

1	2	3	4	5	6	Calificación

Introducción al Álgebra Lineal

Examen Final

06/12/2012

APELLIDO Y NOMBRE:

Indicaciones:

- Resuelva cada ejercicio en hojas separadas y coloque su nombre y apellido en cada una de ellas.
- Justifique todas sus respuestas.

Ejercicio 1. (12p.) Sea $n \in \mathbb{N}$ y sean $v, w \in \mathbb{R}^n$. Demostrar que $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$.

Ejercicio 2. (15p.) Sea $n \in \mathbb{N}$ y sea $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Demostrar que las siguientes proposiciones son equivalentes:

- (1) A es inversible.
- (2) Para todo $b \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ el sistema $Ax^t = b$ tiene solución única.
- (3) El sistema $Ax^t = 0$ tiene solución única $x = 0$.
- (4) A es producto de matrices elementales.

Ejercicio 3.

- (a) (5p.) Definir el concepto de independencia lineal.
- (b) (10p.) Sea \mathbb{V} un espacio vectorial y sean $v_1, v_2, \dots, v_n \in \mathbb{V}$ tales que $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ es linealmente independiente. Sea $w \in \mathbb{V}$. Demostrar que si $\{v_1, v_2, \dots, v_n, w\}$ es linealmente dependiente entonces w es combinación lineal de v_1, v_2, \dots, v_n .

Ejercicio 4.

- (a) (4p.) Definir núcleo e imagen de una transformación lineal.
- (b) (14p.) Sea \mathbb{V} un espacio vectorial de dimensión finita y sea \mathbb{W} otro espacio vectorial. Sea $f : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{W}$ una transformación lineal. Demostrar que

$$\dim(\mathbb{V}) = \dim(\text{Nu}f) + \dim(\text{Im}f).$$

Ejercicio 5. (12p.) Sea $a \in \mathbb{R}$. Definimos $S_a = \text{Gen}(\{(1, 0, 2), (1, 1, 3), (0, 1, a)\})$. Calcular $\dim(S_a)$ para cada valor de $a \in \mathbb{R}$.

Ejercicio 6. Sean $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ y $B' = \{w_1, w_2, w_3\}$ bases de \mathbb{R}^3 . Sea $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ la transformación lineal tal que $M_{B'B}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 9 \end{pmatrix}$.

- (a) (14p.) Hallar una base y la dimensión de $\text{Nu}(f)$.
- (b) (14p.) Hallar una base y la dimensión de $\text{Im}(f)$.

Cantidad de hojas (a completar por el docente)

1	2	3	4	5	6