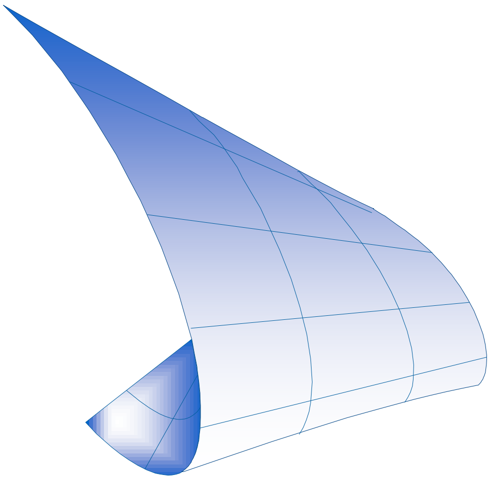
GEOMETRÍA ANALÍTICA



Programa de la asignatura y bibliografía
Planificación
Guía de Trabajos Prácticos

EQUIPO DE CÁTEDRA

Profesora Responsable	Silvia R. Raichman	sraichman@fcen.uncu.edu.ar
Extensiones Áulicas	Florencia Codina	florenciacodina@gmail.com

UNIVERSIDAD NACIONAL DE CUYO

FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES

Mendoza

Marzo de 2016

PROGRAMA DE LA ASIGNATURA

La *Geometría Analítica* permite hallar y estudiar los lugares geométricos de forma sistemática y general. Provee de métodos para transformar los problemas geométricos en problemas algebraicos, resolverlos analíticamente e interpretar geométricamente los resultados.

OBJETIVOS

Objetivos generales:

- ✓ Proveer al alumno de los conocimientos de la Geometría Analítica del plano y del espacio necesarios para su formación.
- ✓ Promover el desarrollo del pensamiento lógico, reflexivo y crítico.
- ✓ Promover el desarrollo de la capacidad de observación, análisis, abstracción, generalización y sistematización.
- ✓ Promover el desarrollo de habilidades para: formular preguntas precisas; tomar adecuados datos de lo que escuche, observe o lea; frecuentar las fuentes originales; extraer de las fuentes bibliográficas los contenidos importantes; ser metódico en la exposición y en el registro de la información; comunicarse con precisión y claridad en forma oral y escrita.
- ✓ Alentar el esfuerzo de la consulta bibliográfica.
- ✓ Estimular las conductas apropiadas para un profesional que se desenvolverá en un medio en constante evolución: creatividad, curiosidad, objetividad, flexibilidad, espíritu crítico, energía exploratoria.
- ✓ Generar o consolidar actitudes ético-científicas.

Objetivos específicos de conocimientos:

Al finalizar el curso los alumnos conocerán:

- ✓ Distintos sistemas de coordenadas.
- ✓ El concepto de Espacio Vectorial, sus propiedades y las relaciones entre sus elementos.
- ✓ Los conceptos, definiciones, ecuaciones, propiedades y aplicaciones de la Geometría Analítica plana.
- ✓ Los conceptos, definiciones, ecuaciones, propiedades y aplicaciones de la Geometría Analítica espacial.
- ✓ Las formas de evaluar ángulos, distancias y proyecciones en el plano y en el espacio.
- ✓ Las expresiones analíticas de curvas y superficies.

Objetivos específicos de aptitudes:

Se busca que al finalizar el curso los alumnos sean capaces de:

- ✓ Definir y utilizar distintos sistemas de coordenadas.
- ✓ Definir y utilizar el concepto de espacio vectorial, sus propiedades y las relaciones entre sus elementos.
- ✓ Operar con vectores en el plano y en el espacio.
- ✓ Hallar y estudiar lugares geométricos.
- ✓ Calcular ángulos, distancias y proyecciones en el plano y en el espacio.
- ✓ Reconocer y describir distintos tipos de superficies.
- ✓ Obtener y emplear las expresiones analíticas de curvas y superficies.
- ✓ Planificar estrategias para la resolución de problemas geométricos a partir de la identificación de los datos, la representación de los mismos y el establecimiento de relaciones, integrando los conocimientos adquiridos.
- ✓ Analizar e interpretar los resultados.

CONTENIDOS

UNIDAD 1: VECTORES. ÁLGEBRA VECTORIAL

Introducción. Vectores. Adición de vectores. Propiedades. Multiplicación de un vector por un escalar. Propiedades. Espacios vectoriales reales. Definición. Ejemplos. Propiedades. Combinación Lineal. Dependencia e independencia lineal. Conjunto generador. Base. Dimensión. Coordenadas de un vector respecto de una base dada. Módulo o norma de un vector. Vector unitario o versor. Cosenos directores de un vector. Producto escalar. Propiedades. Ángulo entre dos vectores. Condición de ortogonalidad. Proyección ortogonal de un vector sobre un eje. Producto vectorial. Propiedades. Producto mixto. Propiedades. Bases ortonormales. Aplicaciones.

UNIDAD 2: PLANOS Y RECTAS.

Planos. Distintas formas de la ecuación de un plano. Distancia de un punto a un plano. Posiciones relativas de dos planos. Ángulo entre dos planos. Familias de planos. Familias de planos que pasan por la intersección de dos planos dados. Rectas en el plano y en el espacio. Distintas formas de la ecuación de la recta. Posiciones relativas de dos rectas. Distancia de un punto a una recta. Distancia entre dos rectas. Ángulo entre dos rectas. Ángulo entre recta y plano. Familias de rectas. Familias de rectas que pasan por la intersección de dos rectas dadas. Aplicaciones en Ciencias.

UNIDAD 3. CÓNICAS.

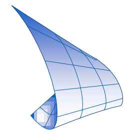
Definición general de cónica. Circunferencia. Ecuaciones paramétrica, vectorial y cartesiana de la circunferencia. Traslación de los ejes coordenados. Ecuación general de la circunferencia. Familias de circunferencias. Parábola, elipse e hipérbola: ecuaciones vectoriales, cartesianas, paramétricas. Familias de parábolas, de elipses y de hipérbolas. Traslación de ejes coordenados. Ecuaciones generales. Posiciones relativas entre una recta y una cónica. Ecuación de la recta tangente a una cónica por un punto perteneciente a la misma y por un punto exterior. Propiedades y aplicaciones de las cónicas.

UNIDAD 4. SUPERFICIES.

Superficie esférica. Plano tangente a una esfera. Superficies cilíndricas. Superficies cónicas. Superficies regladas. Superficies de revolución. Superficies cuádricas con y sin centro. Elipsoide. Hiperboloide de una hoja. Hiperboloide de dos hojas. Paraboloide elíptico. Paraboloide hiperbólico. Ecuaciones paramétricas. Aplicaciones en Ciencias.

UNIDAD 5. COORDENADAS POLARES, CILÍNDRICAS Y ESFÉRICAS.

Sistema de coordenadas polares. Relaciones entre coordenadas cartesianas ortogonales y coordenadas polares. Ecuaciones polares de rectas y circunferencias. Ecuaciones polares de las cónicas. Gráficas de ecuaciones en coordenadas polares. Otras curvas: espirales, lemniscatas, caracoles, rosas. Coordenadas cilíndricas. Relaciones entre coordenadas cartesianas ortogonales y coordenadas cilíndricas. Coordenadas esféricas. Relaciones entre coordenadas cartesianas ortogonales y coordenadas esféricas. Aplicaciones en Ciencias.



UNIDAD 6. ECUACIÓN GENERAL DE SEGUNDO GRADO.

Ecuación general de segundo grado en 2 variables: forma matricial; forma cuadrática asociada; rotación de los ejes coordenados; teorema de los ejes principales. Identificación de secciones cónicas. Ecuación general de segundo grado en 3 variables: forma matricial; forma cuadrática asociada; rotación de los ejes coordenados; teorema de los ejes principales. Identificación de superficies cuádricas. Aplicaciones en Ciencias.

