1	2	3	4	5	Calificación

Introducción al Álgebra Lineal

Examen Final

13/02/2014

Apellido y Nombre:

Indicaciones:

- Resuelva cada ejercicio en hojas separadas y coloque su nombre y apellido en cada una de ellas.
- Justifique todas sus respuestas.

Ejercicio 1. (*12p.*) Sea $n \in \mathbb{N}$ y sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Demostrar que las siguientes proposiciones son equivalentes:

(a) A es inversible.

(b) Para todo $b \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ el sistema $Ax^t = b$ tiene solución única.

(c) El sistema $Ax^t = 0$ tiene solución única $x = 0$.

(d) A es producto de matrices elementales.

Ejercicio 2.

(a) (*5p.*) Definir núcleo e imagen de una transformación lineal.

(b) (*14p.*) Sea $\mathbb{V}$ un espacio vectorial de dimensión finita y sea $\mathbb{W}$ otro espacio vectorial. Sea $f : \mathbb{V} \to \mathbb{W}$ una transformación lineal. Demostrar que

$$\dim(\mathbb{V}) = \dim(\mathrm{Nu}f) + \dim(\mathrm{Im}f).$$

Ejercicio 3. (*14p.*) Sea $\mathbb{V}$ un espacio vectorial y sea $f : \mathbb{V} \to \mathbb{V}$ una transformación lineal. Demostrar que f es diagonalizable si y sólo si existe una base B de $\mathbb{V}$ formada por autovectores de f.

Ejercicio 4. (*25p.*) Sean $S = \{x \in \mathbb{R}^4 \,/\, x_1 + x_2 - 2x_4 = 0\}$ y $T = \{x \in \mathbb{R}^4 \,/\, x_1 - x_2 + 2x_3 = 0\}$. Hallar un subespacio $W \subseteq \mathbb{R}^4$ que verifique simultáneamente que $W \subseteq T$, $\dim(W \cap S) = 1$ y $W + S = \mathbb{R}^4$. Verificar que el subespacio W hallado cumpla las condiciones pedidas.

Ejercicio 5. (*30p.*) Sean $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ y $B' = \{v_1, v_2 - 2v_3, -v_1 - v_3\}$ bases de $\mathbb{R}^3$ y sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la transformación lineal tal que $M_{B'B}(f) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & -4 & 1 \end{pmatrix}$.

(a) Hallar los autovalores de f.

(b) Decidir si f es diagonalizable y en caso afirmativo encontrar una base B'' de $\mathbb{R}^3$ tal que $M_{B''B''}(f)$ sea diagonal.

Cantidad de hojas (*a completar por el docente*)

1	2	3	4	5