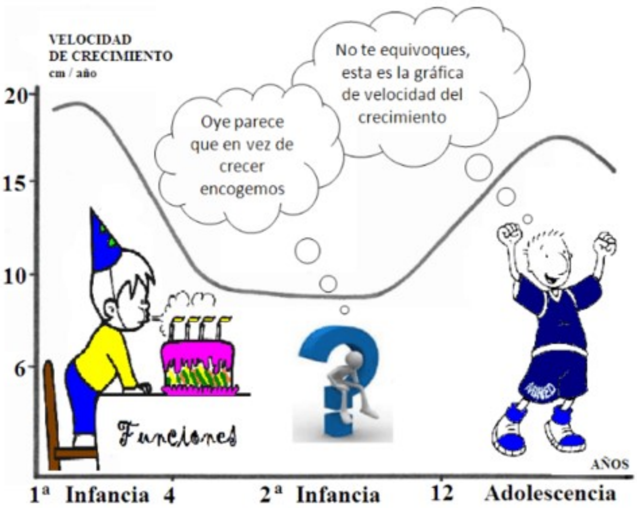
INGRESO 2020- Segundo Semestre

“Funciones y sus Operaciones”



Unidad 4

El material que compone estas notas ha sido elaborado por el Prof. Fernando Condori y la Ing. Miranda Virginia revisado por las profesoras Estrellita Sobisch y Gisela Fitt.

La finalidad de este es brindarles a todos los estudiantes que cursen el módulo de Matemática, del curso de Ingreso de la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales de la Universidad Nacional de Cuyo, (o cualquier otro curso de Ingreso a la Universidad), la posibilidad de revisar conceptos y habilidades de la disciplina adquiridos en el nivel medio y que son necesarios para poder cursar exitosamente las materias del Ciclo Básico.

Para el mismo se utilizaron las notas de clases de los docentes y como bibliografía principal, la indicada al final del apunte.

En este apunte encontrarán contenidos básicos de:

- Definición de función.
- Gráficas de funciones.
- Función lineal afín y función cuadrática.
- Función valor absoluto y distancia.
- Funciones racionales.
- Funciones crecientes y decrecientes.
- Transformaciones de funciones. Traslaciones horizontales, verticales y expansiones.
- Modelado con funciones y aplicación a resolución de problemas.
- Composición de funciones.
- Inyectividad, sobreyectividad y biyectividad.
- Función inversa.

FUNCIONES

Se usa el término $\boldsymbol{función}$ para describir la dependencia de una cantidad respecto de otra.

Ejemplo

- la estatura depende de la edad,
- la temperatura depende de la época del año,
- el costo de enviar por correo un paquete depende de su peso

Decimos que:

- La altura es una función de la edad.
- La temperatura es una función de la época del año.
- El costo de enviar por correo un paquete es una función del peso.

Definición de función

Una función es una regla. Para hablar acerca de una función, se requiere asignarle un nombre. Se emplearán letras como f, g, h, . . . para representar funciones. Por ejemplo, se puede usar la letra f para representar una regla como sigue:

"*f*" es la regla "cuadrado del número"

Cuando se escribe *f (2),* se entiende "aplicar la regla *f* al número 2". Al aplicar la regla se obtiene f (2) = 2^2 = 4. De manera similar f (3) = 3^2 = 9, f (4) = 4^2 = 16 y en general
f(x) = x^2.

"Una función f es una regla que asigna a cada elemento x en un conjunto A exactamente un elemento, llamado $f(x)$, en un conjunto B".

