UNIDAD 5: INDUCCIÓN MATEMÁTICA

1. INTRODUCCIÓN

La inducción es el proceso de razonar por el cual se extraen conclusiones a partir del análisis de casos particulares. La deducción, por el contrario, permite extraer conclusiones particulares a partir de casos generales.

En matemática, disciplina deductiva por excelencia, el **razonamiento inductivo** sólo es utilizado en la **fase creativa y de construcción**. Cuando un matemático encuentra ciertos patrones y regularidades al manipular los objetos matemáticos, utiliza el razonamiento inductivo al proponer una conjetura a partir de los casos que ha analizado, pero para demostrar dicha conjetura deberá utilizar necesariamente deducción.

Veamos un ejemplo para clarificar esta situación. Supongamos que un estudiante ha sumado los tres primeros números impares positivos, obteniendo 1+3+5=9, observando que 9 es el cuadrado de 3. Ahora toma un número mayor de sumandos, 6, y obtiene 1+3+5+7+9+11=36, observando que 36 es el cuadrado de 6. Esto puede no ser casualidad, el estudiante sospecha que debe existir algún patrón general e inicia una verificación ordenada:

Con un sumando: $1 = 1 = \mathbf{1^2}$

Con dos sumandos: $1 + 3 = 4 = \mathbf{2^2}$

Con tres sumandos: $1 + 3 + 5 = 9 = \mathbf{3^2}$

Con cuatro sumandos: $1 + 3 + 5 + 7 = 16 = \mathbf{4^2}$

El estudiante emplea el razonamiento inductivo para elaborar una conjetura sobre la suma de los n primeros impares: $\mathbf{1 + 3 + 5 + 7 + \cdots + (2n - 1) = n^2}$, “La suma de los n primeros impares positivos es igual al cuadrado del número de términos”.

Sin embargo, *¿es suficiente la comprobación de algunos casos particulares para asegurar la validez de esta proposición?* **NO**. Se ha comprobado la proposición para $n = 1, ; 2; 3; 4$, pero nada asegura que tal patrón se mantenga. Tampoco se podría asegurar nada aún después de que el estudiante se tome el tiempo de sumar el primer trillón de números impares.

Para poder afirmar que la propiedad es válida para cualquier valor de n se debería comprobar para todos los valores posibles de n. Es aquí donde se introduce el método de demostración conocido como **MÉTODO DE INDUCCIÓN MATEMÁTICA**. El primero en utilizarlo fue el matemático francés Blas Pascal en el siglo XVII, logrando demostrar numerosas propiedades numéricas.

Previo a explicar el Principio o método de inducción Matemática, se introducirán una serie de axiomas útiles que permitirán comprender la demostración del mismo.

1.1. Axiomas de Peano

El concepto primitivo es la idea de sucesor. Es decir, para cada $n \in \mathbb{N}$, el símbolo $n + 1$ se entenderá como el sucesor de dicho número n. Así, se tiene que:

3 es el sucesor de 2, pues 2+1=3

7 es el sucesor de 6, pues 6+1=7

33 es el sucesor de 32, pues 32+1=33

El cuerpo axiomático consiste en los siguientes cinco axiomas:

Ax_1: **1 es un número natural.**

Esto significa que existe al menos un número natural.

Ax_2: **Si $n \in \mathbb{N}$ entonces $n+1 \in \mathbb{N}$.**

Todo número natural tiene un sucesor.

$n+1$ debe ser entendido como el símbolo sucesor de n

Ax_3: **No existe un número natural n tal que su sucesor sea 1.**

Esto significa que $\mathbb{N}$ posee un primer elemento.

