

INTEGRACIÓN POR PARTES

Ejercicios adicionales resueltos

Supóngase que $u = f(x)$ y $v = g(x)$ son funciones diferenciables. Por regla de la derivada de un producto de dos funciones se tiene que:

$$\frac{d}{dx}[f(x)g(x)] = f(x)g'(x) + g(x)f'(x). \quad (1)$$

La integración de (1)

$$f(x)g(x) = \int f(x)g'(x) dx + \int g(x)f'(x) dx$$

produce una fórmula

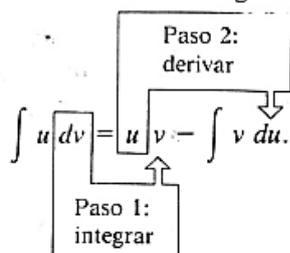
$$\int f(x)g'(x) dx = f(x)g(x) - \int g(x)f'(x) dx, \quad (2)$$

que es sumamente útil para integrar ciertos productos. Este procedimiento se conoce como **integración por partes**. La idea básica contenida en (2) es evaluar la integral $\int f(x)g'(x) dx$ por medio de la evaluación de otra integral $\int g(x)f'(x) dx$, la cual se espera que sea más sencilla.

La fórmula (2) usualmente se expresa en términos de las diferenciales $du = f'(x) dx$ y $dv = g'(x) dx$:

$$\int u dv = uv - \int v du. \quad (3)$$

Para aplicar este resultado, se comienza con una integración seguida por una derivación:



El último paso es, por supuesto, la evaluación de $\int v du$.

Evaluar $\int \frac{x}{\sqrt{x+1}} dx$.

Solución Primeramente se escribe la integral como

$$\int x(x+1)^{-1/2} dx.$$

En esta última forma hay varias elecciones posibles para la función dv . Se podría tener $dv = (x+1)^{-1/2} dx$, $dv = x dx$, o simplemente $dv = dx$. Como una guía práctica, la elección de dv es determinada por lo que suceda en la segunda integral de (3). Si se elige específicamente

$u = x,$	$dv = (x+1)^{-1/2} dx$
<div style="border: 1px solid black; padding: 2px; display: inline-block;">derivar</div>	<div style="border: 1px solid black; padding: 2px; display: inline-block;">integrar</div>
↓	↓
$du = dx.$	$v = 2(x+1)^{1/2}$

entonces

Sustituyendo estas funciones en (3) resulta

$$\begin{aligned} \int x(x+1)^{-1/2} dx &= 2x(x+1)^{-1/2} - 2 \int (x+1)^{1/2} dx \\ &= 2x(x+1)^{-1/2} - 2 \cdot \frac{2}{3}(x+1)^{3/2} + C \\ &= 2x(x+1)^{-1/2} - \frac{4}{3}(x+1)^{3/2} + C. \end{aligned}$$

Obsérvese que no es necesaria una constante en la integración de dv . La constante agregada al final del problema es una constante "colectiva". Además, el conocimiento de que se ha hecho la elección "correcta" se basa en el análisis retrospectivo pragmático: ¿funcionó el procedimiento? Para ver qué sucede cuando se hace una elección "incorrecta", considérese el Ejemplo 1, si en esta ocasión se selecciona

$$\begin{aligned} u &= (x+1)^{-1/2} & dv &= x \, dx \\ du &= -\frac{1}{2}(x+1)^{-3/2} \, dx & v &= \frac{1}{2}x^2 \end{aligned}$$

Aplicando (3) en este caso resulta

$$\int x(x+1)^{-1/2} \, dx = \frac{1}{2}x^2(x+1)^{-1/2} + \frac{1}{4} \int x^2(x+1)^{-3/2} \, dx$$

El problema resulta evidente; la segunda integral $\int v \, du$ es más complicada que la original $\int u \, dv$. La selección alternativa $dv = dx$ también conduce a un callejón sin salida.

Ejemplo 2

Evaluar $\int x \tan^{-1} x \, dx$.