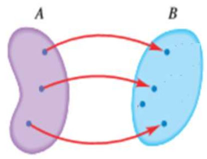
Por lo general, se consideran funciones para las cuales los conjuntos A y B son conjuntos de números reales. El símbolo $f(x)$ se lee "f de x" o "f en x" y se llama el valor de $\boldsymbol{f}$ **en** $\boldsymbol{x}$, o la **imagen de** $\boldsymbol{x}$ **por** $\boldsymbol{f}$. El conjunto A se llama **dominio** de la función. El **rango** de *f* es el conjunto de los valores posibles de $f(x)$ cuando x varía a través del dominio, es decir,

rango de *f* = { *f*(x) | x ∈ A}

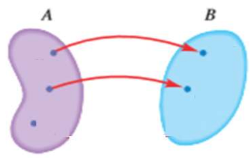
Tenemos que:

"a cada elemento x en un del conjunto A"

Significa: "a todos" $\longrightarrow$ EXISTENCIA



Es función

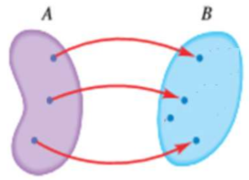


No es función

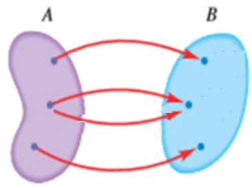
También tenemos que:

"exactamente un elemento, $f(x)$, en B"

Significa: "parte una sola flecha de cada x" $\longrightarrow$ UNICIDAD



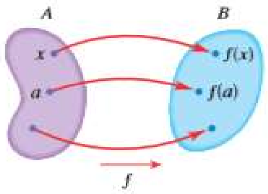
Es función



No es función

Un dato importante:

- El símbolo $\boldsymbol{x}$, que representa un número arbitrario en el dominio de una función f se llama variable independiente.
- El símbolo que representa un número en el rango de *f* se llama variable dependiente. Representación simbólica *f(x)*



$$\boxed{y = f(x)}$$

Hemos analizado un poco de la teoría de funciones, te proponemos el siguiente ejercicio.

EJERCICO N° 1: Dadas las siguientes expresiones funcionales en forma coloquial, escriba la correspondiente expresión analítica.

a) Un número real, elevado al cubo, disminuido en 8.
b) Un número real, elevado al cuadrado multiplicado por 5.
c) La raíz cuadrada de un número elevado al cubo.

Realizamos el inciso a), teniendo en cuenta la teoría analizada hasta el momento.

a) $x^2 - 8 = y$

- Resuelva los ítems restantes.

Prueba de la línea vertical

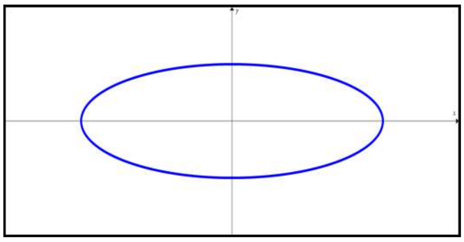
La gráfica de una función es una curva en el plano *xy.* Pero surge la pregunta: ¿qué curvas en el plano *xy* son gráficas de funciones? Esto se contesta mediante la prueba siguiente.

"Una curva en el plano coordenado es la gráfica de una función si y sólo si ninguna línea vertical corta la curva más de una vez"

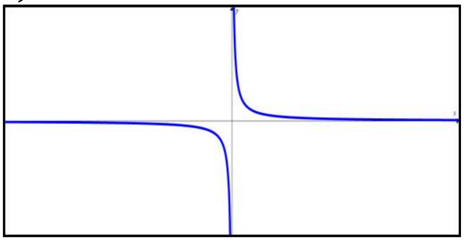
Aplicamos ésta prueba en el siguiente ejercicio del práctico:

EJERCICIO N° 2: Determine si la curva representada en cada caso es la gráfica de una función de *x*. Justifique su respuesta.

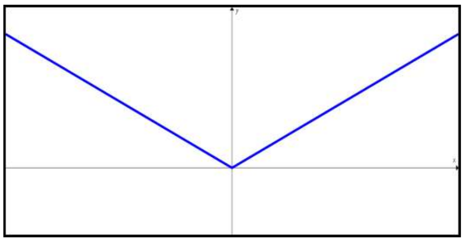
a)



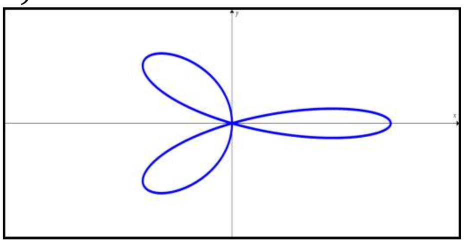
b)