Ax_4: **Si $n \in \mathbb{N}$ y $m \in \mathbb{N}$ tal que $n+1=m+1$ entonces $n=m$**

Esto significa que es posible escribir sin ambigüedad $\mathbb{N}=\{1,2,3,\ldots\}$

Ax_5: **Si $\mathbb{S} \subset \mathbb{N}$ es tal que verifica simultáneamente las propiedades:**

- $1 \in \mathbb{S}$
- $n \in \mathbb{S} \Rightarrow n+1 \in \mathbb{S}$

Entonces $\mathbb{S}=\mathbb{N}$

Este último axioma es el de inducción. Es una estrategia para "hacer finito lo infinito". En el presente contexto, se reinterpreta la idea de sucesor, para obtener un método de validación de fórmulas proposicionales definidas en el conjunto de los números naturales.

2. PRINCIPIO DEL BUEN ORDEN

Dados dos números naturales (o enteros positivos) diferentes x, y, se sabe que: $x<y$ o $y<x$. Esto también es cierto si x, y son números racionales o reales. Entonces, ¿qué hace diferente a los naturales o enteros positivos? Supóngase que se trata de expresar el conjunto $\mathbb{N}$ o el subconjunto $\mathbb{Z}^+$de $\mathbb{Z}$, mediante símbolos de desigualdad $>$ y $\geq$. Se observa que es posible definir el conjunto de los elementos positivos de $\mathbb{Z}$ como:

$$\mathbb{Z}^+=\{x \in \mathbb{Z}/x>0\}=\{x \in \mathbb{Z}/x \geq 1\}$$

Sin embargo, cuando se intenta hacer lo mismo con los números racionales y reales se observa que no es posible emplear el símbolo $\geq$ para definirlos:

$$\mathbb{Q}^+=\{x \in \mathbb{Q}/x>0\} \text{ y } \mathbb{R}^+=\{x \in \mathbb{R}/x>0\}$$

El conjunto $\mathbb{N}$ o el subconjunto $\mathbb{Z}^+$de $\mathbb{Z}$, es diferente de $\mathbb{Q}^+$ y $\mathbb{R}^+$ con $\geq$ como se hizo con $\mathbb{Z}^+$**.** El conjunto $\mathbb{N}$ o el subconjunto $\mathbb{Z}^+$de $\mathbb{Z}$ son distintos a los conjuntos $\mathbb{Q}^+$ y $\mathbb{R}^+$ por el hecho de que todo subconjunto no vacío X de $\mathbb{Z}^+$ contiene un entero $a \in X$ tal que $a \leq x$ para todo $x \in X$; esto significa que tiene un elemento menor o mínimo (**Axioma 3**). En cambio, esto no ocurre para los conjuntos $\mathbb{Q}^+$ y $\mathbb{R}^+$, no existe un número racional positivo ni un número real positivo mínimo. Esto da lugar a la siguiente propiedad para los números naturales o enteros positivos:

El principio del buen orden: cualquier subconjunto no vacío de $\mathbb{Z}^+$contiene un elemento mínimo, por lo que se dice que $\mathbb{Z}^+$ es bien ordenado.

3. PRINCIPIO DE INDUCCIÓN FINITA O PRINCIPIO DE INDUCCIÓN MATEMÁTICA

Para todo número natural o entero positivo $\boldsymbol{n}$, sea $\boldsymbol{P(n)}$ un enunciado que depende de $\boldsymbol{n}$. Se supone que se satisfacen las dos condiciones siguientes:

1. $\boldsymbol{P(1)}$ es verdadera
2. Para todo número natural $\boldsymbol{k}$, si $\boldsymbol{P(k)}$ es verdadero $\boldsymbol{P(k+1)}$ es verdadero.

Entonces $\boldsymbol{P(n)}$ es verdadero para todos los números naturales $\boldsymbol{n}$.

Para aplicar este principio, se deben realizar dos pasos:

Paso 1→ Probar que $P(1)$ es verdadero. Independientemente de que parezca sencillo u obvio se debe realizar este paso, ya que existen casos en los que no se cumple este primer análisis. (**Ver ejemplo 3**). Este paso se denomina **Paso Base**.

Paso 2 → Suponer que $P(k)$ es verdadero y usar esta suposición para demostrar que $P(k+1)$ es verdadera.