BIBLIOGRAFÍA

Bibliografía básica

Autor	Título	Editorial	Año
A. Engler, D. Müller, S. Vrancken, M. Hecklein	Geometría Analítica	Ediciones UNL	2005
G. Fuller, D. Tarwater	Geometría Analítica	Addison Wesley Iberoamericana	1999
J. Kindle	Teoría y Problemas de Geometría Analítica Plana y del Espacio	Mc Graw Hill	2005
A.M. Kozac, S. P. Pastorelli, P. E. Vardanega	Nociones de Geometría Analítica y Álgebra lineal	Mc Graw Hill Interamericana. EdUtecNA	2007
Ch. Lehman	Geometría Analítica	Limusa	1993
Z. Menna Goncalves	Geometría Analítica del Espacio. Enfoque Vectorial	Limusa	1981
E. Oteyza, E. Lam, C. Hernández, A. Carrillo, A. Ramirez	Geometría Analítica	Pearson Educación	2005
S. Raichman, E. Totter	Geometría Analítica para Ciencias e Ingenierías	Ex-Libris	2013
D. Riddle	Geometría Analítica	Thomson International	1997
L. Santaló	Vectores y Tensores con sus Aplicaciones	Eudeba	1977
A. Sunkel	Geometría Analítica en forma vectorial y matricial	Nueva Librería	2005

Bibliografía complementaria

Autor	Título	Editorial	Año
H. Anton	Introducción al Álgebra Lineal	Limusa	2004
J.W. Downs	Practical Conic Sections	Dover Publications	2003
S.I., Grossman	Algebra Lineal con Aplicaciones	Mc. Graw Hill	1996
G. Nakos, D. Joyner	Algebra Lineal con Aplicaciones	International Thomson Editores	1999

METODOLOGÍA DE ENSEÑANZA Y DE EVALUACIÓN DURANTE EL CURSADO

Las clases son teórico-prácticas con activa participación de los alumnos. Se estimula el razonamiento, el pensamiento crítico y la confrontación de ideas como procesos en la construcción de conocimientos.

Se trabaja con una guía de trabajos prácticos para cada unidad temática, con el propósito de orientar las actividades de los alumnos a los objetivos planteados. El estudiante debe confeccionar una carpeta de trabajos prácticos con la totalidad de las actividades propuestas.

Los alumnos, en grupos de hasta 3 (tres), deben elaborar un Trabajo Integrador de Conocimientos que será presentado antes de la finalización del cursado. Cada Trabajo Integrador debe cumplir con los requisitos establecidos para el presente ciclo lectivo.

A los efectos de obtener la condición de regularidad de la materia, se plantean evaluaciones de seguimiento y parciales a lo largo del curso, y evaluaciones de recuperación.

Las evaluaciones son escritas, de carácter teórico-práctico. Se realizan en función de los contenidos enseñados, en las fechas previstas y con el nivel de dificultad desarrollado en clase y en las guías de trabajos prácticos. Se evalúa la capacidad de transferir y aplicar conocimientos, al mismo tiempo que se estimula al estudiante a mejorar su capacidad de comunicación escrita.

Las instancias de evaluación son:

- ✓ *Dos evaluaciones de seguimiento*: son evaluaciones cortas, que constan de dos o tres ejercicios referidos a los temas vistos hasta el momento y se aprueban con un mínimo de 60 puntos. Cada evaluación de seguimiento aprobada beneficia al alumno en la acreditación de algunos puntos (en principio 3) en la nota correspondiente al siguiente parcial.
- ✓ *Dos evaluaciones parciales*: son evaluaciones escritas de carácter teórico-práctico en las que se incluyen los temas desarrollados hasta la semana previa a la instancia de evaluación. Se aprueban con un mínimo de 60 puntos.
- ✓ *Recuperación de una de las dos evaluaciones parciales*: en el caso de haber desaprobado sólo una de las dos evaluaciones parciales, el alumno rinde una evaluación recuperatoria de la evaluación parcial desaprobada, que se aprueba con un mínimo de 60 puntos.
- ✓ *Una evaluación Global*: en el caso de no haber aprobado las dos evaluaciones parciales, o la recuperación correspondiente a alguna de ellas, el alumno tiene la posibilidad de rendir una evaluación recuperatoria Global, en la que se incluyen todos los temas evaluados en los dos parciales. Esta evaluación Global se aprueba con un mínimo de 60 puntos.

CRONOGRAMA DE EVALUACIONES

Evaluación	Sede Central	Sede Tupungato	Sede San Martín
Primera Evaluación de Seguimiento	15/04/2016	11/04/2016	15/04/2016
Primera Evaluación Parcial	29/04/2016	25/04/2016	29/04/2016
Segunda Evaluación de Seguimiento	20/05/2016	16/05/2016	20/05/2016
Segunda Evaluación Parcial	03/06/2016	30/05/2016	03/06/2016
Recuperatorio	14/06/2016	13/06/2016	16/06/2016
Evaluación Global	21/06/2016	21/06/2016	23/06/2016

CONDICIONES DE REGULARIDAD TRAS EL CURSADO

Para obtener la condición de alumno regular en la asignatura, el alumno debe cumplir con:

- ✓ Asistencia obligatoria al 80 % de las clases teórico – prácticas.
- ✓ Aprobación de las instancias de evaluación de acuerdo a lo descripto en el punto anterior.
- ✓ Presentación de la carpeta completa de Trabajos Prácticos.
- ✓ Elaboración y presentación del Trabajo Integrador de Conocimientos.

Aquel alumno que no cumpla con estas condiciones quedará en calidad de alumno Libre.

SISTEMA DE APROBACIÓN DE LA ASIGNATURA

Habiendo cumplido las condiciones especificadas para obtener la regularidad de la asignatura, el alumno está en condiciones de rendir un examen final para lograr la aprobación de la misma.

Para el examen final, el alumno debe presentarse con el Trabajo Integrador de Conocimientos, ya que éste forma parte de esta instancia de evaluación, así como también de la carpeta completa y aprobada de Trabajos Prácticos. El examen final es oral y teórico-práctico. Se evalúan la totalidad de los temas desarrollados durante el cursado, independientemente que se hayan evaluado o no en las evaluaciones parciales. Esta instancia de evaluación está planteada como una actividad de síntesis e integradora de los contenidos. La condición de aprobación implica el dominio de los contenidos conceptuales y procedimentales de todas las unidades temáticas del programa de la asignatura, así como también de las aplicaciones prácticas y la articulación de contenidos entre sí, trabajados durante el cursado.

El alumno Libre debe rendir un examen final en la segunda fecha de cada llamado. Dicho examen consta de una evaluación escrita que se debe aprobar con un mínimo de 60 puntos y luego una evaluación oral.

GUÍA DE TRABAJOS PRÁCTICOS

Guía de Trabajo Nº 1

1. Demuestre que:
   Si S es un conjunto de uno o más vectores de un espacio vectorial *V*, entonces S es un *subespacio* de *V* sí y sólo sí se cumplen las siguientes condiciones:

   a) Si **u** ε *S* y **v** ε S, entonces **u**+**v** ε *S*.
   b) Si **u** ε S y k es un escalar, entonces k**u** ε *S*.

2. Determine, justificando su respuesta, si los siguientes conjuntos son *subespacios* de R^3:
   a) $S_1=\{(x, y, z) \in R^3 / x = z = 0\}$
   b) $S_2=\{(x, y, z) \in R^3 / x + 2y - z = 0\}$
   c) $S_3=\{(x, y, z) \in R^3 / x + 3y + 5z - 6 = 0\}$
   d) $S_4=\{(x, y, z) \in R^3 / (x,y,z) = t\,(1,-1,1),\ t \in R\}$
   e) $S_5=\{(x, y, z) \in R^3 / (x,y,z) = t\,(2,1,-2) + (2,0,3),\ t \in R\}$

3. a) Defina conjunto de vectores *linealmente independiente* (LI) en un espacio vectorial *V*.
   b) Enuncie y demuestre una de las propiedades de los conjuntos de vectores *linealmente independientes*.

4. a) Defina conjunto de vectores *linealmente dependiente* (LD) en un espacio vectorial *V*.
   b) Enuncie y demuestre una de las propiedades de los conjuntos de vectores *linealmente dependientes*.