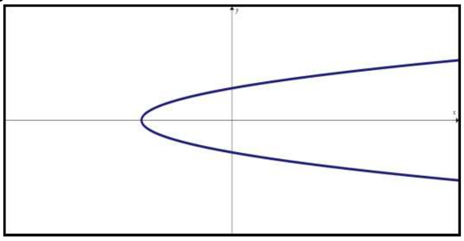
c)



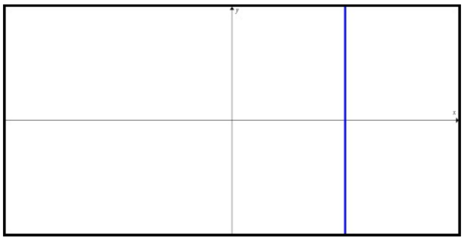
d)



e)



f)



Analizamos el gráfico:

a) **No es función**. Si realizamos la prueba de graficar una o más rectas verticales, éstas cortan en dos puntos de la gráfica por lo tanto no la relación no cumple la unicidad.

- Resuelva los ítems restantes.

Imagen de un número

En la definición de una función la variable independiente x desempeña el papel de "marcador de posición". Por ejemplo, la función $f(x) = 3x^2 + x - 2$ se puede considerar como:

$$f(\square) = 3 \cdot \square^2 + \square - 5$$

Para evaluar f en un número, se sustituye el número para el "marcador de posición".

Un ejemplo:

Sea $f(x) = 3x^2 + x - 5$. Evalúe cada valor de función.

a) $f(-2)$ b) $f(0)$ c) $f(4)$ d) $f(\frac{1}{2})$

Para calcular la imagen de un número por f, se sustituye **x** por el número en la definición de *f.*

a) $f(-2) = 3\cdot(-2)^2 + (-2) - 5 = 5$
b) $f(0) = 3\cdot 0^2 + 0 - 5 = -5$
c) $f(4) = 3\cdot 4^2 + 4 - 5 = 47$
d) $f(\frac{1}{2}) = 3\cdot(\frac{1}{2})^2 + \frac{1}{2} - 5 = -\frac{15}{4}$

EJERCICIO N° 3: Calcule las imágenes indicadas

a. $f(x) = 2x + 1\ en x = 1;\ x = -2;\ x = \frac{1}{2};\ x = a;\ x = -a;\ x = a + b$

b. $g(x) = x^2 + 2x\ en\ x = 0;\ x = 3;\ x = -3;\ x = a;\ x = -x;\ x = \frac{1}{a}$

c. $h(x) = \frac{1-x}{1+x}\ en\ x = 2;\ x = -2;\ x = \frac{1}{2};\ x = a;\ x = a - 1;\ x = -1$

d. $j(x) = \begin{cases} x\ si\ x < 0 \\ x + 1\ si\ x \geq 0 \end{cases}\ en\ x = -2;\ x = -1;\ x = 0;\ x = 1;\ x = 2$

e. $k(x) = \begin{cases} 5\ si\ x \leq 2 \\ 2x - 3\ si\ x > 2 \end{cases}\ en\ x = -3;\ x = 0;\ x = 2;\ x = 3;\ x = 5$

f. $f l(x) = \begin{cases} x^2 + 2x \ \text{ si x} \leq 1 \\ \text{x si -1} < \text{x} \leq 1 \\ \text{-1 si x} > 1 \end{cases}$ en $x = -4;\ x = -\frac{3}{2};\ x = -1;\ x = 0;\ x = 25$

Realizamos el ejercicio **a :** $f(x) = 2x + 1$
Calculamos la imagen para cada uno de los elementos *x:*

- $f(1) = 2(1) + 1 = 2 + 1 = 3$, por lo tanto*:* $f(1) = 3.$
- $f(-2) = 2(-2) + 1 = -4 + 1 = -3$, por lo tanto*:* $f(-2) = 3.$
- $f(1/2) = 2(1/2) + 1 = 1 + 1 = 2$, por lo tanto*:* $f(1/2) = 2.$
- $f(a) = 2(a) + 1 = 2a + 1$, por lo tanto*:* $f(a) = 2a + 1.$
- $f(-a) = 2(-a) + 1 = -2a + 1$, por lo tanto*:* $f(-a) = -2a + 1.$
- $f(a + b) = 2(a + b) + 1 = 2a + 2b + 1$, por lo tanto*:* $f(a + b) = 2a + 2b + 1.$

➢ Resuelva los ítems restantes.