Tener presente que en este paso 2 no se demuestra que $P(k)$ es verdadera. Sólo se demuestra que si $P(k)$ es verdadera, entonces $P(k+1)$ también lo es. La suposición de que $P(k)$ es verdadera se llama **Paso Inductivo** o **Hipótesis de inducción**. La demostración de que $P(k+1)$ es verdadera se llama **Tesis de inducción**.

Comentario: intuitivamente la idea anterior se conoce con el nombre de: ***Efecto Dominó***. Si se imagina una fila finita de fichas de dominó: dispuestas verticalmente y suficientemente próximas a una cualquiera de las siguientes, entonces si al voltear la primera ficha se provoca el volteamiento de la segunda ficha, por el Principio de Inducción Matemática la fila completa es volteada (ver **Figura 1**).

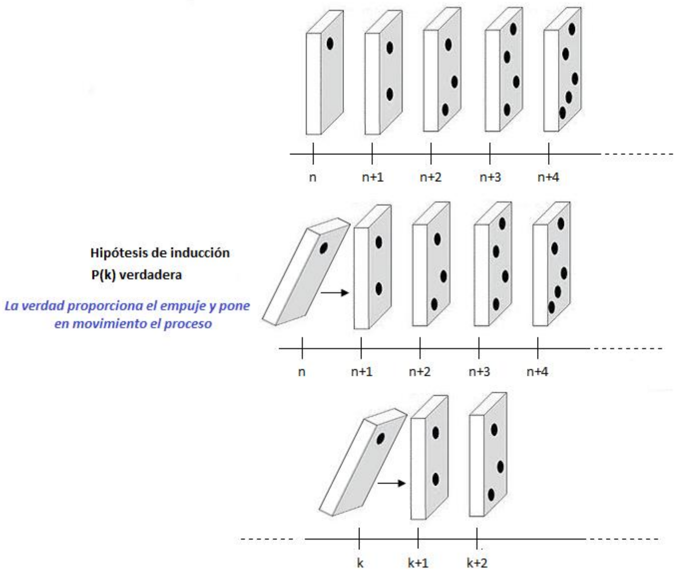

Figura 1. Proceso de Inducción Matemática representado mediante Efecto Dominó

3.1. Demostración del Principio de Inducción Matemática

Hipótesis:

P(1) es verdadera.

P(k) es verdadera para todo $k \in \mathbb{Z}^+$.

Tesis:

P(k+1) es verdadera para todo $k \in \mathbb{Z}^+$.

Demostración

Sea $P(n)$ una proposición abierta que cumple con la hipótesis y sea:

$$F = \{t \in \mathbb{Z}^+ / P(t) es\, falsa\}$$

Se pretende demostrar que $F = \emptyset$ (vacío), así que para obtener una contradicción se supone que $F \neq \emptyset$. Entonces, por el principio del buen orden, F tiene un elemento mínimo p.

Como $P(1)$ es verdadera por hipótesis, $p \neq 1$, por lo que $p > 1$, y en consecuencia, $p - 1 \in \mathbb{Z}^+$. Como $p - 1 \notin F$, se tiene que $P(p-1)$ es verdadera.

Así, $P\big((p-1)+1\big) = P(p)$ es verdadera, lo que contradice que $p \in F$. La contradicción surge de que se había postulado $F \neq \emptyset$. Por tanto, $F = \emptyset$.