5. Sean $\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, ..., \mathbf{v_n}$, un conjunto de vectores linealmente independientes de un espacio vectorial *V*.
   Demuestre que cualquier vector de *V* se puede escribir como una única combinación lineal de ellos.

6. Demuestre que todo conjunto de n vectores linealmente independientes en R^n genera a R^n.

7. Determine el espacio generado por:
   a) {(2,1,-3)}
   b) {(2,1,-3), (1,0,2)}
   c) {(2,1,-3), (1,0,2),(4,0,0)}

8. Indique una *base* y la *dimensión* de los *subespacios* vectoriales del ejercicio 2.

9. Dados los vectores **a** = (2,2), **b** = (1,4), **c** = (-2,0)
   a) Evalúe las coordenadas del vector **u** = **a** +2 **b** + **c** en la base B = { **a** ; **c** }
   b) Represente gráficamente los vectores.
   c) Interprete gráfica y analíticamente $(\mathbf{u})_B$
   d) Indique, justificando su respuesta, si los vectores **b** y **u** forman una base de R^2.

10. A partir de las siguientes palabras claves, elabore un *mapa conceptual*, distribuyendo en la parte más alta los conceptos más generales, y en la parte más baja los más específicos, enlazándolos con líneas y explicitando el sentido de cada línea de enlace.

EV – SEV – CL – conjunto LD – conjunto LI –
espacio generado – conjunto generador – base – dimensión.

11. Indique verdadero (V) o falso (F) según corresponda:

a) Todo subespacio vectorial es espacio vectorial.
b) Todo subconjunto de R^2 es subespacio de R^2.
c) Todo subespacio de R^n tiene dimensión $\leq$ n
d) Todas las bases de un espacio vectorial tienen el mismo número de vectores.
e) El vector **0** es linealmente independiente.
f) Todo conjunto de n vectores LI en R^n es una base de R^n.
g) Si el espacio vectorial V es de dimensión n, todo conjunto de vectores de V que es LI tiene como mínimo n vectores.
h) Un conjunto de n vectores en R^m siempre es LD si n > m.
i) Si los vectores columnas de A son LD, entonces det (A) $\neq$ 0.
j) Todo conjunto de n vectores LI en R^n genera a R^n.
k) Sea dim V = n y un conjunto de m vectores LI en V, entonces m>n.
l) Si V es un espacio vectorial de dimensión n, entonces n vectores cualesquiera de V linealmente independientes constituyen una base de V.

Guía de Trabajo Nº 2

1. Demuestre, usando álgebra vectorial, el *teorema de las tres perpendiculares*:

Si una recta es perpendicular a un plano, y una recta de ese plano que pase por el pie, es perpendicular a otra recta del mismo plano, esta última es perpendicular a la recta determinada por un punto cualquiera de la primera y la intersección de las otras dos.

2. a) Demuestre que el vector proyección **w** de un vector dado **u** sobre la dirección de otro vector dado **v** no nulo, está dado por: $\mathbf{w} = \dfrac{\mathbf{u.v}}{\|\mathbf{v}\|}\dfrac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|}$

b) Dados los vectores **a** = (1,2), **b** = (1,-1), **c** = (-6,2) determine el vector proyección del vector **c** sobre la dirección del vector 2**a** + **b**

c) Represente gráficamente todos los vectores del inciso anterior.

d) Indique, justificando su respuesta, si { **a** , **b** , 2**a** - **b** } y { **c** , **b** } son cada uno de ellos, conjuntos de vectores LD o LI.

3. Demuestre que si **u** y **v** son vectores ortogonales en R^n con producto euclidiano interior, se cumple el teorema de Pitágoras generalizado.

4. La columna de una antena de 5 m de altura está colocada sobre el eje z. Está sostenida por tres tensores que parten del extremo superior y se dirigen a los puntos
P_1(–5 m, –5 m, 0), P_2(0, 5 m, 0) y P_3(10 m, –5 m, 0). Los tensores ejercen sobre la columna una fuerza de 600 N, hacia abajo.
   a) Demuestre que los tensores son mutuamente perpendiculares.
   b) Determine la proyección del vector fuerza **F** en cada uno de ellos.
   c) Verifique que se cumple el Teorema de Pitágoras en R^3, para las componentes ortogonales del vector **F** en las direcciones de los tensores.

5. Dado el vector **u** = (2,-1,1) Encuentre el *subespacio* de R^3 formado por los vectores ortogonales a **u**. Interprete geométricamente.

6. a) Sea { **u, v** } un *conjunto ortonormal* de vectores en R^n con producto euclidiano interior
   i) Evalúe $<(\mathbf{u} + \mathbf{v}) , (\mathbf{u} + \mathbf{v})>$
   ii) Evalúe $<(\mathbf{u} + \mathbf{v}) , (\mathbf{u} - \mathbf{v})>$
   iii) Muestre que $\|\mathbf{u}-\mathbf{v}\| = \sqrt{2}$

   b) Indique, justificando su respuesta, si los siguientes conjuntos son o no *conjuntos ortonormales.* En caso de serlo, verifique los resultados obtenidos en el inciso a):

$$A_1 = \{(1, 0, 0); (0,-1, 0)\} \; ; \; A_2 = \{(1, 1); (-1, 1)\} \; ; \; A_3 = \{(-4/5, 0, 3/5); (3/5, 0, 4/5)\}$$

7. Demuestre que, si $\{\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, ..., \mathbf{v_n}\}$ es un conjunto ortogonal de vectores no nulos en R^n con el producto euclidiano interior, entonces es conjunto linealmente independiente.

8. Sea B = $\{\mathbf{u_1}, \mathbf{u_2}, ..., \mathbf{u_n}\}$ una *base ortonormal* (BON) de R^n y sea $\mathbf{v} \in R^n$**.** Demuestre que,

$$\mathbf{v} = (\mathbf{v} \,.\, \mathbf{u_1})\, \mathbf{u_1} + (\mathbf{v} \,.\, \mathbf{u_2})\, \mathbf{u_2} + ... + (\mathbf{v} \,.\, \mathbf{u_n})\, \mathbf{u_n}$$

9. Dados los vectores $\mathbf{u} = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$, $\mathbf{v} = (-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$
   a) Indique, justificando su respuesta, si { **u** ; **v** } es o no una *base ortonormal* (BON) de R^2.
   b) Determine las coordenadas del vector **w** = (2,6) en la base B = { **u** ; **v** }, usando el resultado del ejercicio 8.
   c) Represente gráficamente todos los vectores.

10. a) Verifique que B = {**u**, **v**, **w**} es BON para R^3 con el producto euclidiano interior, siendo:

$$\mathbf{u} = (0, 1, 0) \; ; \; \mathbf{v} = (-4/5, 0, 3/5) \; ; \; \mathbf{w} = (3/5, 0, 4/5)$$

   b) Determine las coordenadas de **r** = (2,2,2) en la base B, usando el resultado del ejercicio 8.
   c) Evalúe la proyección ortogonal de **r** en la dirección del vector **v**.

11. a) Verifique que la matriz Q es *matriz ortogonal*:

$$Q = \begin{bmatrix} \cos\theta & -sen\theta \\ sen\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

b) Calcule $Q.U = U^{`}$, siendo $U = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ y $U^{`} = \begin{bmatrix} x^{`} \\ y^{`} \end{bmatrix}$

c) Verifique que la multiplicación por la matriz ortogonal preserva la longitud. Es decir,

$\|QU\| = \|U\|$

d) Interprete geométricamente.

Guía de Trabajo Nº 3

1. Enuncie y demuestre las propiedades del *producto vectorial* o *producto cruz* de dos vectores de R^3.

2. Demuestre que el área de un paralelogramo con vectores **u** y **v** como lados adyacentes está dada por:

$$A = \|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\| = \|\mathbf{v} \times \mathbf{u}\|$$

3. Sean los vectores **u** = (1, -1, 2); **v** = (0, 1, -1) :
a) Determine las componentes del vector **w** tal que **w** es perpendicular a los vectores **u** y **v** y el módulo de **w** es igual a 3.
b) Calcule el área del paralelogramo con vectores **u** y **v** como lados adyacentes.

