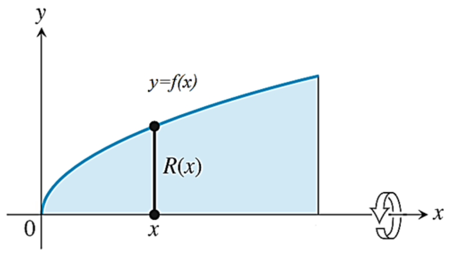
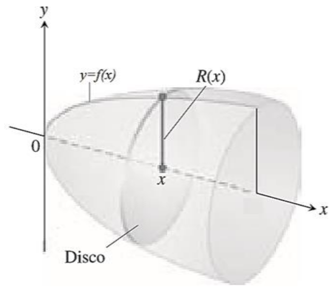
MÉTODO DE DISCOS

El sólido generado al hacer girar una región plana alrededor de un eje se denomina sólido de revolución. Para determinar el volumen de este tipo de sólidos es necesario observar que el área de la sección transversal $A(x)$ es el área de un disco de radio $R(x)$, la distancia de la frontera de la región plana al eje de revolución.





$$\boldsymbol{A(x) = \pi(radio)^2 = \pi[R(x)]^2}$$

En este caso la definición de volumen da:

Volumen por medio de discos al girar alrededor del eje x:

$$V = \int_a^b A(x)dx = \int_a^b \pi[R(x)]^2 dx$$

Una función que rota alrededor del eje x: https://youtu.be/QNLd6TEGOOw

Generalización del método para función que rota alrededor del eje x: https://youtu.be/-mIa_c6wdA4

Una función de x, rotando alrededor de un eje paralelo al eje x (y=k): https://youtu.be/n3FT8IBoBjg

Volumen por medio de discos al girar alrededor del eje y:

$$V = \int_c^d A(y)dy = \int_c^d \pi[R(y)]^2 dy$$

Una función que rota alrededor del eje y: https://youtu.be/0L1uPB2gzvk

Una función de y, rotando alrededor de un eje paralelo al eje y (x=k): https://youtu.be/OJV9K-bobWI

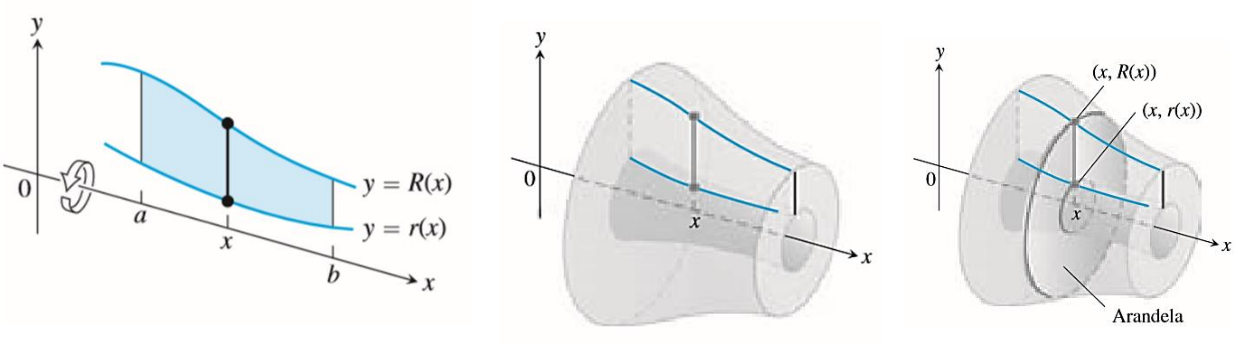
Evaluación de la integral correspondiente al método anterior: https://youtu.be/IQ21-0TLsKE

MÉTODO DE ARANDELAS O ANILLOS

Si la región que gira para generar un sólido no cruza o no hace frontera con el eje de revolución, el sólido tendrá un agujero. Las secciones transversales perpendiculares al eje de revolución son arandelas. Las dimensiones de una arandela representativa son:

Radio exterior $R(x)$

Radio interior $r(x)$



El área de la arandela es:

$$\boldsymbol{A(x) = \pi\,[R(x)]^2 - \pi\,[r(x)]^2 = \pi\left([R(x)]^2 - [r(x)]^2\right)}$$

En consecuencia, la definición de volumen da:

Volumen mediante arandelas para rotación alrededor del eje x: $$V = \int_a^b A(x)dx = \int_a^b \boldsymbol{\pi}\left([\boldsymbol{R(x)}]^2 - [\boldsymbol{r(x)}]^2\right)dx$$

