1	2	3	4	5	6	Calificación

Introducción al Álgebra Lineal

Examen Final

07/08/2014

Apellido y Nombre:

Indicaciones:

- Resuelva cada ejercicio en hojas separadas y coloque su nombre y apellido en cada una de ellas.
- Justifique todas sus respuestas.

Ejercicio 1. Sean $m, n \in \mathbb{N}$ y sean $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ y $b \in \mathbb{R}^{m\times 1}$. Sean $S_b = \{x \in \mathbb{R}^n \,/\, Ax^t = b\}$ y $S_0 = \{x \in \mathbb{R}^n \,/\, Ax^t = 0\}$. Demostrar que

(*a*) (*4p.*) Si $x, y \in S_b$ entonces $x - y \in S_0$.

(*b*) (*8p.*) Si $s \in S_b$ entonces $S_b = \{y \in \mathbb{R}^n \,/\, y = x + s \text{ para algún } x \in S_0\}$.

Ejercicio 2. (*16p.*) Sean $\mathbb{V}$ y $\mathbb{W}$ espacios vectoriales y sea $f : \mathbb{V} \to \mathbb{W}$ una transformación lineal. Sea B una base de $\mathbb{V}$ y sea B' una base de $\mathbb{W}$. Demostrar que para todo $v \in \mathbb{V}$ vale que

$$M_{BB'}(f).\,([v]_B)^t = ([f(v)]_{B'})^t.$$

Ejercicio 3. (*16p.*) Sea $\mathbb{V}$ un espacio vectorial y sea $f : \mathbb{V} \to \mathbb{V}$ una transformación lineal. Sea $r \in \mathbb{N}$ y sean $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$ autovalores distintos de f. Sean $v_1, v_2, \ldots, v_r$ autovectores de f asociados a los autovalores $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$ respectivamente. Demostrar que el conjunto $\{v_1, v_2, \ldots, v_r\}$ es linealmente independiente.

Ejercicio 4. (*18p.*) Sea Π el plano de ecuación $x + 2y - 3z = 2$ y sea L' la recta definida por la ecuación paramétrica $X = t(-2, 3, 1) + (2, 1, 2)$, $t \in \mathbb{R}$. Hallar la ecuación de una recta L contenida en Π que sea perpendicular a la recta L'.

Ejercicio 5. Sea $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ y sean $b_1, b_2 \in \mathbb{R}^{3\times 1}$. Se sabe que $(2, 0, 2)$ y $(1, 2, 1)$ son soluciones de $Ax^t = b_1$ y que $(1, 1, 0)$ es solución de $Ax^t = b_2$.

(*a*) (*6p.*) Hallar tres soluciones distintas del sistema $Ax^t = b_1 + b_2$.

(*b*) (*10p.*) Hallar la ecuación paramétrica de una recta L de $\mathbb{R}^3$ tal que todo punto de L sea solución del sistema $Ax^t = b_1 + b_2$. Demostrar que la recta hallada cumple lo pedido.

Ejercicio 6. (*22p.*) Sea $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ una base de $\mathbb{R}^3$ y sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la transformación lineal tal que

$$M_{BB}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Hallar todos los valores de $a \in \mathbb{R}$ tales que $2a^2 v_1 + 2v_2 + 3av_3 \in \mathrm{Im}(f)$.

Cantidad de hojas (*a completar por el docente*)

1	2	3	4	5	6