4. Dados los vectores **a** = (1,2,3), **b** = (3,-2,1), **c** = **i** + 3**j** –6 **k** :
a) Determine el vector **v**, sabiendo que **v** es perpendicular a los vectores **a** y **b**, y satisface la condición **v. c** = 40
b) Indique, justificando su respuesta, si los vectores **a**, **b** y **v** forman una base de R^3.

5. El producto vectorial entre dos vectores de R^3 puede reiterarse multiplicando vectorialmente por otro vector. Esta operación se llama *doble producto vectorial*. Resuelva el siguiente doble producto vectorial y verifique que el vector que resulta es perpendicular al vector **a** y al vector (**b** x **c**):

d = **a** x (**b** x **c**), siendo **a** = (1, 2, 1), **b** = (0, 3, 2) y **c** = (2, 0, 3).

6. El *vector momento de una fuerza* se define como $\mathbf{M_0}$ = **OP** x **F**, siendo **OP** el vector posición del punto de aplicación de la fuerza.
a) Encuentre el momento de la fuerza **F**=(20, 40, 50) N, aplicada en el punto P(2, 3, 2) m. b) Verifique que el vector momento obtenido es perpendicular tanto a **F** como a **OP**.

7. Una fuerza puede trasladarse sobre su recta de acción. Teniendo en cuenta ello, demuestre que el vector momento de fuerza no depende del punto de aplicación de la misma.

8. Se llama *producto mixto* de tres vectores **u**, **v** y **w** al producto escalar de **u** x **v** por **w**.
Dados los vectores **u**, **v** y **w** expresados como:

$$\mathbf{u} = u_1\breve{\mathbf{i}} + u_2\breve{\mathbf{j}} + u_3\breve{\mathbf{k}};$$
$$\mathbf{v} = v_1\breve{\mathbf{i}} + v_2\breve{\mathbf{j}} + v_3\breve{\mathbf{k}};$$
$$\mathbf{w} = w_1\breve{\mathbf{i}} + w_2\breve{\mathbf{j}} + w_3\breve{\mathbf{k}};$$

i. Evalúe el producto mixto (**u** x **v**).**w**

ii. Verifique que el resultado anterior es precisamente el desarrollo del determinante formado por las componentes de los tres vectores:

$$(\mathbf{u}\times\mathbf{v}).\mathbf{w} = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$$

iii. ¿A qué es igual el producto mixto de tres vectores paralelos a un mismo plano?

9. Demuestre que si **u**, **v** y **w** son tres vectores que no están situados en el mismo plano, el valor absoluto del producto mixto (**u** *x* **v**).**w**, es igual al *volumen del paralelepípedo* construído sobre los mismos, una vez llevados a un origen común.

10. Dados los puntos A(0, 1, 1), B(–2, 1, 1), C(4, 1, 0) y D(3, 5, 2):
a) Calcule el volumen del prisma de base triangular de aristas AB, AC y AD.
b) Indique, justificando su respuesta, si {**AB**, **AC**, **AD**} es conjunto LD o LI.

11. a) Sean A, B, C y D, 4 puntos del espacio que determinan un tetraedro. Determine una expresión que permita evaluar vectorialmente el volumen del tetraedro.
b) Calcule el volumen del tetraedro de vértices A(0,0,0); B(0,0,1); C(1,2,3); D(2,3,0). Represente gráficamente.

12. a) Sean $\mathbf{b_1}$ y $\mathbf{b_2}$ dos vectores no nulos, no colineales de R^3 Si $\mathbf{u}$ = (u_1 , u_2 , u_3) es un vector unitario que biseca el ángulo entre b_1 y b_2 , demuestre que:

$$\left(\frac{\mathbf{b_1}}{\|\mathbf{b_1}\|} - \frac{\mathbf{b_2}}{\|\mathbf{b_2}\|}\right).\mathbf{u} = 0$$
$$\mathbf{u}.(\mathbf{b_1}\times\mathbf{b_2}) = 0$$

b) Indique, justificando su respuesta, si los vectores $\mathbf{u}$, $\mathbf{b_1}$ y $\mathbf{b_2}$ forman una base de R^3.

13. Vincule los conceptos de dependencia e independencia lineal con las operaciones entre vectores : producto escalar, producto vectorial y producto mixto.

Guía de Trabajo Nº 4

1. Determine las distintas formas de la ecuación de un *plano* en R^3 de vector normal $\mathbf{n}_\pi$ (no nulo) y que pasa por el punto P_0 (x_0, y_0, z_0): ecuación vectorial, forma punto-normal de la ecuación del plano, ecuación cartesiana general, ecuación vectorial paramétrica y la forma segmentaria de la ecuación del plano.

2. Dada la *ecuación general cartesiana* del plano: Ax+By+Cz+D = 0, complete las siguientes expresiones:

a) Si D=0:	Ax+By+Cz= 0	El plano pasa por ....
b) Si A = B = 0:	Cz+D = 0	El plano es paralelo al plano ....
c) Si A = C = 0:	By+D = 0	El plano es paralelo al plano ....
d) Si B = C = 0:	Ax+D = 0	El plano es paralelo al plano ....
e) Si A=0:	By+Cz+D = 0	El plano es perpendicular al plano ....
f) Si B=0:	Ax+ Cz+D = 0	El plano es perpendicular al plano ....
g) Si C=0:	Ax+By+ D = 0	El plano es perpendicular al plano ....

3. Determine la ecuación general cartesiana de los siguientes planos:
   a) Que pasa por el punto P (2, 1,3) y es perpendicular al vector (2, -2, 3)
   b) Que pasa por los puntos P (2, -3,1), Q (1, 2, 1) y R (0, 1, 4)
   c) Que pasa por el punto R (2, 1, -1) y es paralelo al plano 3x-2z = 9

4. a) Encuentre la *ecuación vectorial paramétrica* y *cartesianas paramétricas* del plano que es paralelo a los vectores **u** = (1,2,1) y **v** = (0,-3,2) y pasa por el punto Q (2,0,4).
   b) Eliminando los parámetros de las ecuaciones cartesianas paramétricas, determine la ecuación cartesiana general del plano.
   c) Verifique la respuesta del inciso anterior trabajando con el vector normal al plano.

5. a) Deduzca una fórmula para determinar la *distancia* más corta del punto Q (x_Q, y_Q, z_Q) al plano de ecuación: Ax+By+Cz+D = 0
   b) Calcule la distancia del punto Q (1,1,6) al plano 2x - 3y + z - 2 = 0

6. a) Calcule la distancia desde el punto A(1, 3, 3) hasta el plano de ecuación:
$$OP = (3, 2, 4) + \mu\,(1, 2, 1) + \beta\,(3, 2, 4). \qquad \mu, \beta \in R$$
   b) Encuentre las ecuaciones de los planos que disten 3 unidades del plano dado.

7. a) Demuestre que la ecuación vectorial del plano determinado por tres puntos no alineados P_1 (x_1, y_1, z_1), P_2 (x_2, y_2, z_2) y P_3 (x_3, y_3, z_3) es:
$$\mathbf{P_1 P}\,.\,(\mathbf{P_1 P_2} \times \mathbf{P_1 P_3}) = 0$$
   b) Halle la ecuación vectorial y cartesiana del plano determinado por los puntos
$$P_1\,(2,1,3);\ P_2\,(1,3,2) \text{ y } P_3\,(-1,2,4)$$

8. Dados dos planos: π_1: $A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0$

π_2: $A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 = 0$

Demuestre que: $A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 + k\,(A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2) = 0 \quad k \in R$, es la ecuación de la *familia reducida de planos* que pasa por la intersección de π_1 y π_2

9. a) Determine la ecuación de la *familia de planos* que pasa por la intersección de los planos de ecuaciones:

$$\pi_1: 3x + y - 2z + 2 = 0 \quad ; \quad \pi_2: x - 3y - z - 1 = 0$$

b) Determine la ecuación del plano π_3 que pertenece a la familia de planos del inciso anterior y pasa por el punto R (1,1,0).
c) Evalúe el ángulo que forma π_3 con π_1 y el ángulo que forma π_3 con π_2.