Dominio de una función

➢ Llamamos dominio de la función al conjunto de todos los valores de x para los cuales $y = f(x)$, esté definida (sea número real). Se le suele simbolizar ***D, D(x); Dom***; ***Dom(f).***

Ejemplo:

El dominio de la función $f(x) = \frac{1}{x^2-4}$

La solución será un número real sólo si $x^2 - 4 \neq 0$, al despejar "x" obtenemos que $x_1 \neq 2$ o $x_2 \neq -2$.

Por lo tanto, el dominio es $Dom = R - \{-2, 2\}$.

NOTA:

Cuando no se especifica el dominio de la función, siempre se supondrá que es el mayor conjunto de números reales para los que la regla de la función tenga sentido y se obtenga como resultado (denominados *imagen)* números reales. Este se llama **dominio natural** de la función.

Imagen de una función

Es el conjunto formado por los elementos $\boldsymbol{f(x)}$ del conjunto de llegada ($\boldsymbol{B}$) que son imágenes de elementos del conjunto de partida $\boldsymbol{A}$; $\boldsymbol{Dom(f)}$. Y se simboliza como $\boldsymbol{I}$; $\boldsymbol{Imag}$; $\boldsymbol{Ima(f)}$.

Ejemplo:

La imagen o rango de la función $f(x) = \frac{1}{x^2-4}$

La solución será un conjunto de números reales que toma la función $\boldsymbol{f(x)}$, para cada valor del dominio $Dom\,(f) = R - \{2;\ -2\}$.

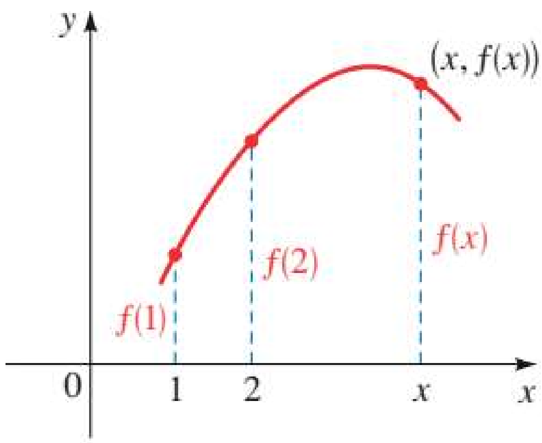
La imagen de $\boldsymbol{f(x)}$ será $Imag = R - \{0\}$

Gráfico de funciones

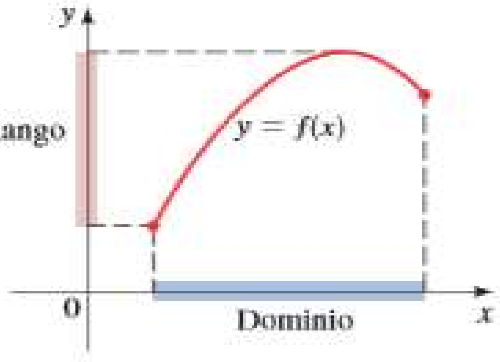
Si f es una función con dominio A, entonces la gráfica de f es el conjunto de pares ordenados

$$\{(x, f(x)) | x \in A\}$$

En otras palabras, la gráfica de f es el conjunto de los puntos (x, y) tales que $y = f(x)$; es decir, la gráfica de f es la gráfica de la ecuación $y = f(x)$.