3.2. Ejemplos de aplicación del Principio de Inducción

Ejemplo 1: Demostrar que para todo $n \in \mathbb{N}$, se cumple que:

$$\sum_{i=1}^{n}(2i-1) = 1 + 3 + 5 + 7 + \cdots + (2n-1) = n^2$$

$P(n)$: $\sum_{i=1}^{n}(2i-1) = 1 + 3 + 5 + 7 + \cdots + (2n-1) = n^2$

Paso 1 (base): se demuestra que $P(1)$ es verdadera: $(2 * 1 - 1) = 1^2 \Longrightarrow 1 = 1$

Paso 2 (inductivo): se supone que $P(k)$ es verdadero:

$\sum_{i=1}^{k}(2i-1) = 1 + 3 + 5 + 7 + \cdots + (2k-1) = k^2$ es verdadera

Ahora se emplea la hipótesis para demostrar que $P(k+1)$ es verdadero.

$$\sum_{i=1}^{k+1}(2i-1) = 1 + 3 + 5 + 7 + \cdots + (2k-1) + [2(k+1)-1] = (k+1)^2$$

Se trabaja **<u>sólo</u>** con el lado izquierdo de la expresión anterior y se agrupan los primeros k términos:

$$[1 + 3 + 5 + 7 + \cdots + (2k-1)] + [2(k+1)-1] = (k+1)^2$$

Por hipótesis inductiva, se sabe que los primeros k términos son iguales a k^2, luego se aplica propiedad distributiva y se tiene que:

$$k^2 + [2k + 2 - 1] = (k+1)^2$$

$$k^2 + 2k + 1 = (k+1)^2$$

$$(k+1)^2 = (k+1)^2$$

Se concluye que $P(n)$ es verdadera para todo $n \in \mathbb{N}$.

Ejemplo 2: Demostrar que para todo $n \in \mathbb{N}$, se cumple que:

$$\sum_{i=1}^{n} i = 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$P(n)$: $\quad \sum_{i=1}^{n} i = 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

Paso 1 (base): se demuestra que $P(1)$ es verdadera: $\quad 1 = \frac{1*(1+1)}{2} \Longrightarrow 1 = 1$

Paso 2 (inductivo): se supone que $P(k)$ es verdadero:

$\sum_{i=1}^{k} i = 1 + 2 + 3 + \cdots + k = \frac{k(k+1)}{2}$ es verdadera

Ahora se emplea la hipótesis para demostrar que $P(k+1)$ es verdadero.

$$\sum_{i=1}^{k+1} i = 1 + 3 + 5 + 7 + \cdots + k + (k+1) = \frac{(k+1)[(k+1)+1]}{2}$$

Se trabaja **sólo**[1] con el lado izquierdo de la expresión anterior y se agrupan los primeros k términos:

$$[1 + 3 + 5 + 7 + \cdots + k + (k+1)] + (k+1) =$$

Por hipótesis inductiva, se sabe que los primeros k términos son iguales a $\frac{k(k+1)}{2}$, por tanto, se tiene que:

$$\frac{k(k+1)}{2} + (k+1) =$$

En el primer término, extraer factor común $(k+1)$, luego tomar denominador común y finalmente escribir convenientemente $k+2$ como $k+1+1$:

$$(k+1)(\frac{k}{2} + 1) =$$

$$(k+1)\frac{(k+2)}{2} =$$

[1] También, puede trabajarse sólo con el lado derecho de la expresión, pero no ambos al mismo tiempo. El proceso consiste en partir de alguno de los miembros y realizar operaciones algebraicas convenientes de modo de poder llegar al otro.

$$\frac{(k+1)[(k+1)+1]}{2} = \frac{(k+1)[(k+1)+1]}{2}$$

Se concluye que $P(n)$ es verdadera para todo $n \in \mathbb{N}$.

Ejemplo 3: Emplear el principio de inducción omitiendo el paso base.

Si $n \in \mathbb{N}$ demostrar la validez de la proposición abierta:

$$\sum_{i=1}^{n} i = 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n^2 + n + 2}{2}$$

$P(n)$: $\quad \sum_{i=1}^{n} i = 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n^2+n+2}{2}$

Esta vez, se obvia el Paso 1 y se va directamente al inductivo:

Paso 2: se supone que $P(k)$ es verdadero:

$\sum_{i=1}^{k} i = 1 + 2 + 3 + \cdots + k = \frac{k^2+k+2}{2}$ es verdadera

Ahora se emplea la hipótesis para demostrar que $P(k+1)$ es verdadero.