10. Halle la ecuación del plano que pasa por la intersección de los planos de ecuaciones:

$$\pi_1: 3x + y - 2z + 2 = 0 \quad ; \quad \pi_2: x - 3y - z + 3 = 0$$

y es perpendicular al plano *xy*.

11. a) Aplique el resultado del problema 12 de la Guía de Trabajo 3, para determinar un vector unitario que biseque el ángulo que forman $\mathbf{n_1} = (1,1,1)$ y $\mathbf{n_2} = (0,1,0)$.
b) Encuentre una ecuación del plano que biseca los planos $x + y + z = 3$ y al plano *xz*.
c) Determine ecuaciones de planos bisectores de los planos coordenados. Justifique su respuesta.

Guía de Trabajo Nº 5

1. *Rectas en* R^3. Determine las distintas formas de la ecuación de una recta en R^3 de vector director $\mathbf{d_L} = (a,b,c)$ (no nulo) y que pasa por el punto $P_0\,(x_0, y_0, z_0)$.

2. a) Halle la ecuación vectorial paramétrica, cartesianas paramétricas y simétricas de la recta L_1 que pasa por el punto Q(2,2,-2) y es paralela al vector $\mathbf{v} = (2,-1,3)$.
b) Halle su intersección con los planos coordenados;
c) Encuentre dos puntos de la recta L_1, distintos a los determinados en el inciso anterior;
d) Determine el ángulo que forma la recta L_1 con la recta: $L_2 : x = 4 - 2\,t,\ \ y = 3 + 2\,t,$
$z = -7 + 3\,t\ ,\ \ t \in R$.

3. a) Encuentre una expresión que permita calcular la distancia entre un punto y una recta en R^3. Justifique su desarrollo.
b) Calcule la distancia de la recta L_1 del ejercicio 2, al punto M (4, –1, 3).

4. *Rectas en* R^2. a) Determine las distintas formas de la ecuación de una recta en R^2 de vector director $\mathbf{d_L} = (a,b)$ (no nulo) y que pasa por el punto $P_0\,(x_0, y_0)$.
b) Halle la ecuación vectorial paramétrica de la recta que pasa por el punto A(2,-1) y es paralela a la recta determinada por los puntos (3,1) y (-4,2). Represente gráficamente.

5. Halle la ecuación vectorial paramétrica de la recta que pasa por el punto Q(1, 1) y es perpendicular a la recta L_1: $3x + y - 6 = 0$. Represente gráficamente.

6. Sean dos rectas no paralelas en R^2, L_1: $A_1 x + B_1 y + C_1 = 0$ y L_2: $A_2 x + B_2 y + C_2 = 0$
Demuestre que: $A_1 x + B_1 y + C_1 + k (A_2 x + B_2 y + C_2) = 0$, $k \in R$, es la ecuación de la *familia reducida* de rectas que pasan por la intersección de L_1 y L_2.

7. *Familias de rectas*:
a) Obtenga la ecuación de la familia de rectas que tiene ordenada al origen b = –4.
b) Calcule el ángulo entre las rectas L_1: $3x - 3y + 1 = 0$ y L_2: $x = -y - 3$
c) Encuentre la ecuación de la familia de rectas que pasan por la intersección de las dos rectas dadas en el inciso anterior. d) Obtenga la ecuación de la recta perteneciente a la familia de rectas del inciso anterior, que pasa por el origen de coordenadas. e) Represente gráficamente.

8. a) Determine un procedimiento que permita calcular la distancia entre dos rectas paralelas en R^2, L_1: $A_1 x + B_1 y + C_1 = 0$ y L_2: $A_2 x + B_2 y + C_2 = 0$. Justifique su procedimiento.
b) Determine la distancia entre las rectas L_1: $2x + 3y - 5 = 0$ y L_2: $2x + 3y - 8 = 0$

9. a) Indique un procedimiento que permita determinar si dos rectas dadas en R^3, son paralelas, secantes (se cortan en un punto), o alabeadas.
b) Indique un procedimiento que permita calcular la distancia ente dos rectas dadas en R^3. Justifique su respuesta.

10. Dadas las rectas: $\begin{cases} x = 2 - 2t \\ y = -1 + 2t \ , \ t \in R \\ z = -1 + 4t \end{cases}$ $\quad L_2 : \begin{cases} -x + y + 1 = 0 \\ -6y + 3z - 3 = 0 \end{cases}$

a) Encuentre las ecuaciones simétricas de la recta L_2 e identifique los números directores.
b) Indique justificando su respuesta, si las rectas dadas son paralelas, secantes (se cortan en un punto) o alabeadas.
c) Determine la ecuación de la recta L_3 que es perpendicular simultáneamente a las rectas L_1 y L_2 y que pasa por el punto Q(1,3,-4)
d) Encuentre la proyección del punto Q(2,2,2) sobre el plano $2x + y - z + 6 = 0$ paralela a la dirección dada por el vector **v** = (1,1,-2).

11. Dadas las siguientes rectas:
L_1: **OP**= (1,1,-1) + t_1 (2,3,1), $t_1 \in$ R y L_2: **OP**= (–1,–2,–2) + t_2 (1,4,2) ; $t_2 \in R$
a) Demuestre que las rectas L_1 y L_2 se cortan en un punto.
b) Halle las coordenadas del punto de intersección.
c) Determine la ecuación del plano que ellas definen.
d) Calcule el ángulo que forman las dos rectas.

12. Dado el plano $\pi_1 : 2x - y + z + 3 = 0$
a) Escriba la ecuación vectorial paramétrica de la recta L_1 que es perpendicular al plano π_1 y pasa por el punto Q(2,-1,3).
b) Determine, justificando su respuesta, si la recta L_2: (x,y,z) = (0,1,1) + k (2,0,-4) , $k \in R$, y el plano π_1 son paralelos, o se cortan en un punto, o la recta está contenida en el plano.

Guía de Trabajo Nº 6

1. Determine las distintas formas de la ecuación de una *circunferencia* de radio r y centro C(h,k).

2. Halle la ecuación de la circunferencia cuyo centro es (3, –2) y pasa por el punto A(3, 7). Determine además la ecuación en su forma vectorial paramétrica.

3. Halle la ecuación general de la circunferencia que pasa por los puntos A(0, 0), B(2, 3) y C(5, 1). Represente gráficamente.

4. Halle la ecuación de la circunferencia que pasa por el punto (–3, 2) y tiene su centro en la intersección de las rectas L_1: $3x – y + 15 = 0$ y L_2: $4x + y + 13 = 0$. Represente gráficamente.

5. Determine analíticamente la ecuación de la circunferencia cuyo centro es el punto C(4, 3) y es tangente a la recta L: $3x – 4y + 1 = 0$. Represente gráficamente.

6. Halle la ecuación de las rectas tangentes a la circunferencia $4x^2 + 4y^2 + 8x + 4y – 47 = 0$ y que tengan pendiente –3/2. Represente gráficamente.

7. Dadas las siguientes ecuaciones cuadráticas: a) $x^2 + y^2 + 4x – 6y + 9 = 0$
b) $2x^2 + 2y^2 – 2x – 10y – 59 = 0$
Efectúe la traslación necesaria para que la misma carezca de términos lineales. Identifique la cónica resultante. Represente e indique sus elementos fundamentales.

8. Dadas las ecuaciones: C_1: $x^2 + y^2 + D_1x + E_1y + F_1 = 0$
C_2: $x^2 + y^2 + D_2x + E_2y + F_2 = 0$
a) Demuestre que: $x^2 + y^2 + D_1x + E_1y + F_1 + k\,(x^2 + y^2 + D_2x + E_2y + F_2) = 0$, $k \in R$,
es la ecuación de la *familia reducida de circunferencias* que pasan por la intersección de C_1 y C_2
b) Demuestre que para *k*=-1 se obtiene una recta que es perpendicular a la recta que une los centros de las dos circunferencias dadas.