Sólido de revolución entre dos funciones: https://youtu.be/SpaKkasJP3U

Generalización del método de arandelas o anillos: https://youtu.be/ip3hX9jECSU

Método de los anillos al rotar alrededor de una recta horizontal, paralela al eje x (y=k): https://youtu.be/dbGGho7wl3E

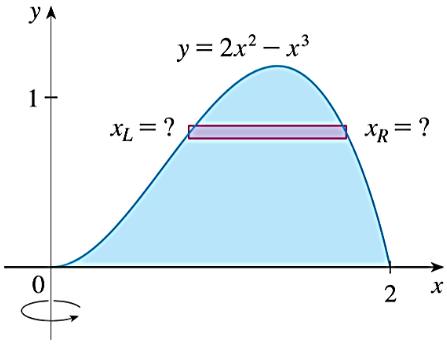
Volumen mediante arandelas para rotación alrededor del eje y: $$V = \int_c^d A(y)dx = \int_c^d \boldsymbol{\pi}\left([\boldsymbol{R(y)}]^2 - [\boldsymbol{r(y)}]^2\right)dy$$

Método de los anillos al rotar alrededor de una recta vertical, paralela al eje y (x=k): https://youtu.be/Qsit4Q3QtuA

Desafío sobre los métodos de discos y anillos: https://es.khanacademy.org/math/integral-calculus/volume-using-calculus-ic/washer-method-ic/e/volumes-of-solids-of-revolution--discs-and-washers

MÉTODO DE CASCARONES CILÍNDRICOS

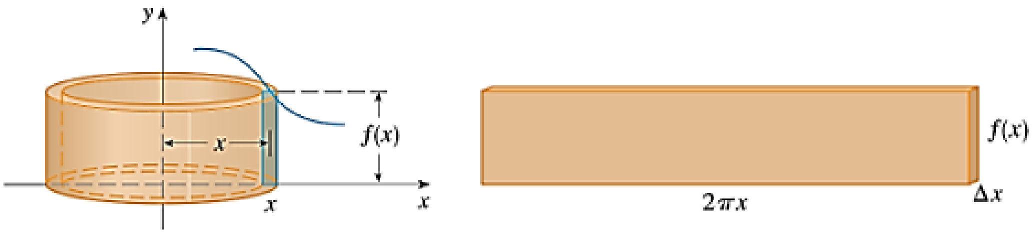
Algunos problemas relacionados con volúmenes son muy difíciles de manejar con los métodos anteriores. Ej. determinar el volumen del sólido que se obtiene al hacer girar la región limitada por $y = 2x^2 - x^3$ alrededor del eje y.



> El volumen del sólido que se obtiene al hacer girar alrededor del eje y la región bajo la curva $y = f(x)$ desde a hasta b, es
> $$V = \int_a^b 2\pi x f(x)dx \quad \text{donde } 0 \le a < b$$

Pensar en el cascarón representativo, cortado y aplanado, con radio x, circunferencia $2\pi x$, altura $f(x)$ y espesor Δx o dx:

$$\int_a^b \underbrace{(2\pi x)}_{\text{circunferencia}}\ \underbrace{[f(x)]}_{\text{altura}}\ \underbrace{dx}_{\text{espesor}}$$



Una función que rota alrededor del eje y: https://youtu.be/04jTPScY4eU

Evaluación de la integral correspondiente al método anterior: https://youtu.be/yvELdAmfUp8

Una función que rota alrededor del eje x: https://youtu.be/_BOi_3L042E

Dos funciones de x, rotando alrededor de un eje paralelo al eje y (x=k): https://youtu.be/m7cVhY5SGoY?t=209

Dos funciones de y, rotando alrededor de un eje paralelo al eje x (y=k): https://youtu.be/XDZ8QZpeY78

Evaluación de la integral anterior: https://youtu.be/9C5CJxd66lU

Desafío Método de cascarones: https://es.khanacademy.org/math/integral-calculus/volume-using-calculus-ic/shell-method-ic/e/volumes-of-solids-of-revolution-by-shells

Resumen del método de los cascarones

Sin importar la posición del eje de revolución (horizontal o vertical), los pasos para poner en práctica el método son los siguientes:

1. Dibujar la región y bosquejar un segmento de recta que la cruce en forma paralela al eje de revolución. Indicar la altura o longitud del segmento (altura del cascarón) y la distancia al eje de revolución (radio del cascarón).
2. Determinar los límites de integración para la variable del grosor.
3. Integrar el producto 2π **x (radio del cascarón) x (altura del cascarón)** con respecto a la variable del grosor (x o y) para determinar el volumen.