1	2	3	4	5	Calificación

Introducción al Álgebra Lineal

Examen Final

14/02/2013

APELLIDO Y NOMBRE:

Indicaciones:

- Resuelva cada ejercicio en hojas separadas y coloque su nombre y apellido en cada una de ellas.
- Justifique todas sus respuestas.

Ejercicio 1. (*10p.*) Sea $n \in \mathbb{N}$ y sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Demostrar que A es inversible si y sólo si $\det(A) \neq 0$.

Ejercicio 2.

(*a*) (*4p.*) Definir el concepto de independencia lineal.

(*b*) (*4p.*) Definir el concepto de conjunto generador de un espacio vectorial.

(*c*) (*14p.*) Sea $\mathbb{V}$ un espacio vectorial. Sean $v_1, v_2, \dots, v_n \in \mathbb{V}$ tales que $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ es linealmente independiente. Sean $w_1, w_2, \dots, w_m \in \mathbb{V}$ tales que $\{w_1, w_2, \dots, w_m\}$ genera $\mathbb{V}$. Demostrar que $n \leq m$.

Ejercicio 3. (*14p.*) Sea $\mathbb{V}$ un espacio vectorial de dimensión finita y sean S y T subespacios de $\mathbb{V}$. Demostrar que

$$\dim(S+T) = \dim(S) + \dim(T) - \dim(S \cap T).$$

Ejercicio 4.

(*a*) (*6p.*) Definir núcleo e imagen de una transformación lineal.

(*b*) (*8p.*) Sean $\mathbb{V}$ y $\mathbb{W}$ espacios vectoriales y sea $f : \mathbb{V} \to \mathbb{W}$ una transformación lineal. Demostrar que $\mathrm{Nu}f$ es un subespacio de $\mathbb{V}$ y que $\mathrm{Im}f$ es un subespacio de $\mathbb{W}$.

Ejercicio 5. Sean $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ y $B' = \{w_1, w_2, w_3\}$ bases de $\mathbb{R}^3$. Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la transformación lineal tal que $M_{BB'}(f) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 3 \\ 3 & -1 & 8 \end{pmatrix}$.

(*a*) (*14p.*) Hallar una base y la dimensión de $\mathrm{Nu}(f)$.

(*b*) (*14p.*) Hallar una base y la dimensión de $\mathrm{Im}(f)$.

(*c*) (*12p.*) Sea B'' la base de $\mathbb{R}^3$ definida por $B'' = \{w_1 + w_3, -w_1 + w_2, w_3\}$. Calcular $M_{BB''}(f)$.

Cantidad de hojas (*a completar por el docente*)

1	2	3	4	5