Solución Eligiendo

$$\begin{aligned} u &= \tan^{-1} x & dv &= x \, dx \\ du &= \frac{dx}{1+x^2}, & v &= \frac{x^2}{2} \end{aligned}$$

puede verse que (3) da

$$\int x \tan^{-1} x \, dx = \frac{x^2}{2} \tan^{-1} x - \frac{1}{2} \int \frac{x^2}{1+x^2} \, dx.$$

Para evaluar $\int x^2 dx / (1+x^2)$, se efectúa la división. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \int x \tan^{-1} x \, dx &= \frac{x^2}{2} \tan^{-1} x - \frac{1}{2} \int \left(1 - \frac{1}{1+x^2} \right) dx \\ &= \frac{x^2}{2} \tan^{-1} x - \frac{1}{2} x + \frac{1}{2} \tan^{-1} x + C \end{aligned}$$

¡OJO! Se refiere a la división de polinomios, dado que no es posible aplicar distributiva respecto al cociente por derecha.

Ejemplo 3

Evaluar $\int x^3 \ln x \, dx$.

Solución Sean

$$\begin{aligned} u &= \ln x & dv &= x^3 \, dx \\ du &= \frac{1}{x} \, dx & v &= \frac{x^4}{4}. \end{aligned}$$

Integrando luego por partes resulta

$$\begin{aligned} \int x^3 \ln x \, dx &= \frac{x^4}{4} \ln x - \frac{1}{4} \int x^4 \cdot \frac{1}{x} \, dx \\ &= \frac{x^4}{4} \ln x - \frac{1}{4} \int x^3 \, dx = \frac{x^4}{4} \ln x - \frac{x^4}{16} + C \end{aligned}$$

Ejemplo 4

Evaluar $\int \sec^3 x \, dx$.

Solución Una inspección a la integral no revela ninguna elección obvia para dv . Sin embargo, escribiendo $\sec^3 x = \sec x \cdot \sec^2 x$, se puede identificar

$$\begin{aligned}u &= \sec x & dv &= \sec^2 x \, dx \\ du &= \sec x \tan x \, dx & v &= \tan x\end{aligned}$$

En virtud de (3) y de una identidad trigonométrica se deduce que

$$\begin{aligned}\int \sec^3 x \, dx &= \sec x \tan x - \int \tan^2 x \sec x \, dx \\ &= \sec x \tan x - \int (\sec^2 x - 1) \sec x \, dx \\ &= \sec x \tan x + \int \sec x \, dx - \int \sec^3 x \, dx \\ &= \sec x \tan x + \ln|\sec x + \tan x| - \int \sec^3 x \, dx.\end{aligned}$$

Al llegar a este punto podría parecer que se entra a un círculo vicioso. En realidad, el problema ya está resuelto; se despeja $\int \sec^3 x \, dx$ de la última ecuación y se suma una constante de integración:

$$\begin{aligned}2 \int \sec^3 x \, dx &= \sec x \tan x + \ln|\sec x + \tan x| \\ \int \sec^3 x \, dx &= \frac{1}{2} \sec x \tan x + \frac{1}{2} \ln|\sec x + \tan x| + C\end{aligned}$$

Ejemplo 5

Evaluar $\int x^2 e^{-x} \, dx$

Solución Sean

$$\begin{aligned}u &= x^2 & dv &= e^{-x} \, dx \\ du &= 2x \, dx & v &= -e^{-x}\end{aligned}$$

de modo que

$$\int x^2 e^{-x} \, dx = -x^2 e^{-x} + 2 \int x e^{-x} \, dx$$

En $\int x e^{-x} \, dx$, se aplica integración por partes por segunda ocasión con

$$\begin{aligned}u &= x & dv &= e^{-x} \, dx \\ du &= dx & v &= -e^{-x}\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}\int x^2 e^{-x} \, dx &= -x^2 e^{-x} + 2 \left[-x e^{-x} + \int e^{-x} \, dx \right] \\ &= -x^2 e^{-x} - 2x e^{-x} - 2e^{-x} + C\end{aligned}$$

Por regla general, integrales del tipo $\int x^n (\ln x)^n \, dx$, $\int x^n e^{kx} \, dx$, y $\int x^n \sin kx \, dx$, en donde n es un entero positivo y k una constante, requerirán integración por partes n veces.

