1	2	3	4	5	6	Calificación

Introducción al Álgebra Lineal

Examen Final

05/12/2013

Apellido y Nombre:

Indicaciones:

- Resuelva cada ejercicio en hojas separadas y coloque su nombre y apellido en cada una de ellas.
- Justifique todas sus respuestas.

Ejercicio 1. (*10p.*) Sea $n \in \mathbb{N}$ y sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Demostrar que las siguientes proposiciones son equivalentes:

(a) A es inversible.

(b) Para todo $b \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ el sistema $Ax^t = b$ tiene solución única.

(c) El sistema $Ax^t = 0$ tiene solución única $x = 0$.

(d) A es producto de matrices elementales.

Ejercicio 2.

(a) (*3p.*) Definir el concepto de independencia lineal.

(b) (*7p.*) Sea $\mathbb{V}$ un espacio vectorial y sean $v_1, v_2, \ldots, v_n \in \mathbb{V}$ tales que $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ es linealmente independiente. Sea $w \in \mathbb{V}$. Demostrar que si $\{v_1, v_2, \ldots, v_n, w\}$ es linealmente dependiente entonces w es combinación lineal de $v_1, v_2, \ldots, v_n$.

Ejercicio 3.

(a) (*4p.*) Definir núcleo e imagen de una transformación lineal.

(b) (*7p.*) Sean $\mathbb{V}$ y $\mathbb{W}$ espacios vectoriales y sea $f : \mathbb{V} \to \mathbb{W}$ una transformación lineal. Sea $G = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ un conjunto generador de $\mathbb{V}$. Demostrar que $\{f(v_1), f(v_2), \ldots, f(v_n)\}$ genera $\mathrm{Im}f$.

(c) (*7p.*) Sean $\mathbb{V}$ y $\mathbb{W}$ espacios vectoriales y sea $f : \mathbb{V} \to \mathbb{W}$ una transformación lineal. Sea $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ un conjunto linealmente independiente de vectores $\mathbb{V}$. Demostrar que si f es un monomorfismo entonces $\{f(v_1), f(v_2), \ldots, f(v_n)\}$ es linealmente independiente.

Ejercicio 4. (*12p.*) Sea $n \in \mathbb{N}$ y sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Sea $f_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ la transformación lineal definida por $f_A(x) = (Ax^t)^t$. Demostrar que A es diagonalizable si y sólo si f_A es diagonalizable.

Ejercicio 5. (*25p.*) Sean $S = \mathrm{Gen}\{((1,0,0,0),(1,1,2,0),(0,1,1,0)\}$ y $T = \{x \in \mathbb{R}^4 \,/\, x_1 - x_3 = 0\}$. Hallar un subespacio $W \subseteq \mathbb{R}^4$ que verifique simultáneamente que $W \subseteq T$, $\dim(W \cap S) = 1$ y $W + S = \mathbb{R}^4$. Verificar que el subespacio W hallado cumpla las condiciones pedidas.

Ejercicio 6. (*25p.*) Sea $A = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$. Decidir si A es diagonalizable y en caso afirmativo hallar una matriz C tal que $C^{-1}AC$ sea diagonal.

Cantidad de hojas (*a completar por el docente*)

1	2	3	4	5	6