INTEGRACIÓN POR PARTES

Ejercicios adicionales resueltos

Supóngase que $u = f(x)$ y $v = g(x)$ son funciones diferenciables. Por regla de la derivada de un producto de dos funciones se tiene que:

$$\frac{d}{dx}[f(x)g(x)] = f(x)g'(x) + g(x)f'(x). \tag{1}$$

La integración de (1)

$$f(x)g(x) = \int f(x)g'(x)\,dx + \int g(x)f'(x)\,dx$$

produce una fórmula

$$\int f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x) - \int g(x)f'(x)\,dx, \tag{2}$$

que es sumamente útil para integrar ciertos productos. Este procedimiento se conoce como **integración por partes**. La idea básica contenida en (2) es evaluar la integral $\int f(x)g'(x)\,dx$ por medio de la evaluación de otra integral $\int g(x)f'(x\,dx$, la cual se espera que sea más sencilla.

La fórmula (2) usualmente se expresa en términos de las diferenciales $du = f'(x)\,dx$ y $dv = g'(x)\,dx$:

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du. \tag{3}$$

Para aplicar este resultado, se comienza con una integración seguida por una derivación:

Paso 2: derivar

$$\int u\,\boxed{dv} = \boxed{u}\,v - \int v\,du.$$

Paso 1: integrar

El último paso es, por supuesto, la evaluación de $\int v\,du$.

Evaluar $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{x+1}}\,dx.$

Solución Primeramente se escribe la integral como

$$\int x(x+1)^{-1/2}\,dx.$$

En esta última forma hay varias elecciones posibles para la función dv. Se podría tener $dv = (x+1)^{-1/2}\,dx$, $dv = x\,dx$, o simplemente $dv = dx$. Como una guía práctica, la elección de dv es determinada por lo que suceda en la segunda integral de (3) Si se elige específicamente

$$u = x, \qquad dv = (x+1)^{-1/2}\,dx$$

$$\boxed{\text{derivar}} \qquad \boxed{\text{integrar}}$$

entonces

$$du = dx. \qquad v = 2(x+1)^{1/2}$$

Sustituyendo estas funciones en (3) resulta

$$\begin{aligned}\int x(x+1)^{-1/2}\,dx &= 2x(x+1)^{-1/2} - 2\int (x+1)^{1/2}\,dx \\ &= 2x(x+1)^{-1/2} - 2\cdot\frac{2}{3}(x+1)^{3/2} + C \\ &= 2x(x+1)^{-1/2} - \frac{4}{3}(x+1)^{3/2} + C.\end{aligned}$$

Obsérvese que no es necesaria una constante en la integración de dv. La constante agregada al final del problema es una constante "colectiva". Además, el conocimiento de que se ha hecho la elección "correcta" se basa en el análisis retrospectivo pragmático: ¿funcionó el procedimiento? Para ver qué sucede cuando se hace una elección "incorrecta", considérese el Ejemplo 1, si en esta ocasión se selecciona

$$u = (x+1)^{-1/2} \qquad dv = x\,dx$$
$$du = -\frac{1}{2}(x+1)^{-3/2}\,dx \qquad v = \frac{1}{2}x^2$$

Aplicando (3) en este caso resulta

$$\int x(x+1)^{-1/2}\,dx = \frac{1}{2}x^2(x+1)^{-1/2} + \frac{1}{4}\int x^2(x+1)^{-3/2}\,dx$$

El problema resulta evidente; la segunda integral $\int v\,du$ es más complicada que la original $\int u\,dv$. La selección alternativa $dv = dx$ también conduce a un callejón sin salida.

Ejemplo 2

Evaluar $\int x \tan^{-1}x\,dx$.

Solución Eligiendo

$$u = \tan^{-1}x \qquad dv = x\,dx$$
$$du = \frac{dx}{1+x^2}, \qquad v = \frac{x^2}{2}$$

puede verse que (3) da

$$\int x\tan^{-1}x\,dx = \frac{x^2}{2}\tan^{-1}x - \frac{1}{2}\int \frac{x^2}{1+x^2}\,dx.$$

Para evaluar $\int x^2dx/(1+x^2)$, se efectúa la división. Por lo tanto,

$$\int x\tan^{-1}x\,dx = \frac{x^2}{2}\tan^{-1}x - \frac{1}{2}\int\left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right)dx$$
$$= \frac{x^2}{2}\tan^{-1}x - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\tan^{-1}x + C$$

¡OJO! Se refiere a la división de polinomios, dado que no es posible aplicar distributiva respecto al cociente por derecha.

Ejemplo 3

Evaluar $\int x^3 \ln x\,dx$.

Solución Sean

$$u = \ln x \qquad dv = x^3\,dx$$
$$du = \frac{1}{x}\,dx \qquad v = \frac{x^4}{4}.$$

Integrando luego por partes resulta

$$\int x^3\ln x\,dx = \frac{x^4}{4}\ln x - \frac{1}{4}\int x^4\cdot\frac{1}{x}\,dx$$
$$= \frac{x^4}{4}\ln x - \frac{1}{4}\int x^3\,dx = \frac{x^4}{4}\ln x - \frac{x^4}{16} + C$$

Ejemplo 4

Evaluar $\int \sec^3 x\, dx$.