$$\sum_{i=1}^{k+1} i = 1 + 3 + 5 + 7 + \cdots + k + (k+1) = \frac{(k+1)^2 + (k+1) + 2}{2}$$

Se trabaja **sólo** con el lado izquierdo de la expresión anterior y se agrupan los primeros k términos:

$$[1 + 3 + 5 + 7 + \cdots + k + (k+1)] + (k+1) =$$

Por hipótesis inductiva, se sabe que los primeros k términos son iguales a $\frac{k^2+k+2}{2}$, por tanto, se tiene que:

$$\frac{k^2 + k + 2}{2} + (k+1) =$$

En el primer término, se toma denominador común y luego se opera el numerador, agrupando términos en forma conveniente y expresando a $k+2$ como $k+1+1$ y a 2 como $1+1$:

$$\frac{[k^2 + k + 2] + 2(k+1)}{2} =$$

$$\frac{(k^2 + 2k + 1) + (1 + k) + 2}{2} =$$

$$\frac{(k+1)^2 + (k+1) + 2}{2} = \frac{(k+1)^2 + (k+1) + 2}{2}$$

Por tanto, para cualquier $n \in \mathbb{N}$, se tiene que $P(k) \Rightarrow P(k+1)$. Pero antes de decidir si se acepta esta proposición como verdadera, se debe tener en cuenta el ejemplo 2 en el cual se demostró que $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$ es verdadera para todo $n \in \mathbb{N}$. Es posible, por tanto, emplear los resultados obtenidos para concluir que:

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n^2+n+2}{2}$$

Así, se tiene que para todo $n \in \mathbb{N}$: $\frac{n(n+1)}{2} = \frac{n^2+n+2}{2}$ lo que implica que

$n(n+1) = n^2 + n = n^2 + n + 2 \Rightarrow 0 = 2$ **Absurdo!!!**

Si se hubiese realizado el paso 1, se tenía que para $P(1)$: $\frac{1*(1+1)}{2} = \frac{1^2+1+2}{2}$

$1 = 2$ **Absurdo!!!**

Por tanto, se concluye que $P(n)$ no es verdadera para todo $n \in \mathbb{N}$.

Este ejemplo indica al estudiante la necesidad de establecer la base de la inducción sin importar lo fácil que sea verificarlo.

Ejemplo 4: Demostrar una desigualdad por inducción matemática.

Demuestre que $4n < 2^n$ para toda $n \geq 5$

Paso 1 (base): $P(5)$ es el enunciado de que: $4 \cdot 5 < 2^5 \Longrightarrow 20 < 32$ que es verdadero.

Nótese que ocurriría si se probara a partir de $n = 1$ se tendría:

$P(1)$: $4 \cdot 1 < 2^1 \Longrightarrow 4 < 1$ es falso.

$P(2)$: $4 \cdot 2 < 2^2 \Longrightarrow 8 < 4$ es falso.

$P(3)$: $4 \cdot 3 < 2^3 \Longrightarrow 4 < 8$ es falso.

$P(4)$: $4 \cdot 4 < 2^4 \Longrightarrow 16 < 16$ es falso.

Paso 2 (inductivo): se supone que $P(k)$ es verdadero, por lo que la hipótesis de inducción es:

$4k < 2^k$ es verdadera

Ahora se emplea la hipótesis para demostrar que $P(k+1)$ es verdadero.

$$4(k+1) < 2^{k+1}$$

Se trabaja **<u>sólo</u>** con el lado izquierdo de la expresión anterior y se emplea la hipótesis de inducción para demostrar que es menor al lado derecho:

$4(k+1) = 4k + 4 \quad < 2^k + 4$

$< 2^k + 4k$ Dado que $4 < 4k$

$< 2^k + 2^k$ Hipótesis de inducción

$= 2 \cdot 2^k = 2^{k+1}$

Por tanto, se tiene que:

$$4(k+1) < 2^{k+1}$$

Se concluye que $P(n)$ es verdadera para todo $n \in \mathbb{N}$, tal que $n \geq 5$.