La gráfica de una función ayuda a ilustrar el dominio y el rango de la función en el eje **x** y el eje **y** como se muestra:



CARACTERÍSTICAS Y PROPIEDADES DE FUNCIONES

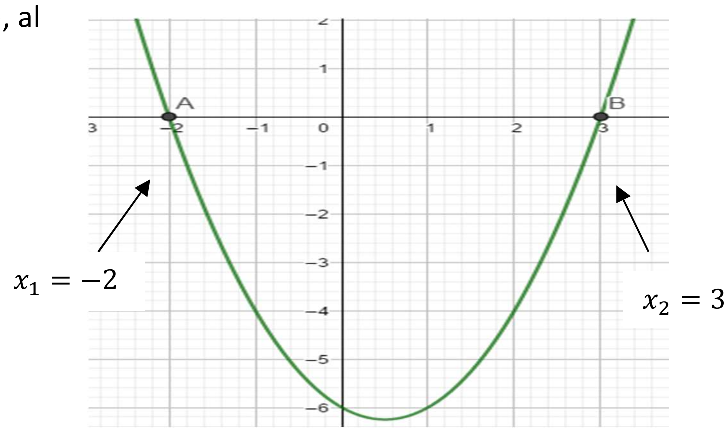
➢ Ceros o raíces de una función

Es necesario definir otros elementos que caracterizan a las funciones para poder luego analizarlas. Los ***ceros o raíces*** de una función son aquellos elementos del dominio cuya imagen es cero. Gráficamente los ceros son las abscisas (primera coordenada) de aquellos puntos de la gráfica de la función que intersecan, (cortan), al eje **x**.

Por ejemplo: $f(x)= x^2 - x - 6$

$x^2 - x - 6 = 0$

$x_1, x_2 = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4.1.(-6)}}{2.1} =$



➢ Indeterminación

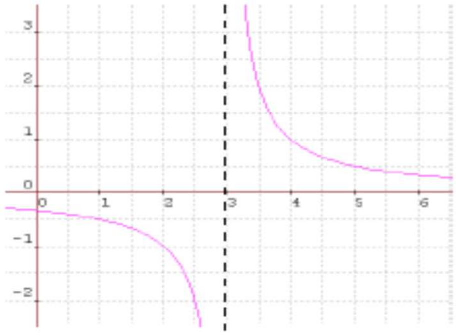
Dado una función del tipo $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$

Se llama ***indeterminación*** a los elementos del dominio que anulan el denominador.

Un ejemplo: Sea una función, $f(x) = \frac{1}{x-3}$

$$x - 3 \neq 0 \longrightarrow x \neq 3,$$

decimos que-, $Dom\ (f)$: $R - \{3\}$

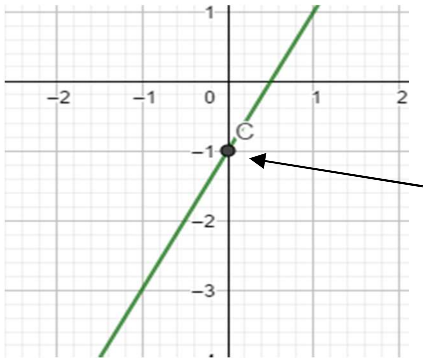


Para este valor de $\boldsymbol{x}$ la función no está definida y tiende a un valor muy grande (infinito). La recta definida por $\boldsymbol{x = 3}$ es una Asíntota Vertical.

- **Ordenada al origen**

  Llamamos ordenada al origen a la imagen de 0 por la función f (siempre que ese número exista). Gráficamente representa la ordenada (segunda coordenada) del punto de intersección de la gráfica con el eje y.

  Ejemplo: $f(x) = 2x + 1$; para x = 0 tenemos $f(0) = 2.0 - 1 = -1$, decimos que; la ordenada al origen de dicha función es $y = -1$ o $(0, -1)$.

