

1	2	3	4	5	6	Calificación

Introducción al Álgebra Lineal

Examen Final Libre

26/02/2015

APELLIDO Y NOMBRE:

Indicaciones:

- Resuelva cada ejercicio en hojas separadas y coloque su nombre y apellido en cada una de ellas.
- Justifique todas sus respuestas.

Importante:

Para aprobar el examen se debe obtener al menos el 60 % del puntaje en cada una de las dos partes del examen.

Parte Práctica

Ejercicio 1. (20p.) Sea L la recta de ecuación paramétrica $X = t(2, 4, -3) + (6, 6, -3)$, $t \in \mathbb{R}$ y sea L' la recta de ecuación paramétrica $X = t(1, -1, 0) + (0, 4, -2)$, $t \in \mathbb{R}$.

- (a) Hallar dos puntos P y Q tales que $P \in L$, $Q \in L'$ y tales que el segmento \overline{PQ} sea perpendicular tanto a L como a L' .
- (b) Demostrar que para todos $A \in L$ y $B \in L'$ vale que $\langle A - B, P - Q \rangle = \|P - Q\|^2$.

Ejercicio 2. (20p.) Sea $S = \{x \in \mathbb{R}^4 / x_1 + x_2 = 3x_3 + x_4 = x_2 - x_3\}$.

- (a) Demostrar que S es subespacio de \mathbb{R}^4 .
- (b) Hallar la expresión de una transformación lineal $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ tal que $\text{Nuf} = \text{Im}f = S$.

Ejercicio 3. (20p.) Sean $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ y $B' = \{v_1 + v_2, v_3, -v_1 - 2v_2\}$ bases de \mathbb{R}^3 y sea $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ la transformación lineal tal que $M_{BB'}(f) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 4 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

- (a) Hallar los autovalores de f .
- (b) ¿Es f diagonalizable?

Parte Teórica

Ejercicio 4. (20p.) Sea $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ una matriz con autovalores 1, 2 y 5. Calcular $\det(A)$.

Ejercicio 5. (20p.) Sea \mathbb{V} un espacio vectorial de dimensión n y sea B una base de \mathbb{V} . Sea $f : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{R}^n$ definida por $f(v) = [v]_B$.

(a) Demostrar que f es una transformación lineal.

(b) Sean $w_1, w_2, \dots, w_m \in \mathbb{V}$. Demostrar que $\{w_1, w_2, \dots, w_m\}$ es linealmente independiente si y sólo si $\{[w_1]_B, [w_2]_B, \dots, [w_m]_B\}$ es linealmente independiente.

Ejercicio 6. (20p.) Evaluación oral.

Cantidad de hojas (a completar por el docente)

1	2	3	4	5