U4. INTEGRALES
Material de Apoyo

Cálculo I

Dra. Ing. Calvo Olivares, Romina

Año 2017

Reglas básicas de integración ($a > 0$)

1. $\int kf(u)\,du = k\int f(u)\,du$

2. $\int [f(u) \pm g(u)]\,du = \int f(u)\,du \pm \int g(u)\,du$

3. $\int du = u + C$

4. $\int u^n\,du = \dfrac{u^{n+1}}{n+1} + C, \quad n \neq -1$

5. $\int \dfrac{du}{u} = \ln|u| + C$

6. $\int e^u\,du = e^u + C$

7. $\int a^u\,du = \left(\dfrac{1}{\ln a}\right)a^u + C$

8. $\int \operatorname{sen} u\,du = -\cos u + C$

9. $\int \cos u\,du = \operatorname{sen} u + C$

10. $\int \tan u\,du = -\ln|\cos u| + C$

11. $\int \cot u \, du = \ln|\operatorname{sen} u| + C$

12. $\int \sec u \, du = \ln|\sec u + \tan u| + C$

13. $\int \csc u \, du = -\ln|\csc u + \cot u| + C$

14. $\int \sec^2 u \, du = \tan u + C$

15. $\int \csc^2 u \, du = -\cot u + C$

16. $\int \sec u \tan u \, du = \sec u + C$

17. $\int \csc u \cot u \, du = -\csc u \, + C$

18. $\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \operatorname{arcsen} \frac{u}{a} + C$

19. $\int \frac{du}{a^2 + u^2} = \frac{1}{a} \arctan \frac{u}{a} + C$

20. $\int \frac{du}{u\sqrt{u^2 - a^2}} = \frac{1}{a} \operatorname{arcsec} \frac{|u|}{a} + C$

Integrales indefinidas
$\int sen\, kx\, dx = -\frac{1}{k}\cos kx + C$
$\int cos\, kx\; dx = \frac{1}{k} sen\, kx + C$
$\int \sec^2 kx\;\; dx = \frac{1}{k} tan\, kx + C$
$\int \mathrm{cosec}^2\, kx\, dx = -\frac{1}{k} cot\, kx + C$
$\int sec\, kx \tan kx\, dx = \frac{1}{k} sec\, kx + C$
$\int cosec\, kx\, cot\, kx\;\; dx = -\frac{1}{k} cosec\, kx + C$

Propiedades de la suma empleando notación sigma

1. $$\sum_{i=1}^{n} ka_i = k\sum_{i=1}^{n} a_i$$

2. $$\sum_{i=1}^{n} (a_i \pm b_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i \pm \sum_{i=1}^{n} b_i$$

FÓRMULAS DE SUMA EMPLEANDO LA NOTACIÓN SIGMA

1. $$\sum_{i=1}^{n} c = cn$$

2. $$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$

3. $$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

4. $$\sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

Estrategia para realizar un cambio de variable

1. Seleccionar una sustitución $u = g(x)$. Usualmente, conviene elegir la parte interna de una función compuesta, tal como una cantidad elevada a la potencia. También puede verificarse dentro del integrando cuál de las dos funciones sería "la primitiva" y cuál su derivada, eligiendo la primera como u.

2. Calcular $du = g'(x)dx$

3. Reescribir la integral en términos de la variable u (recordar que si en el integrando aparece una x se debe expresar también en términos de u).

4. Encontrar la integral resultante en términos de u.

5. Reemplazar u por g(x) para obtener una antiderivada en términos de x.

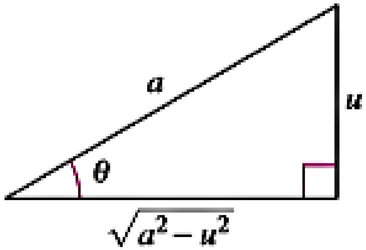
6. Verificar la respuesta por derivación.