Ejemplo 5: divisibilidad.

Demostrar por inducción que si n es un número impar:

$P(n)$: $7^n + 1$ es divisible por 8.

Previo a aplicar inducción, es conveniente realizar un cambio de índices. Sea $n = 2i - 1$. Entonces si $i = 1,2,3, \ldots$. Se tiene que $n = 1,3,5, \ldots$ y la proposición se transforma en:

$7^{2i-1} + 1$ es divisible por 8, $\forall i \in \mathbb{N}$.

Se aplica ahora el proceso de inducción matemática.

Paso 1 (base): se demuestra que $P(1)$ es verdadera: $7^{2*1-1} + 1 = 8$ es divisible por 8.

Paso 2 (inductivo): se supone que $P(k)$ es verdadero: $7^{2k-1} + 1$ es divisible por 8.

Ahora se emplea la hipótesis para demostrar que $P(k+1)$ es verdadero, es decir,

$7^{2(k+1)-1} + 1 = 7^{2k+1} + 1$ es divisible por 8.

Se parte de la tesis de inducción y se trabaja de modo tal que la expresión $7^{2k-1} + 1$ (hipótesis) aparezca en el desarrollo.

$$7^{2k+1} + 1 = 7^2\left(7^{2k-1}\right) + 1 = 7^2\left(7^{2k-1} + 1\right) - 7^2 + 1 = 7^2\left(7^{2k-1} + 1\right) - 48$$

En la última expresión se observa que ambos sumandos son divisibles por 8: $7^{2k-1} + 1$ es divisible por 8 por hipótesis inductiva y 48, es el producto de $6 * 8$, por tanto también es divisible por 8.

Se concluye que $P(n)$ es verdadera para todo n impar.

Ejemplo 6: empleo de factorial. Demostrar que:

$P(n)$: $n! > 3^{n-2}$, para todo natural $n \geq 3$.

Paso 1 (base): se demuestra que $P(3)$ es verdadera: $\mathbf{3}! = \mathbf{1} \cdot \mathbf{2} \cdot \mathbf{3} = 6 > 3^{3-2} \Rightarrow 6 > 3$

Paso 2 (inductivo): se supone que $P(k)$ es verdadero: $k! > 3^{k-2}$

Ahora se prueba la validez de la desigualdad para $n = k+1$, siendo $k \geq 3$.

$$(k+1)! = k! \cdot (k+1) > 3^{k-2} \cdot (k+1) > 3^{k-2} \cdot 3 = 3^{k-1} = 3^{(k+1)-2}$$

En la expresión anterior se ha realizado lo siguiente: en primer lugar se aplica la definición de factorial[2],

[2] $n! = 1.2.3 \ldots . n$

luego se emplea la hipótesis de inducción $k! > 3^{k-2}$, a continuación se considera que $(k+1) > 3$, puesto que k parte de 3; finalmente se aplica propiedad de producto de potencias de igual base y se expresa convenientemente a $k-1$ como $k+1-2$.

Se concluye que $P(n)$ es verdadera para todo natural $n \geq 3$.

Bibliografía

Courant R, & Robbins, H., *¿Qué son las Matemáticas?* FCE, México 2002.

Grimaldi, R., *Matemáticas Discretas y Combinatoria. Una introducción con aplicaciones*; 3ra edición, Addison- Wesley Iberoamericana, 1997.

Ruiz Benjumeda, F., Demostrando por Inducción. Revista Tzaloa, año 1, número 3. Disponible en: www.ommenlinea.org/wp-content/tzaloa/articulos/artic_1_3.pdf

Stewart, J., Redlin, L. & Watson, S., *Precálculo Matemáticas para el Cálculo*; 6ta edición, Cengage Learning, 2012.

Swokowski, E. & Cole, J. Álgebra y Geometría Analítica. Cengage Learning, 13ava edición, 2011.