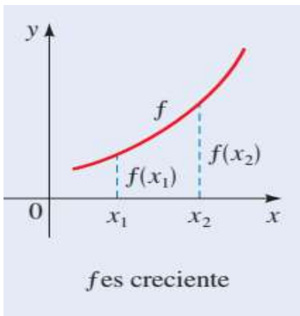


Ordenada al origen

- **Intervalo de crecimiento y de crecimiento**

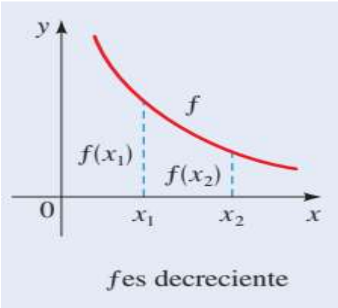
✓ Un intervalo de crecimiento de una función es un subconjunto $\boldsymbol{I}$ del dominio para el cual a mayores valores de la variable independiente $\boldsymbol{x}$ le corresponden mayores valores de la variable $\boldsymbol{y}$.

$$\forall\, \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{I}:\ \boldsymbol{x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)}$$



✓ Un intervalo de decrecimiento se presenta en el caso contrario al expuesto:

$$\forall\, \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{I}\!: \boldsymbol{x_1} < \boldsymbol{x_2} \Rightarrow \boldsymbol{f(x_1)} > \boldsymbol{f(x_2)}$$



➢ Intervalos de positividad y negatividad

Los conjuntos de Positividad y negatividad son intervalos del dominio, $Dom\ (f)$ de la función y representan los valores de $\boldsymbol{x}$ para los cuales la función $f(x)$ toma valores positivos o negativos.

✓ El *Conjunto o intervalo de Positividad ($C+$)* de una función es el subconjunto del dominio cuyas imágenes son números positivos.

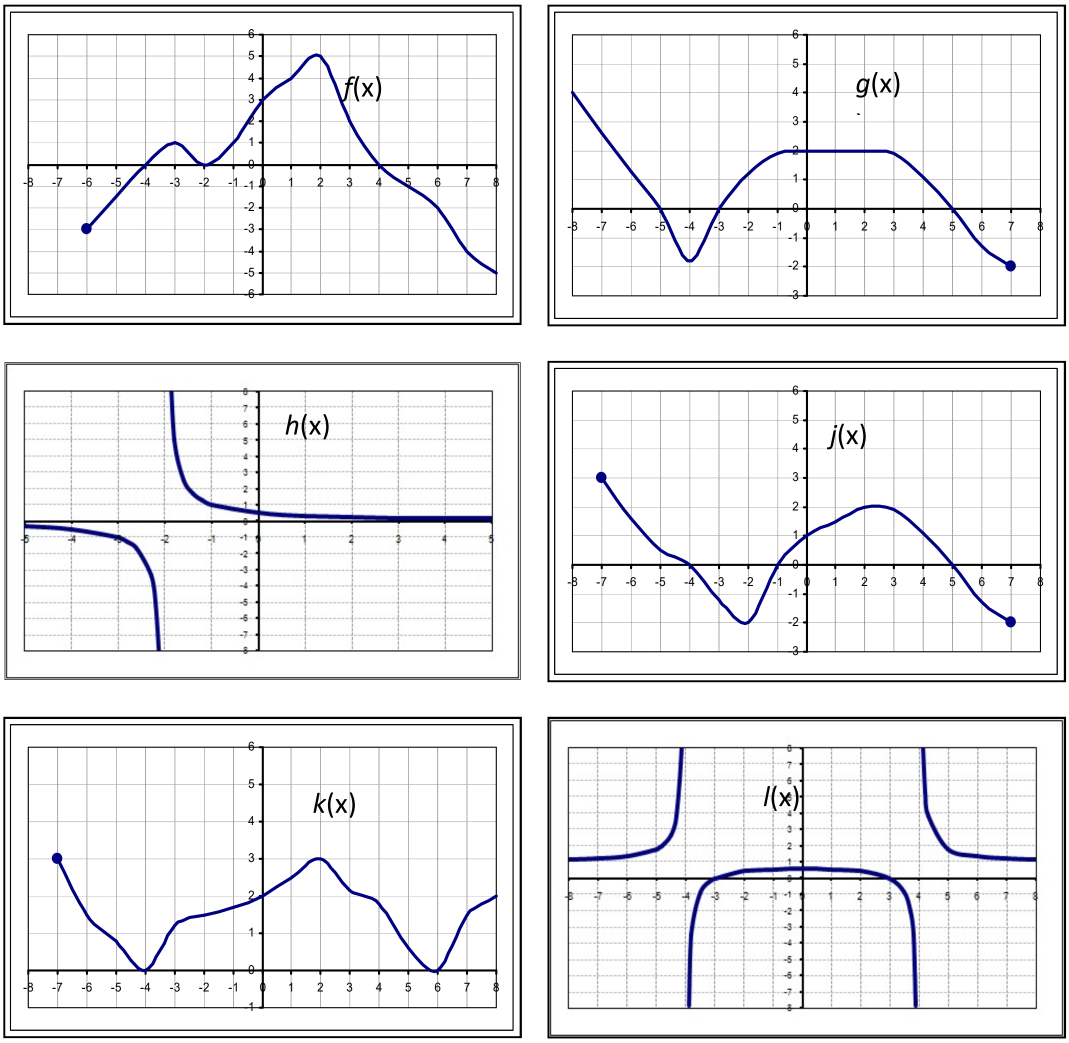
$$\forall\, \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{D(f)} \Rightarrow \boldsymbol{f(x)} > \boldsymbol{0}$$