9. Halle la ecuación del eje radical de las circunferencias C_1: $x^2 + y^2 - 2x - 10y + 10 = 0$ y C_2: $4x^2 + 4y^2 - 32x - 12y + 36 = 0$, y demuestre que es perpendicular a la recta que une sus centros. Represente gráficamente.

10. Con la utilización de software apropiado, verifique los resultados de dos ejercicios a su elección de la presente Guía.

Guía de Trabajo Nº 7

1. Defina *parábola* como lugar geométrico.

2. Deduzca la ecuación de la parábola de vértice en V(0,0) y determine todos sus elementos, si:

a) el eje focal coincide con el eje x.   b) el eje focal coincide con el eje y.

3. Deduzca la ecuación de la parábola de vértice en V(h,k) y determine todos sus elementos, si:
a) el eje focal es paralelo al eje x. b) el eje focal es paralelo al eje y.

4. Defina *lado recto* de una parábola. Determine su longitud.

5. Halle la ecuación de la parábola cuyo vértice es V(–4, 3) y su foco es F(–1, 3). Represente gráficamente.

6. Las torres de una línea de alta tensión están separadas 100 m y tienen una altura de 16 metros. Los cables de la línea no deben estar a menos de 6 m sobre el nivel de suelo. Suponiendo que estos cables forman una parábola, halle la ecuación de la misma. Encuentre la altura de un punto situado a 25 m del vértice. Represente gráficamente.

7. El cable de suspensión de un puente colgante puede aproximarse mediante la forma de un arco parabólico. Las columnas que lo soportan están separadas 500 m y tienen una altura de 60 m. El punto más bajo del cable queda a una altura de 10 m sobre la calzada del puente. Determine la ecuación de la parábola , considerando como eje de abscisas la horizontal que define el puente, y como eje de ordenadas el eje de simetría de la parábola. Calcule la altura de un punto situado a 90 m del centro del puente. Represente gráficamente.

8. Halle desde el punto R(–1, –1) las dos rectas tangentes a la parábola $y^2 - x + 4y + 6 = 0$.
Calcule el ángulo que determinan estas rectas. Represente gráficamente.

9. Dada la ecuación cuadrática $y^2 - 8x - 2y + 9 = 0$

a) Identifique la cónica y todos sus elementos.
b) Determine la ecuación de la recta L_2 tangente a la cónica y que además es paralela a la recta $L_1 : x - y + 4 = 0$
c) Grafique la cónica y las rectas L_1 y L_2
d) ¿Cuál es el valor de la mínima distancia de la recta L_1 a la cónica dada?

Indique *ecuaciones paramétricas* de la parábola de vértice V(1,1), parámetro p=4 y eje focal paralelo al eje *x*.

10. Determine la *familia de parábolas* de eje focal coincidente con el eje *y* y cuyo vértice es el punto V(0,4).

11. Sea L_T la recta tangente a la parábola en un punto P_0 (x_0 , y_0) cualquiera de la misma. Demuestre que los ángulos α y β que dicha recta determina con el segmento FP_0 y con la recta paralela al eje de simetría que pasa por P_0 , son congruentes.

12. Con la utilización de software apropiado, verifique los resultados de dos ejercicios a su elección de la presente Guía.

Guía de Trabajo Nº 8

1. Defina *elipse* como lugar geométrico.

2. Deduzca la ecuación de la elipse de centro en C(0,0) y determine todos sus elementos, si:
   a) el eje focal coincide con el eje x. b) el eje focal coincide con el eje y.

3. Deduzca la ecuación de la elipse de centro en C(h,k) y determine todos sus elementos, si:
   a) el eje focal es paralelo al eje x. b) el eje focal es paralelo al eje y.

4. Defina *lado recto* de una elipse. Determine su longitud.

5. Halle la ecuación del lugar geométrico de los puntos P(x, y) cuya suma de sus distancias a los puntos fijos (4, 3) y (–2, 3) sea igual a 10. Represente gráficamente.

6. Una carretera de dos carriles es cruzada por un puente cuyo arco tiene la forma de media elipse. En el centro del arco la altura es de 6 m. El ancho total del arco elíptico es de 18 m. a) Determine la ecuación de la elipse que describe este puente. b) Los bordes de los carriles están indicados por líneas que se encuentran a 2.5 m de los extremos del arco. ¿Cuál es la altura a la que se encuentra el puente en correspondencia con estas líneas?

7. Dada la ecuación cuadrática: $3x^2 + y^2 + 4x - 2y - 3 = 0$
   a) Identifique la cónica y todos sus elementos.
   b) Halle las ecuaciones de las rectas tangentes a la cónica, y que son perpendiculares a la recta L: $x + y - 5 = 0$.
   c) Represente gráficamente.

8. a) Dada la ecuación de la cónica $\frac{x^2}{18}+\frac{y^2}{9}=1$, determine el ángulo que forma la recta L_1: $x - 2y + 6 = 0$ con la recta L_2, siendo la recta L_2 tangente a la cónica en el punto S de abscisa 4 y ordenada positiva.
   b) Grafique la cónica y las rectas L_1 y L_2 .

9. Indique *ecuaciones paramétricas* de la elipse de centro C(-1,1), semiejes 6 y 4, y eje focal paralelo al eje *y*.

10. Determine la *familia de elipses* cuyos focos son: $F_1(3,-2)$ y $F_2(3,6)$.

11. Sea L_T la recta tangente a la elipse en un punto P_0 (x_0 , y_0) cualquiera de la misma. Demuestre que los ángulos α y β que dicha recta forma con los segmentos determinados por el punto P_0 y cada uno de los focos de la elipse, son congruentes. 13. Con la utilización de software apropiado, verifique los resultados de dos ejercicios a su elección de la presente Guía.

Guía de Trabajo Nº 9

1. Defina *hipérbola* como lugar geométrico.

2. Deduzca la ecuación de la hipérbola de centro en C(0,0) y determine todos sus elementos, si:
a) el eje focal coincide con el eje x. b) el eje focal coincide con el eje y.

3. Deduzca la ecuación de la hipérbola de centro en C(h,k) y determine todos sus elementos, si:
a) el eje focal es paralelo al eje x. b) el eje focal es paralelo al eje y.

4. Defina *lado recto* de una hipérbola. Determine su longitud.

5. El centro de una hipérbola es el punto C(4, 2), uno de sus focos es F(–6, 2) y su excentricidad de es $e = 5/4$.
a) Halle su ecuación general e indique todos sus elementos.
b) Obtenga los puntos de intersección con el eje x.
c) Represente gráficamente.

6. a) Halle la ecuación de la hipérbola cuyo centro es el origen de coordenadas, pasa por el punto Q (3, –1), su eje focal es el eje x y una de sus asíntotas es la recta $2x + 3\sqrt{2}\,y = 0$.
b) Represente gráficamente.

7. Dada la ecuación cuadrática: $9x^2 - 4y^2 - 18x - 16y + 29 = 0$
a) Identifique la cónica y todos sus elementos.
b) Determine el ángulo que forman entre sí las rectas que son tangentes a la hipérbola en los puntos en los que ésta intersecta al eje *y*.
c) Grafique la cónica, identificando todos sus elementos, y las rectas del inciso anterior.

8. a) Dada la ecuación de la cónica $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{3} = 1$, determine el ángulo que forma la recta $L_1: 2x - y + 4 = 0$ con la recta L_2, siendo la recta L_2 tangente a la cónica en el punto Q de abscisa – 4 y ordenada positiva.
b) Grafique la cónica y las rectas L_1 y L_2.

9. Indique *ecuaciones paramétricas* de una hipérbola de centro C(0,1), semiejes 5 y 2 y eje focal paralelo al eje *y*.

10. Determine la *familia de hipérbolas* cuyos vértices son $V_1(1,1)$ y $V_2(1,5)$.

11. Sea L_T la recta tangente a la hipérbola en un punto P_0 (x_0 , y_0) cualquiera de la misma. Se dirige un haz de luz en dirección de uno de los focos, por ejemplo F_1 . Demuestre que el ángulo de incidencia que forma el rayo con la recta tangente en el punto P_0 es congruente con el ángulo de reflexión formado por dicha recta y el segmento determinado por P_0 y el otro foco F_2.