SUSTITUCIONES TRIGONOMÉTRICAS ($a > 0$)

1. Para integrales que contienen $\sqrt{a^2 - u^2}$, sea

$$u = a \operatorname{sen} \theta.$$

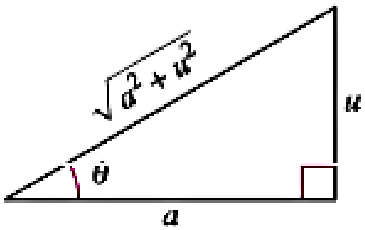
Entonces $\sqrt{a^2 - u^2} = a \cos \theta$, donde $-\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2$.



2. Para integrales que contienen $\sqrt{a^2 + u^2}$, sea

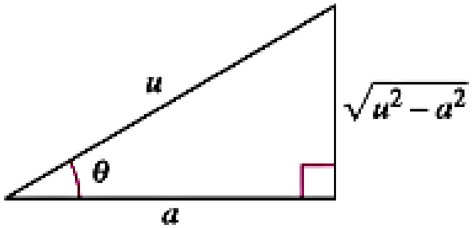
$$u = a \tan \theta.$$

Entonces $\sqrt{a^2 + u^2} = a \sec \theta$, donde $-\pi/2 < \theta < \pi/2$.



3. Para integrales que contienen $\sqrt{u^2 - a^2}$, sea

$$u = a \sec \theta.$$



Entonces

$$\sqrt{u^2 - a^2} = \begin{cases} a \tan \theta, \text{ si } u > a, \text{ donde } 0 \leq \theta < \pi/2 \\ -a \tan \theta \text{ si } u < -a, \text{ donde } \pi/2 < \theta \leq \pi. \end{cases}$$

Tener en cuenta que u es una variable y a es una constante

Integración por partes (Larson, pag. 527-532; Thomas, pag. 436-441)

Estrategia para integrar por partes

1. Intentar tomar como dv la porción más complicada del integrando que se ajuste a una regla básica de integración y como u el factor restante del integrando.

2. Intentar tomar como u la porción del integrando cuya derivada es una función más simple que u, y como dv el factor restante del integrando (dv siempre incluye a dx del integrando original).

Resumen de integrales comunes utilizando integración por partes

1. Para integrales de la forma:

$$\int x^n e^{ax} dx\,, \int x^n sen\,(ax) dx\,, \int x^n \cos(ax)\,dx$$

Sea $u = x^n$ y sea $dv = e^{ax}dx, sen(ax)dx, o \cos(ax)\,dx$

2. Para integrales de la forma:

$$\int x^n \ln(x)\,dx\,, \int x^n arcsen\,(ax) dx\,, \int x^n \arctan(ax)\,dx$$

Sea $u = \ln(x)\,, arcsen(ax), o \arctan(ax)$ y sea $dv = x^n dx$

3. Para integrales de la forma:

$$\int e^{ax} sen\,(bx) dx\,, \int e^{ax} cos\,(bx) dx$$

Sea $u = sen(bx)dx, o \cos(bx)\,dx$ y sea $\mathrm{d}v = e^{ax}dx$

Estrategia para la evaluación de $\int \operatorname{sen}^m x \cos^n x\, dx$

a) Si la potencia del coseno es impar ($n = 2k + 1$), extraemos un factor coseno y utilizamos $\cos^2 x = 1 - \operatorname{sen}^2 x$ para expresar los factores restantes en términos del seno:

$$\int \operatorname{sen}^m x \cos^{2k+1} x\, dx = \int \operatorname{sen}^m x\, (\cos^2 x)^k \cos x\, dx$$
$$= \int \operatorname{sen}^m x\, (1 - \operatorname{sen}^2 x)^k \cos x\, dx$$

Después sustituimos $u = \operatorname{sen} x$.

b) Si la potencia del seno es impar ($m = 2k + 1$), extraemos un factor seno y usamos $\operatorname{sen}^2 x = 1 - \cos^2 x$ para expresar los factores restantes en términos del coseno:

$$\int \operatorname{sen}^{2k+1} x \cos^n x\, dx = \int (\operatorname{sen}^2 x)^k \cos^n x \operatorname{sen} x\, dx$$
$$= \int (1 - \cos^2 x)^k \cos^n x \operatorname{sen} x\, dx$$

Después sustituimos $u = \cos x$. [Observe que si la potencia de ambos, seno y coseno, es impar, puede utilizarse a) o b).]

