

1	2	3	4	5	6	Calificación

Introducción al Álgebra Lineal

Examen Final

04/07/2013

APELLIDO Y NOMBRE:

Indicaciones:

- Resuelva cada ejercicio en hojas separadas y coloque su nombre y apellido en cada una de ellas.
- Justifique todas sus respuestas.

Ejercicio 1. (12p.) Sea $N \in \mathbb{R}^3 - \{0\}$ y sea $A \in \mathbb{R}^3$. Sea Π el plano perpendicular a la dirección de N que contiene al punto A . Sea $P \in \mathbb{R}^3$.

(a) Demostrar que la distancia del punto P al plano Π es

$$d(P, \Pi) = \frac{|\langle P - A, N \rangle|}{\|N\|}.$$

(b) Demostrar que si $P = (x_0, y_0, z_0)$ y Π es el plano de ecuación $ax + by + cz = d$ entonces se obtiene que

$$d(P, \Pi) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 - d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

Ejercicio 2. (14p.) Sea $n \in \mathbb{N}$ y sea $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Demostrar que son equivalentes:

- (a) A es inversible.
- (b) Para todo $b \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ el sistema $Ax^t = b$ tiene solución única.
- (c) El sistema $Ax^t = 0$ tiene solución única $x = 0$.
- (d) A es producto de matrices elementales.

Ejercicio 3. (12p.) Sea \mathbb{V} un espacio vectorial de dimensión finita y sean S y T subespacios de \mathbb{V} . Demostrar que

$$\dim(S + T) = \dim(S) + \dim(T) - \dim(S \cap T).$$

Ejercicio 4.

- (a) (2p.) Definir monomorfismo.
- (b) (5p.) Sean \mathbb{V} y \mathbb{W} espacios vectoriales y sea $f : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{W}$ una transformación lineal. Demostrar que f es un monomorfismo si y sólo si f es inyectiva.
- (c) (5p.) Sean \mathbb{V} y \mathbb{W} espacios vectoriales y sea $f : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{W}$ una transformación lineal. Sea $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ un conjunto linealmente independiente de vectores \mathbb{V} . Demostrar que si f es un monomorfismo entonces $\{f(v_1), f(v_2), \dots, f(v_n)\}$ es linealmente independiente.

Ejercicio 5. (18p.) Hallar todos los valores de $a \in \mathbb{R}$ tales que el sistema

$$\begin{cases} x_1 & & - & x_3 & = & 2 \\ & x_2 & + & ax_3 & = & -1 \\ 2x_1 & + & ax_2 & + & 2x_3 & = & 5 \\ 4x_1 & + & 3x_2 & + & (3a - 4)x_3 & = & 5 \end{cases}$$

- tenga solución única ▪ tenga infinitas soluciones ▪ no tenga solución

Ejercicio 6. Sea $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ una base de \mathbb{R}^3 y sea $B' = \{v_1 + v_2, v_2 + v_3, v_1 + v_2 + v_3\}$. Sea

$$f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \text{ tal que } M_B(f) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

- (a) (9p.) Demostrar que B' es base de \mathbb{R}^3 .
(b) (5p.) Calcular $f(v_1 - v_3)$.
(c) (18p.) Hallar $M_{B'}(f)$.

Cantidad de hojas (a completar por el docente)

1	2	3	4	5	6