✓ El *Conjunto o intervalo de Negatividad ($C-$)* de una función es el subconjunto del dominio cuyas imágenes son números negativos.

$$\forall\, \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{D(f)} \Rightarrow \boldsymbol{f(x)} < \boldsymbol{0}$$

Teniendo en cuenta todo lo analizado anteriormente, realizamos el siguiente ejercicio.

EJERCICIO N° 4. Dadas las siguientes funciones representadas gráficamente, identifique para cada una de ellas: dominio, imagen, ceros, ordenada al origen, indeterminaciones, conjuntos de negatividad y positividad, intervalos de crecimiento y decrecimiento.



Analizamos la gráfica l(x):

Para determinar el dominio, observemos el eje **x,** teniendo en cuenta el concepto, decimos que el $Dom(f) = R - \{-4, 4\}$.

Para determinar la imagen debemos observar el eje de las ***y***, podemos afirmar que $Im: R - \{1\}$.

Teniendo en cuenta que los ceros de una función son el/los punto/s donde la gráfica corta el eje **x**, afirmamos que: $x_1 = -3$, $x_2 = 3$, son los ceros de esta función.

El punto en donde la gráfica corta el eje de **y** es la ordenada al origen: $I(0) = \frac{1}{2}$ al resolver tenemos que $y = \frac{1}{2}$.

Para los valores $x_1 = -4$ y $x_2 = 4$ la función no está definida y tiende al infinito, es ahí en donde tenemos una indeterminación, en esta función las indeterminaciones son: $x_1 = -4$ y $x_2 = 4$

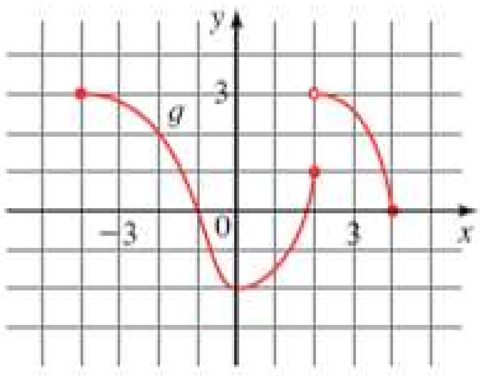
Al observar la gráfica, tenemos partes de la misma que está por encima del eje **x**, en esos intervalos la variable dependiente toma valores positivos, es decir que los intervalos de positividad de esta gráfica son: $C+: (-\infty, -4) \cup (-3,3) \cup (4, \infty)$.

Si observamos la gráfica, tenemos partes de la misma que está por debajo del eje **x**, en esos intervalos la función es negativa, es decir que los intervalos de negatividad de esta gráfica son: $C-: (-4,-3) \cup (3,4)$.

Podemos analizar que la gráfica tiene diferentes comportamientos, y teniendo en cuenta la teoría, podemos afirmar que los intervalos de crecimiento son:
$(-\infty, -4) \cup (-4, 0)$ y los intervalos de decrecimiento: $(0, 4) \cup (4, \infty)$.

