = (a11 β1 + β2 a12 ) u1 + (β1 a21 + β2 a22) u2

Por igualación podemos decir que:

α1 = β1 a11 + β2 a12

α2 = β1 a21 + β2 a22

Que es un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas, con solución única, ya que un vector se expresa de manera única en cada base, resolver el sistema equivale a hallar las componentes de u en B2 a partir de B1 o viceversa.

En forma matricial se expresa así:

 **X = P B1 B 2 . X’**

  = . 

Siendo **X** la matriz que contiene a las componentes de u en B1,

**P B1 B 2** la matriz que contiene en cada columna a las componentes de los vectores de B2, llamada **matriz de pasaje de la base B2 a la B1**,

**X’** es la matriz que contiene a las componentes de u en B2.

Lo visto se generaliza a un espacio vectorial de dimensión finita n.

* *Sugerencia: realizar algún ejemplo de los Ejercicios 26, 27 y 28.*

**Espacio normado**

Sea V (IR) el espacio vectorial en el cual se ha definido la función norma, en este caso el espacio se denomina **normado.**

**Producto interior y sus propiedades**

Sea V (IR) un espacio vectorial, existe una función < > tal que, a cada par de vectores de V, le asigna un número real, cumpliendo ciertos requisitos, esta función recibe el nombre de producto interior.

< > : V x V → IR

 (u, v) → < u , v >

Condiciones: Para todo u, para todo v y para todo w del espacio V, y para cualquier t de IR:

< u, u > ≥ 0 ∧ (< u , u > = 0 ⇔ u = 0 )

< u, v > = < v , u >

 < u, (v + w ) > = < u , v > + < u , w >

t. < u, v > = < u, (t . v)>

**Espacio euclídeo**

Sea V (IR) el espacio vectorial en el cual se ha definido la función producto interior, en este caso el espacio se denomina **euclídeo.**

**Bases ortogonales**

Sea V (IR) un espacio vectorial y B = {u1 , u2,…, un} una base de V de dimensión finita n. B es una base ortogonal si todo par de vectores de B son ortogonales, es decir para todo ui ≠ uj de B, ui • uj = 0.

**Bases ortonormadas**

Sea V (IR) un espacio vectorial y B = {u1 , u2,…, un} una base de V de dimensión finita n. B es una base ortonormada si:

* para cada vector ui de B, || ui || = 1, para todo i, 1 ≤ i ≤ n.
* para todo ui ≠ uj de B, ui • uj = 0

Es decir, si sus vectores son normados y el producto escalar entre cada par de vectores distintos, es nulo.

Nota:

Las bases canónicas en todo espacio vectorial de dimensión finita, son bases ortonormadas.

* *Sugerencia: realizar el Ejercicio 29.*