Guía de Trabajo Nº 10

1. Halle la ecuación de la *superficie esférica* de centro C(1,-2,2) y que pasa por el origen de coordenadas.

2. Dada la ecuación de la *superficie esférica*: $x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 4y - 6z - 2 = 0$
   a) Indique las coordenadas del centro y radio .
   b) Determine la ecuación del plano tangente a la esfera en el punto A($\sqrt{3}$ - 1 , 1 , 1) .

3. Dada la ecuación $x^2 - y^2 - 6z = 0$
   a) Determine las intersecciones con los ejes coordenados, con los planos coordenados (trazas) y con planos paralelos a los planos coordenados.
   b) Estudie las condiciones de simetría.
   c) Represente gráficamente.

4. a) Defina *superficie cilíndrica*.
   b) Determine un procedimiento que permita encontrar la ecuación de dicha superficie, dados un vector paralelo a la *generatriz* y la ecuación de la curva *directriz*.

5. Halle la ecuación de la *superficie cilíndrica* de generatriz paralela al vector **v**=(1,3,2) y cuya directriz es: $\begin{cases} y^2 + z^2 = 25 \\ x = 0 \end{cases}$. Represente en forma cualitativa.

6. a) Defina *superficie cónica*.
   b) Determine un procedimiento que permita encontrar la ecuación de dicha superficie, dadas las coordenadas del *vértice* y la ecuación de la curva *directriz*.

7. Halle la ecuación de la *superficie cónica* cuya directriz es: $\begin{cases} x^2 + z^2 = 9 \\ y = 0 \end{cases}$

   y su vértice es el punto V(0,9,0). Represente en forma cualitativa.

8. a) Defina *superficie de revolución.*
   b) Determine un procedimiento que permita encontrar la ecuación de dicha superficie, dada la ecuación de la curva *generatriz y el eje de revolución*.

9. Determine la ecuación de la *superficie de revolución* que tiene por generatriz una elipse de semiejes a=5 y b=2, en el plano xz y eje de revolución el eje x. Represente en forma cualitativa.

10. Con la ayuda de un software apropiado, grafique al menos un ejemplo de cada una de las superficies cuádricas con y sin centro e indique sus correspondientes ecuaciones.

Guía de Trabajo Nº 11

1. Deduzca fórmulas de transformación que expresen coordenadas polares en términos de coordenadas rectangulares y viceversa.

2. Determine la forma polar de las siguientes ecuaciones:

$$y = 3x; \qquad x^2 + y^2 = 36; \qquad x^2 + y^2 - 2x - 15 = 0$$

3. Dada la ecuación expresada en coordenadas polares: $\rho\,(\text{sen}\varphi + \cos\varphi) = 1$, escríbala en coordenadas cartesianas. Determine qué tipo de curva representa y grafique.

4. a) Deduzca la ecuación de una circunferencia de centro $C(\rho_C,\varphi_C)$ y radio r, en coordenadas polares.
   b) Determine las coordenadas polares del centro y el radio de la circunferencia de ecuación: $\rho^2 - 8\rho\cos(\varphi - 60º) + 12 = 0$. Grafique.

5. Deduzca las *ecuaciones polares de las secciones cónicas* para los siguientes casos:
   a) directriz perpendicular al eje polar, a *p* unidades a la izquierda del polo.
   b) directriz perpendicular al eje polar, a *p* unidades a la derecha del polo.
   c) directriz paralela al eje polar, a *p* unidades arriba del eje polar.
   d) directriz paralela al eje polar, a *p* unidades debajo del eje polar.

6. a) Dada las ecuaciones en coordenadas polares, indique para cada una de ellas, de qué cónica se trata, justificando su respuesta:

   (I) $\rho = \dfrac{6}{1+\frac{1}{2}\cos\theta}$ (II) $\rho = \dfrac{12}{2 - sen\theta}$ (III) $\rho = \dfrac{12}{2 - 4sen\theta}$ (IV) $\rho = \dfrac{12}{2 + 4\cos\theta}$

   b) Represente gráficamente las cónicas (I), (II), (III) y (IV), en coordenadas polares, indicando las coordenadas polares del centro y de los focos.

7. Indique las ecuaciones y las gráficas de las siguientes curvas:
   a) Curvas de trébol ; b) Limacon ; c) Lemniscatas.

8. Deduzca fórmulas de transformación que expresen *coordenadas cilíndricas* en términos de coordenadas rectangulares y viceversa.

9. Trace la gráfica de cada una de las siguientes ecuaciones en *coordenadas cilíndricas*, donde *c* es una constante: a) $\rho = c$; b) $\varphi = c$; c) $z = c$

10. Deduzca fórmulas de transformación que expresen *coordenadas esféricas* en términos de coordenadas rectangulares y viceversa.

11. Trace la gráfica de cada una de las siguientes ecuaciones en *coordenadas esféricas*, donde *c* es una constante: a) $\rho = c$; b) $\varphi = c$; c) $\phi = c$

12. Dada la ecuación en *coordenadas cilíndricas*: $\rho\,(4\cos\varphi + 3\text{sen}\varphi) + 5z = 0$
    a) Obtenga la ecuación en *coordenadas cartesianas*.
    b) Obtenga la ecuación en *coordenadas esféricas*.

Guía de Trabajo Nº 12

1. Enuncie y demuestre el *Teorema de los Ejes Principales en R^2*.

2. Indique, justificando su respuesta, qué condiciones deben cumplir los valores propios de la matriz de la forma cuadrática asociada, para cada una de las secciones cónicas.

3. Para cada una de las siguientes ecuaciones:

I) $x^2 + 2\,xy + y^2 - 8\sqrt{2}\,x + 8 = 0$

II) $2x^2 + \sqrt{3}\,xy + y^2 - 4 = 0$

III) $2x^2 - 4\,xy - y^2 + 8 = 0$

a) Indique la cónica que representa a través de los valores propios de la matriz asociada a la forma cuadrática.
b) Encuentre la matriz P que diagonaliza ortogonalmente la matriz de la forma cuadrática.
c) Encuentre la ecuación de la cónica referida al sistema rotado.
d) Calcule el ángulo que han rotado los ejes.
e) Represente gráficamente.

4. Enuncie y demuestre el *Teorema de los Ejes Principales en R^3*.

5. Indique, justificando su respuesta, qué condiciones deben cumplir los valores propios de la matriz de la forma cuadrática asociada, para cada una de las superficies cuádricas.

6. Para cada una de las siguientes ecuaciones:

I) $5x^2 + 3y^2 + 3z^2 + 2xy - 2xz - 2yz - 16x + 4y + 4z + 19 = 0$

II) $-x^2 + yz + 2x - 4z - 5 = 0$

a) Indique la cuádrica que representa a través de los valores propios de la matriz asociada a la forma cuadrática.
b) Encuentre la matriz P que diagonaliza ortogonalmente la matriz de la forma cuadrática.
c) Encuentre la ecuación de la cuádrica referida al sistema rotado.

GUÍA DE TRABAJOS PRÁCTICOS COMPLEMENTARIOS

C1. Sean $\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \ldots, \mathbf{v_n}$, n vectores en R^n y sea A la matriz de nxn cuyas columnas son $\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \ldots, \mathbf{v_n}$ Demuestre que $\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \ldots, \mathbf{v_n}$ son LI sí y sólo sí, la única solución del sistema AX = 0 es la solución trivial X = 0.

C2. Sea A una matriz de nxn. Demuestre que $\det(A) \neq 0$ sí y sólo sí las columnas de A son LI.

C3. a) Determine el *espacio solución* del siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} x+2y-z=0 \\ 3x+6y-3z=0 \end{cases}$$

b) Encuentre una *base* y la *dimensión* del espacio solución.