Solución Una inspección a la integral no revela ninguna elección obvia para dv. Sin embargo, escribiendo $\sec^3 x = \sec x \cdot \sec^2 x$, se puede identificar

$$u = \sec x \qquad dv = \sec^2 x\, dx$$
$$du = \sec x \tan x\, dx \qquad v = \tan x$$

En virtud de (3) y de una identidad trigonométrica se deduce que

$$\begin{aligned}\int \sec^3 x\, dx &= \sec x \tan x - \int \tan^2 x \sec x\, dx \\ &= \sec x \tan x - \int (\sec^2 x - 1)\sec x\, dx \\ &= \sec x \tan x + \int \sec x\, dx - \int \sec^3 x\, dx \\ &= \sec x \tan x + \ln|\sec x + \tan x| - \int \sec^3 x\, dx.\end{aligned}$$

Al llegar a este punto podría parecer que se entra a un círculo vicioso. En realidad, el problema ya está resuelto; se despeja $\int \sec^3 x\, dx$ de la última ecuación y se suma una constante de integración:

$$2\int \sec^3 x\, dx = \sec x \tan x + \ln|\sec x + \tan x|$$

$$\int \sec^3 x\, dx = \frac{1}{2}\sec x \tan x + \frac{1}{2}\ln|\sec x + \tan x| + C$$

Ejemplo 5

Evaluar $\int x^2 e^{-x}\, dx$

Solución Sean

$$u = x^2 \qquad dv = e^{-x}\, dx$$
$$du = 2x\, dx \qquad v = -e^{-x}$$

de modo que

$$\int x^2 e^{-x}\, dx = -x^2 e^{-x} + 2\int x e^{-x}\, dx$$

En $\int x e^{-x}\, dx$, se aplica integración por partes por segunda ocasión con

$$u = x \qquad dv = e^{-x}\, dx$$
$$du = dx \qquad v = -e^{-x}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}\int x^2 e^{-x}\, dx &= -x^2 e^{-x} + 2\left[-x e^{-x} + \int e^{-x}\, dx\right] \\ &= -x^2 e^{-x} - 2x e^{-x} - 2e^{-x} + C\end{aligned}$$

Por regla general, integrales del tipo $\int x^k (\ln x)^n\, dx$, $\int x^n e^{kx}\, dx$, y $\int x^n \text{ sen } kx\, dx$, en donde n es un entero positivo y k una constante, requerirán integración por partes n veces.

Ejemplo 7

Evaluar $\int e^{2x} \cos 3x \, dx$

Solución Sean

$$u = \cos 3x \qquad dv = e^{2x}\, dx$$

$$du = -3 \operatorname{sen} 3x \, dx \qquad v = \frac{1}{2} e^{2x}$$

Entonces, $$\int e^{2x} \cos 3x \, dx = \frac{1}{2} e^{2x} \cos 3x + \frac{3}{2} \int e^{2x} \operatorname{sen} 3x \, dx \tag{4}$$

Se aplica nuevamente integración por partes en $\int e^{2x} \operatorname{sen} 3x \, dx$, eligiendo

$$u = \operatorname{sen} 3x \qquad dv = e^{2x}\, dx$$

$$du = 3 \cos 3x \, dx \qquad v = \frac{1}{2} e^{2x}$$

De esta manera (4) se convierte en

$$\begin{aligned}\int e^{2x} \cos 3x \, dx &= \frac{1}{2} e^{2x} \cos 3x + \frac{3}{2}\left[\frac{1}{2} e^{2x} \operatorname{sen} 3x - \frac{3}{2} \int e^{2x} \cos 3x \, dx\right] \\ &= \frac{1}{2} e^{2x} \cos 3x + \frac{3}{4} e^{2x} \operatorname{sen} 3x - \frac{9}{4} \int e^{2x} \cos 3x \, dx\end{aligned}$$

Procediendo como en el Ejemplo 3, se despeja la integral original $\int e^{2x} \cos 3x \, dx$:

$$\frac{13}{4} \int e^{2x} \cos 3x \, dx = \frac{1}{2} e^{2x} \cos 3x + \frac{3}{4} e^{2x} \operatorname{sen} 3x$$

$$\int e^{2x} \cos 3x \, dx = \frac{2}{13} e^{2x} \cos 3x + \frac{3}{13} e^{2x} \operatorname{sen} 3x + C$$

Se recomienda al lector resolver de nuevo el Ejemplo 7 utilizando

(*i*) $dv = \cos 3x \, dx$ en la integral original y
$dv = \operatorname{sen} 3x \, dx$ en la segunda; y

(*ii*) $dv = e^{2x} dx$ en la integral original y
$dv = \operatorname{sen} 3x \, dx$ en la segunda.

Integrales definidas

Una integral definida se puede evaluar aplicando integración por partes de la manera siguiente:

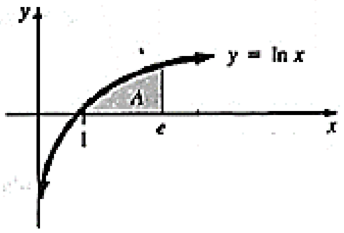
$$\int_a^b f(x) g'(x) \, dx = f(x) g(x) \Big]_a^b - \int_a^b g(x) f'(x) \, dx.$$

Ejemplo 8

Determinar el área bajo la gráfica de $y = \ln x$ en el intervalo $[1, e]$.

Solución De la Figura se observa que el área A está dada por

$$A = \int_1^e \ln x \, dx.$$



Eligiendo $u = \ln x \qquad dv = dx$

$du = \frac{1}{x}\,dx, \qquad v = x$

se tiene
$$\begin{aligned} A &= x \ln x\Big]_1^e - \int_1^e x \cdot \frac{1}{x}\,dx \\ &= x \ln x\Big]_1^e - \int_1^e dx \\ &= x \ln x\Big]_1^e - x\Big]_1^e \\ &= e \ln e - \ln 1 - e + 1 = 1 \text{ unidad cuadrada} \end{aligned}$$

ya que $\ln e = 1$ y $\ln 1 = 0$.

Referencia

D. G.Zill y W.S. Wright (2011). Cálculo. Trascendentes tempranas. Mc Graw Hill, 4ta edición.