1	2	3	4	5	6	7	8	Calificación

Introducción al Álgebra Lineal

Examen Final Libre

04/07/2013

Apellido y Nombre:

Indicaciones:

- Resuelva cada ejercicio en hojas separadas y coloque su nombre y apellido en cada una de ellas.
- Justifique todas sus respuestas.

Importante:
Para aprobar el examen se debe obtener al menos el 60 % del puntaje en cada una de las dos partes del examen.

Parte práctica

Ejercicio 1. (*5p.*) Sean $A = (1, 0, 1)$ y $C = (-2, 1, 2)$. Determinar todos los $B \in \mathbb{R}^3$ tales que $A \times B = C$ y $\langle A, B\rangle = 1$.

Ejercicio 2. (*12p.*) Hallar todos los valores de $a \in \mathbb{R}$ tales que el sistema

$$\begin{cases} x_1 \quad - \quad x_3 = 2 \\ x_2 + a x_3 = -1 \\ 2x_1 + a x_2 + 2x_3 = 5 \\ 4x_1 + 3x_2 + (3a-4)x_3 = 5 \end{cases}$$

- tenga solución única
- tenga infinitas soluciones
- no tenga solución

Ejercicio 3. (*12p.*) Sean $S = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \,/\, x_1 + x_2 + x_3 = 0 \text{ y } x_1 + x_3 + x_4 = 0\}$ y $T = \text{Gen}(\{(1, 1, 1, 0), (0, 1, 1, 1), (2, 1, 1, 1)\})$. Hallar una base y la dimensión de $S \cap T$.

Ejercicio 4. Sea $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ una base de $\mathbb{R}^3$ y sea $B' = \{v_1 + v_2, v_2 + v_3, v_1 + v_2 + v_3\}$. Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $M_B(f) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}$.

(a) (*6p.*) Demostrar que B' es base de $\mathbb{R}^3$.

(b) (*3p.*) Calcular $f(v_1 - v_3)$.

(c) (*12p.*) Hallar $M_{B'}(f)$.

Parte teórica

Ejercicio 5. (*12p.*) Sea $N \in \mathbb{R}^3 - \{0\}$ y sea $A \in \mathbb{R}^3$. Sea Π el plano perpendicular a la dirección de N que contiene al punto A. Sea $P \in \mathbb{R}^3$.

(a) Demostrar que la distancia del punto P al plano Π es

$$d(P,\Pi) = \frac{|\langle P - A, N\rangle|}{\|N\|}.$$

(b) Demostrar que si $P = (x_0, y_0, z_0)$ y Π es el plano de ecuación $ax + by + cz = d$ entonces se obtiene que

$$d(P,\Pi) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 - d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

Ejercicio 6. (*14p.*) Sea $n \in \mathbb{N}$ y sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Demostrar que son equivalentes:

(a) A es inversible.

(b) Para todo $b \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ el sistema $Ax^t = b$ tiene solución única.

(c) El sistema $Ax^t = 0$ tiene solución única $x = 0$.

(d) A es producto de matrices elementales.

Ejercicio 7. (*12p.*) Sea $\mathbb{V}$ un espacio vectorial de dimensión finita y sean S y T subespacios de $\mathbb{V}$. Demostrar que

$$\dim(S + T) = \dim(S) + \dim(T) - \dim(S \cap T).$$

Ejercicio 8.

(a) (*2p.*) Definir monomorfismo.

(b) (*5p.*) Sean $\mathbb{V}$ y $\mathbb{W}$ espacios vectoriales y sea $f : \mathbb{V} \to \mathbb{W}$ una transformación lineal. Demostrar que f es un monomorfismo si y sólo si f es inyectiva.

(c) (*5p.*) Sean $\mathbb{V}$ y $\mathbb{W}$ espacios vectoriales y sea $f : \mathbb{V} \to \mathbb{W}$ una transformación lineal. Sea $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ un conjunto linealmente independiente de vectores $\mathbb{V}$. Demostrar que si f es un monomorfismo entonces $\{f(v_1), f(v_2), \ldots, f(v_n)\}$ es linealmente independiente.

Cantidad de hojas (*a completar por el docente*)

1	2	3	4	5	6	7	8