C4. a) Obtenga un vector **w** tal que **w** = 2**v**, siendo **v** = (4,1,3)
b) Indique una base de R^3 que incluya al vector **v**. Justifique su respuesta.
c) Encuentre las coordenadas de **v** y de **w** en la base del inciso (b).
d) Explique por qué el conjunto de vectores (**v**, **w**, **a**) no es base del espacio, cualquiera sea el vector **a**.

C5. Demuestre, usando álgebra vectorial, que las diagonales de un rombo son perpendiculares.

C6. Sean los vectores **a** = (1, –2, 3) y **b** = (3, 1, 2). Encuentre un vector c, no nulo, que sea combinación lineal de **a** y de **b** y perpendicular al vector **a**. Interprete geométricamente.

C7. Sean los puntos P=(2,1,-1); Q=(3,2,2) y R=(x,1,2) en R^3
a) Encuentre los valores que debe tomar x para que los vectores **PR** y **QR** sean ortogonales.
b) ¿Existe algún valor de x para el cual {**PR**, **QR**} sea una base ortogonal de R^3?. ¿Por qué?

C8. Halle la proyección del vector **a** = (4, –2, –4) sobre la dirección del vector **b** = (–2, 1, 2). Determine además el vector proyección de **a** en la dirección de **b**.

C9. Dos cuerdas, AB y CB, sujetan un cable vertical en B (3,3) que soporta un objeto. Las cuerdas están fijas en los puntos A (0,6) y C (7,7). En el punto B actúa una fuerza vertical hacia abajo de 4 kN.

a) Represente gráficamente e indique las componentes de los vectores ***AB***, ***CB***, y ***F***.
b) Determine las longitudes de ambas cuerdas.
c) Evalúe el vector proyección de ***F*** en la dirección de cada una de las dos cuerdas.

C10. Dados los puntos A (0, 0, 0) m, B (3 , 0 , 6) m, C (- 3 , 0 , 6) m y D (0 , 9 , 0) m, usando vectores y las operaciones apropiadas, evalúe:
a) El área del triángulo de vértices A, B y C.
b) El volumen del prisma de base triangular de aristas AB, AC y AD.
c) Indique, justificando su respuesta, si { **AB**, **AC**, **BC** } es conjunto linealmente dependiente o linealmente independiente.

C11. a) Dados tres vectores **a**, **b** y **c** de R^3 demuestre que:

a x (**b** x **c**) = (**a** . **c**) **b** – (**a** . **b**) **c**

b) Verifique el resultado del inciso anterior para los siguientes vectores:

a = (–2, 1, 4), **b** = (4, 3, –1) y **c** = (0, 2, 4)

C12. Verifique las siguientes expresiones usando propiedades:

a) $(3\mathbf{u} - \mathbf{v}) \times (\mathbf{u} - 2\mathbf{v}) = 5(\mathbf{v} \times \mathbf{u})$

b) $2(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \times \mathbf{w}) = (2\mathbf{v} \times \mathbf{w} \cdot \mathbf{u})$

C13. Dados los planos:

$$\pi_1:\ 2x - y + z - 3 = 0$$
$$\pi_2:\ x - 2z + 6 = 0$$
$$\pi_3:\ (x, y, z) = (3, 0, 1) + t(2, 0, -4) + k(2, 5, 1,) \qquad t, k \in R$$

a) Indique, justificando su respuesta, dos de los planos dados que sean paralelos.

b) Indique, justificando su respuesta, dos de los planos dados que sean perpendiculares.

c) Determine la intersección del plano π_1 con los planos coordenados (trazas).

C14. Dados los planos:

$$\pi_1:\ 2x - y + z + 1 = 0$$
$$\pi_2:\ x + 2y - z - 4 = 0$$

a) Usando el concepto de familia de planos, encuentre la ecuación del plano π_3 que pasa por la intersección de los planos dados y por el punto Q (–1, 1, 1).

b) Determine el ángulo que forman los dos planos dados.

c) Halle la ecuación del plano π_4 normal a los dos planos dados y que pasa por el punto Q. Encuentre el punto de intersección entre estos tres planos.

C15. Dadas las siguientes rectas:

$$L_1: \begin{cases} x = 2 - \lambda \\ y = 1 + 2\lambda \\ z = -4 - \lambda \end{cases} \quad \lambda \in R \qquad\qquad L_2: \begin{cases} 2x + y + z - 1 = 0 \\ x - z = 0 \end{cases}$$

a) Encuentre las ecuaciones simétricas de la recta L_2 e identifique los números directores.
b) Indique justificando su respuesta, si las rectas dadas son paralelas, secantes o alabeadas.
c) Determine la ecuación de un plano paralelo a las rectas L_1 y L_2 y que diste 10 unidades del punto Q(1, 0, 0). ¿Es único dicho plano?

C16. a) Determine la ecuación del plano π que contiene al punto R(2,-1,1) y a la recta L: $(x, y, z) = (2, -1, 0) + t(2, -2, 3),\ \ t \in R$

b) Calcule el ángulo que forma la recta dada L con el plano coordenado *yz*.

C17. Determine la ecuación de la circunferencia que es tangente a la recta L: x + 2y = 3 en el punto Q(-1,2) y el centro está en el eje y. Represente gráficamente.

C18. Halle la ecuación de la circunferencia cuyo centro está sobre la recta 2x + y – 14 = 0 y que pasa por la intersección de las circunferencias C_1: $x^2 + y^2 - 8x - 4y + 11 = 0$ y C_2: $x^2 + y^2 - 4x + 4y - 8 = 0$. Utilice el concepto de familia de circunferencias. Represente gráficamente.

C19. a) Determine la ecuación de la recta L_2 tangente a la parábola $x^2 - 6x + 5y - 11 = 0$ que es perpendicular a la recta L_1 : $-2x + 4y - 3 = 0$

b) Grafique la parábola, identificando sus elementos, y las rectas L_1 y L_2

C20. La órbita de la Tierra alrededor del Sol es una elipse que tiene una excentricidad de aproximadamente 0,017. Sabiendo que la distancia media al Sol es de 150 millones de km, encuentre los radios mayor y menor de la trayectoria.

C21. Un arco de forma semielíptica tiene una amplitud en su base de 20 m. Su altura en el centro es de 9 metros. Seleccione un sistema de coordenadas cartesianas adecuado y determine la altura del puente desde un punto ubicado a 8 m del centro.

C22. Un barco envía una señal de auxilio en el momento en el que se encuentra a 100 millas de la costa. Dos estaciones guardacostas Q y R, ubicadas a 200 millas de distancia entre sí, reciben la señal. A partir de la diferencia entre los tiempos de recepción de la señal, se determina que la nave se encuentra 160 millas más cerca de la estación R que de la estación Q. ¿Dónde está ubicada la embarcación? Grafique.

C23. Con la utilización de software apropiado, verifique los resultados de dos ejercicios a su elección de la Guía de Trabajo Nº 9.

C24. Se desea construir una cubierta de *generatriz semielíptica* para un centro cultural, que cubra un espacio circular de 100 m de diámetro con una altura en el centro de dicho espacio de 40m. Seleccione un sistema de coordenadas adecuado al problema y halle la ecuación cartesiana de la cubierta de dicho centro cultural.

C25. Se desea construir una cubierta de *generatriz parabólica* para un estadio deportivo que cubra un espacio circular de 120 m de diámetro con una altura en el centro de dicho espacio de 36m. Seleccione un sistema de coordenadas adecuado al problema y halle la ecuación cartesiana de la cubierta de dicho estadio.

C26. En coordenadas polares la expresión analítica de cierto lugar geométrico es: $\rho = \dfrac{6}{1 - cos\,\theta}$.

Halle la expresión cartesiana rectangular de la misma e indique el nombre de la curva correspondiente. Represente gráficamente en coordenadas polares.

C27. Dada la ecuación cuadrática:

$$3x^2 - 2xy + 3y^2 - 14x - 6y + 23 = 0$$

Halle un sistema de coordenadas respecto del cual la cónica tenga su forma normal, halle la forma normal, identifique la cónica y grafíquela.