c) Si las potencias de ambos, seno y coseno, son pares, utilizamos las identidades del ángulo medio

$$\operatorname{sen}^2 x = \tfrac{1}{2}(1 - \cos 2x) \qquad \cos^2 x = \tfrac{1}{2}(1 + \cos 2x)$$

Algunas veces es útil utilizar la identidad

$$\operatorname{sen} x \cos x = \tfrac{1}{2} \operatorname{sen} 2x$$

Estrategia para la evaluación de $\int \tan^m x \sec^n x\, dx$

a) Si la potencia de la secante es par ($n = 2k$, $k \geq 2$), extraemos un factor $\sec^2 x$ y utilizamos $\sec^2 x = 1 + \tan^2 x$ para expresar los factores restantes en términos de $\tan x$:

$$\int \tan^m x \sec^{2k} x\, dx = \int \tan^m x\, (\sec^2 x)^{k-1} \sec^2 x\, dx$$

$$= \int \tan^m x\, (1 + \tan^2 x)^{k-1} \sec^2 x\, dx$$

Después sustituimos $u = \tan x$.

b) Si la potencia de la tangente es impar ($m = 2k + 1$), extraemos un factor $\sec x \tan x$ y utilizamos $\tan^2 x = \sec^2 x - 1$ para expresar los factores restantes en términos de $\sec x$:

$$\int \tan^{2k+1} x \sec^n x\, dx = \int (\tan^2 x)^k \sec^{n-1} x\, \sec x\, \tan x\, dx$$

$$= \int (\sec^2 x - 1)^k \sec^{n-1} x\, \sec x\, \tan x\, dx$$

Después sustituimos $u = \sec x$.

Fracciones simples o parciales (Larson, pag. 554-560; Thomas, pag. 453-461)

DESCOMPOSICIÓN DE $N(x)/D(x)$ EN FRACCIONES SIMPLES

1. **Dividir en caso impropio:** Si $N(x)/D(x)$ es una fracción impropia (es decir, si el grado del numerador es mayor o igual al grado del denominador), dividir el denominador en el numerador para obtener

$$\frac{N(x)}{D(x)} = (\text{a polinomio}) + \frac{N_1(x)}{D(x)}$$

donde el grado de $N_1(x)$ es menor del grado de $D(x)$. Entonces aplicar los pasos 2, 3 y 4 a la expresión racional propia $N_1(x)/D(x)$.

2. **Factorizar el denominador:** Factorizar completamente el denominador en factores de los tipos

$$(px + q)^m \qquad \text{y} \qquad (ax^2 + bx + c)^n$$

donde $ax^2 + bx + c$ es irreducible.

3. **Factores lineales:** Para cada factor lineal $(px + q)^m$, la descomposición en fracciones parciales debe incluir la suma siguiente de m fracciones.

$$\frac{A_1}{(px + q)} + \frac{A_2}{(px + q)^2} + \cdot\cdot\cdot + \frac{A_m}{(px + q)^m}$$

4. **Factores cuadráticos:** Para cada factor cuadrático $(ax^2 + bx + c)^n$, la descomposición en fracciones parciales debe incluir la suma siguiente de n fracciones.

$$\frac{B_1x + C_1}{ax^2 + bx + c} + \frac{B_2x + C_2}{(ax^2 + bx + c)^2} + \cdot\cdot\cdot + \frac{B_nx + C_n}{(ax^2 + bx + c)^n}$$

