1	2	3	4	5	6	Calificación

Introducción al Álgebra Lineal

Examen Final Libre

20/12/2012

Apellido y Nombre:

Indicaciones:

- Resuelva cada ejercicio en hojas separadas y coloque su nombre y apellido en cada una de ellas.
- Justifique todas sus respuestas.

Importante:
Para aprobar el examen se debe obtener al menos el 60 % del puntaje en cada una de las dos partes del examen.

Parte práctica

Ejercicio 1. Sea $B = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ una base de $\mathbb{R}^4$. Sea $k \in \mathbb{R}$ y sea

$$S_k = \text{Gen}(\{v_1 - v_2\ ,\ v_1 + v_3 + v_4\ ,\ 2v_1 + v_2 + 3v_3 + kv_4\}).$$

(*a*) (*6p.*) Hallar todos los valores de $k \in \mathbb{R}$ tales que el conjunto

$$A = \{v_1 - v_2\ ,\ v_1 + v_3 + v_4\ ,\ 2v_1 + v_2 + 3v_3 + kv_4\}$$

sea linealmente independiente.

(*b*) (*10p.*) Para cada valor de $k \in \mathbb{R}$, calcular $\dim(S_k)$.

Ejercicio 2. Sean $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ y $B' = \{w_1, w_2, w_3\}$ bases de $\mathbb{R}^3$. Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la transformación lineal tal que $M_{BB'}(f) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & -5 \end{pmatrix}$.

(*a*) (*9p.*) Hallar una base y la dimensión de $\text{Nu}(f)$.

(*b*) (*9p.*) Hallar una base y la dimensión de $\text{Im}(f)$.

Ejercicio 3. (*16p.*) Sea $B = \{(1, 0, 1), (0, 1, 1), (0, 0, 1)\}$ y sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la transformación lineal tal que $M_{BB}(f) = \begin{pmatrix} -5 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$. Decidir si f es diagonalizable y en caso afirmativo encontrar una base B' de $\mathbb{R}^3$ tal que $M_{B'B'}(f)$ sea diagonal.

Parte teórica

Ejercicio 4.

(*a*) (*5p.*) Definir producto de matrices.

(*b*) (*10p.*) Sean $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times l}$ y $C \in \mathbb{R}^{l\times r}$. Demostrar que $(AB)C = A(BC)$.

Ejercicio 5. (*20p.*) Sea $\mathbb{V}$ un espacio vectorial de dimensión finita y sean S y T subespacios de $\mathbb{V}$. Demostrar que

$$\dim(S+T) = \dim(S) + \dim(T) - \dim(S \cap T).$$

Ejercicio 6. (*15p.*) Sea $\mathbb{V}$ un espacio vectorial y sea $f : \mathbb{V} \to \mathbb{V}$ una transformación lineal. Demostrar que f es diagonalizable si y sólo si existe una base B de $\mathbb{V}$ formada por autovectores de f.

Cantidad de hojas (*a completar por el docente*)

1	2	3	4	5	6