1	2	3	4	5	Calificación

Introducción al Álgebra Lineal

Examen Final

20/12/2012

Apellido y Nombre:

Indicaciones:

- Resuelva cada ejercicio en hojas separadas y coloque su nombre y apellido en cada una de ellas.
- Justifique todas sus respuestas.

Ejercicio 1. (*10p.*) Sea $n \in \mathbb{N}$ y sean $v, w \in \mathbb{R}^n$. Demostrar que $|\langle v, w\rangle| \leq \|v\|\|w\|$.

Ejercicio 2. (*10p.*) Sean $m, n, l, r \in \mathbb{N}$ y sean $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times l}$ y $C \in \mathbb{R}^{l\times r}$. Demostrar que $(AB)C = A(BC)$.

Ejercicio 3.

(*a*) (*4p.*) Definir el concepto de independencia lineal.

(*b*) (*4p.*) Definir el concepto de conjunto generador de un espacio vectorial.

(*c*) (*14p.*) Sea $\mathbb{V}$ un espacio vectorial finitamente generado. Sea $A = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ un conjunto linealmente independiente de vectores de $\mathbb{V}$ y sea $G = \{w_1, w_2, \ldots, w_m\}$ un conjunto generador de $\mathbb{V}$. Demostrar que existe un subconjunto $H \subseteq G$ tal que $A \cup H$ es una base de $\mathbb{V}$.

Ejercicio 4.

(*a*) (*4p.*) Definir imagen de una transformación lineal.

(*b*) (*7p.*) Sean $\mathbb{V}$ y $\mathbb{W}$ espacios vectoriales y sea $f : \mathbb{V} \to \mathbb{W}$ una transformación lineal. Sea $G = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ un conjunto generador de $\mathbb{V}$. Demostrar que $\{f(v_1), f(v_2), \ldots, f(v_n)\}$ genera $\mathrm{Im} f$.

(*c*) (*7p.*) Sean $\mathbb{V}$ y $\mathbb{W}$ espacios vectoriales y sea $f : \mathbb{V} \to \mathbb{W}$ una transformación lineal. Sea $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ un conjunto linealmente independiente de vectores $\mathbb{V}$. Demostrar que si f es un monomorfismo entonces $\{f(v_1), f(v_2), \ldots, f(v_n)\}$ es linealmente independiente.

Ejercicio 5. Sean $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ y $B' = \{w_1, w_2, w_3\}$ bases de $\mathbb{R}^3$. Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la transformación lineal tal que $M_{BB'}(f) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$.

(*a*) (*14p.*) Hallar una base y la dimensión de $\mathrm{Nu}(f)$.

(*b*) (*14p.*) Hallar una base y la dimensión de $\mathrm{Im}(f)$.

(*c*) (*12p.*) Hallar todos los valores de $a \in \mathbb{R}$ tales que $(a + 4)w_1 + 2aw_2 + 2w_3 \in \mathrm{Im} f$.

Cantidad de hojas (*a completar por el docente*)

1	2	3	4	5