Procedimientos para adaptar los integrandos a las reglas básicas

Técnica	*Ejemplo*
Desarrollar (el numerador).	$(1+e^x)^2 = 1 + 2e^x + e^{2x}$
Separar el numerador.	$\dfrac{1+x}{x^2+1} = \dfrac{1}{x^2+1} + \dfrac{x}{x^2+1}$
Completar el cuadrado.	$\dfrac{1}{\sqrt{2x-x^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{1-(x-1)^2}}$
Dividir la función racional impropia.	$\dfrac{x^2}{x^2+1} = 1 - \dfrac{1}{x^2+1}$
Sumar y restar términos en el numerador.	$\dfrac{2x}{x^2+2x+1} = \dfrac{2x+2-2}{x^2+2x+1} = \dfrac{2x+2}{x^2+2x+1} - \dfrac{2}{(x+1)^2}$
Usar identidades trigonométricas.	$\cot^2 x = \csc^2 x - 1$
Multiplicar y dividir por el conjugado pitagórico.	$\dfrac{1}{1+\operatorname{sen} x} = \left(\dfrac{1}{1+\operatorname{sen} x}\right)\left(\dfrac{1-\operatorname{sen} x}{1-\operatorname{sen} x}\right) = \dfrac{1-\operatorname{sen} x}{1-\operatorname{sen}^2 x} = \dfrac{1-\operatorname{sen} x}{\cos^2 x} = \sec^2 x - \dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos^2 x}$

Integrales impropias (Larson, pag. 580-586; Thomas pag. 478-486)

DEFINICIÓN DE INTEGRALES IMPROPIAS CON LÍMITES DE INTEGRACIÓN INFINITOS

1. Si f es continua en el intervalo $[a, \infty)$, entonces:

$$\int_a^\infty f(x)dx = \lim_{b\to\infty} \int_a^b f(x)dx$$

2. Si f es continua en el intervalo $(-\infty, b]$, entonces:

$$\int_{-\infty}^b f(x)dx = \lim_{a\to-\infty} \int_a^b f(x)dx$$

3. Si f es continua en el intervalo $(-\infty, \infty)$, entonces:

$$\int_{-\infty}^\infty f(x)dx = \int_{-\infty}^c f(x)dx + \int_c^\infty f(x)dx \, , c \in \mathbb{R}$$

DEFINICIÓN DE INTEGRALES IMPROPIAS CON DISCONTINUIDADES INFINITAS

1. Si f es continua en el intervalo $[a, b)$, y tiene una discontinuidad infinita en b entonces:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{c \to b^-} \int_a^c f(x)dx$$

2. Si f es continua en el intervalo $(a, b]$, y tiene una discontinuidad infinita en a, entonces:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{c \to a^+} \int_c^b f(x)dx$$

3. Si f es continua en el intervalo $[a, b]$, excepto para algún c en (a, b) en que f tiene una discontinuidad infinita, entonces:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

En los casos 1 y 2, la integral impropia converge si el límite existe, de otra forma, diverge. En el caso 3, la integral impropia en la izquierda diverge si alguna de las integrales impropias de la derecha diverge.

Un tipo especial de Integral impropia

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^p} = \begin{cases} \dfrac{1}{p-1} & si\ p > 1 \\ diverge & si\ p \le 1 \end{cases}$$

Criterios para convergencia y divergencia

Cuando no podemos evaluar de manera directa una integral impropia, tratamos de determinar si converge o diverge. Los principales criterios para convergencia o divergencia son la comparación directa y la comparación del límite.

CRITERIO DE COMPARACIÓN DIRECTA

Sean f y g continuas en $[a, \infty)$ con $0 \leq f(x) \leq g(x)$ para toda $x \geq a$. Entonces

$\int_a^{\infty} f(x)dx$ converge si $\int_a^{\infty} g(x)dx$ converge

$\int_a^{\infty} f(x)dx$ diverge si $\int_a^{\infty} g(x)dx$ diverge

Ejemplos:

$\int_1^{\infty} \frac{sen^2 x\, dx}{x^2}$, converge ya que $0 \leq \frac{sen^2 x}{x^2} \leq \frac{1}{x^2}$ sobre $[1, \infty)$ y $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx$ converge.

$\int_1^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2 - 0{,}1}} dx$, diverge ya que $\frac{1}{\sqrt{x^2 - 0{,}1}} \geq \frac{1}{x}$ sobre $[1, \infty)$ y $\int_1^{\infty} \frac{1}{x} dx$ diverge.

CRITERIO DE COMPARACIÓN DEL LÍMITE

Si las funciones positivas f y g son continuas en $[a, \infty)$ y si

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = L, \qquad 0 < L < \infty$$

entonces

$$\int_a^\infty f(x)dx \qquad \text{y} \qquad \int_a^\infty g(x)dx$$

Ambas convergen o ambas divergen.