Ejemplo 7

Evaluar $\int e^{2x} \cos 3x \, dx$

Solución Sean $u = \cos 3x$ $dv = e^{2x} \, dx$
 $du = -3 \operatorname{sen} 3x \, dx$ $v = \frac{1}{2} e^{2x}$

$$\text{Entonces, } \int e^{2x} \cos 3x \, dx = \frac{1}{2} e^{2x} \cos 3x + \frac{3}{2} \int e^{2x} \operatorname{sen} 3x \, dx \quad (4)$$

Se aplica nuevamente integración por partes en $\int e^{2x} \operatorname{sen} 3x \, dx$, eligiendo

$$u = \operatorname{sen} 3x \quad dv = e^{2x} \, dx$$
$$du = 3 \cos 3x \, dx \quad v = \frac{1}{2} e^{2x}$$

De esta manera (4) se convierte en

$$\begin{aligned} \int e^{2x} \cos 3x \, dx &= \frac{1}{2} e^{2x} \cos 3x + \frac{3}{2} \left[\frac{1}{2} e^{2x} \operatorname{sen} 3x - \frac{3}{2} \int e^{2x} \cos 3x \, dx \right] \\ &= \frac{1}{2} e^{2x} \cos 3x + \frac{3}{4} e^{2x} \operatorname{sen} 3x - \frac{9}{4} \int e^{2x} \cos 3x \, dx \end{aligned}$$

Procediendo como en el Ejemplo 3, se despeja la integral original $\int e^{2x} \cos 3x \, dx$:

$$\begin{aligned} \frac{13}{4} \int e^{2x} \cos 3x \, dx &= \frac{1}{2} e^{2x} \cos 3x + \frac{3}{4} e^{2x} \operatorname{sen} 3x \\ \int e^{2x} \cos 3x \, dx &= \frac{2}{13} e^{2x} \cos 3x + \frac{3}{13} e^{2x} \operatorname{sen} 3x + C \end{aligned}$$

Se recomienda al lector resolver de nuevo el Ejemplo 7 utilizando

- (i) $dv = \cos 3x \, dx$ en la integral original y
 $dv = \operatorname{sen} 3x \, dx$ en la segunda; y
- (ii) $dv = e^{2x} \, dx$ en la integral original y
 $dv = \operatorname{sen} 3x \, dx$ en la segunda.

Integrales definidas

Una integral definida se puede evaluar aplicando integración por partes de la manera siguiente:

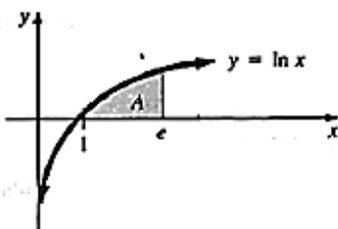
$$\int_a^b f(x)g'(x) \, dx = f(x)g(x) \Big|_a^b - \int_a^b g(x)f'(x) \, dx.$$

Ejemplo 8

Determinar el área bajo la gráfica de $y = \ln x$ en el intervalo $[1, e]$.

Solución De la Figura se observa que el área A está dada por

$$A = \int_1^e \ln x \, dx.$$



Eligiendo $u = \ln x$ $dv = dx$

$$du = \frac{1}{x} dx, \quad v = x$$

$$\text{se tiene } A = x \ln x \Big|_1^e - \int_1^e x \cdot \frac{1}{x} dx$$

$$= x \ln x \Big|_1^e - \int_1^e dx$$

$$= x \ln x \Big|_1^e - x \Big|_1^e$$

$$= e \ln e - \ln 1 - e + 1 = 1 \text{ unidad cuadrada}$$

ya que $\ln e = 1$ y $\ln 1 = 0$.

Ejercicios adicionales

1. $\int x\sqrt{x+3} \, dx$

2. $\int \frac{x}{\sqrt{2x-5}} \, dx$

3. $\int \ln 4x \, dx$

4. $\int \ln(x+1) \, dx$

5. $\int x \ln 2x \, dx$

6. $\int x^{1/2} \ln x \, dx$

7. $\int \frac{\ln x}{x^2} \, dx$

8. $\int \frac{\ln x}{\sqrt{x^3}} \, dx$

9. $\int (\ln t)^2 \, dt$

10. $\int (t \ln t)^2 \, dt$

11. $\int x^2 e^{5x} \, dx$

12. $\int_1^e x^2 \ln x^2 \, dx$

13. $\int_0^2 x \ln(x+1) \, dx$

14. $\int_1^4 \frac{\tan^{-1} \sqrt{x}}{\sqrt{x}} \, dx$

Referencia

D. G.Zill y W.S. Wright (2011). Cálculo. Trascendentes tempranas. McGraw Hill, 4ta edición.