- Resuelva los ítems restantes.

EJERCICIO N° 5: Dada la representación gráfica de la función $g(x)$.



a. Determine: $g(-4)$, $g(-2)$, $g(0)$, $g(2)$ y $g(4)$
b. Determine los valores de x para los cuales se cumple: $g(x) = 3$, $g(x) = 2$, $g(x) = 0$ y $g(x) = -2$
c. Halle el dominio y el rango de $g(x)$
d. Encuentre los ceros y la ordenada al origen.
e. Identifique intervalos de crecimiento y decrecimiento.

EJERCICIO N° 6. Dadas las siguientes funciones expresadas a través de su forma algebraica, identifique para cada una de ellas: dominio, ceros, ordenada al origen, indeterminaciones, conjuntos de negatividad y positividad.

a) $f(x) = 3x - 5$

b) $g(x) = x^2 - 2x$

c) $h(x) = \dfrac{3x}{x-1}$

d) $j(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x + 4}$

e) $k(x) = \dfrac{3x - 2}{x^2 - 4x - 5}$

f) $l(x) = \sqrt{2x - 5}$

g) $m(x) = \dfrac{\sqrt{3x + 2}}{x - 1}$

h) $n(x) = \dfrac{4x + 1}{\sqrt{x^2 + 1}}$

i) $\tilde{n}(x) = \dfrac{4x^2 - 25}{\sqrt{x^2 - 1}}$

Resolveremos la función $k\,(x)$.

e) $k(x) = \dfrac{3x - 2}{x^2 - 4x - 5}$

Analizaremos el dominio de la función.

Teniendo en cuenta que es una función racional, trabajaremos con el denominador de la función, buscando en qué valores se anula el mismo. Para ello al denominador lo igualamos a cero.

$x^2 - 4x - 5 = 0$

$x_{1,2} = \dfrac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4.1.(-5)}}{2.1} = \dfrac{4 \pm 6}{2}$

$x_1 = -1$

$x_2 = 5$

decimos que: $Dom(k) = R - \{-1, 5\}$.

Para encontrar los ceros de una función racional debemos resolver la ecuación $k\,(x) = 0$, podemos ver que se reduce a trabajar solo el numerador de la función, debemos igualar la expresión del numerador a cero.

$3x\ - 2\ =\ 0$ resolvemos

$$x\ =\ \frac{2}{3}$$

Decimos que es un cero de la función en: $\boldsymbol{x = \frac{2}{3}}$.

Para determinar la ordenada de la función, calculamos $k(0)$:

$$k(0) = \frac{3.\ 0-2}{0^2-4.0-5} = \frac{2}{5}$$

Por lo tanto, la ordenada al origen: $\left(0, \frac{2}{5}\right)$ o $y = \frac{2}{5}$.

Analizar el dominio nos brinda mucha información a la hora de analizar la indeterminación de una función, teniendo en cuenta que hay dos valores para los cuales la función no está definida y tiende al infinito, concluimos que hay indeterminaciones en: $x_1\ =\ -1\ y\ x_2\ =\ 5$.

Para analizar el conjunto de positividad y negatividad podemos armar un cuadro teniendo en cuenta los ceros y los datos del dominio:

Intervalos de análisis	$(-\infty\,,-1)$	-1	$\left(-1,\frac{2}{3}\right)$	$\frac{2}{3}$	$\left(\frac{2}{3}\ 5\right)$	5	$(5, \infty)$
Valor de referencia $\boldsymbol{t}$	$t = -2$	$t = -1$	$t = 0$	$t = 2/3$	$t = 1$	$t = 5$	$t = 6$
Signo de $\boldsymbol{f(t)}$	-	$no\ está\ definida$	+	0	-	$no\ está\ definida$	+

Entonces, deducimos que: $C+: \left(-1, \frac{2}{3}\right) \cup (5, \infty +)\ y\ C-: (-\infty, -1)\ \cup\ \left(\frac{2}{3}, 5\right)$.

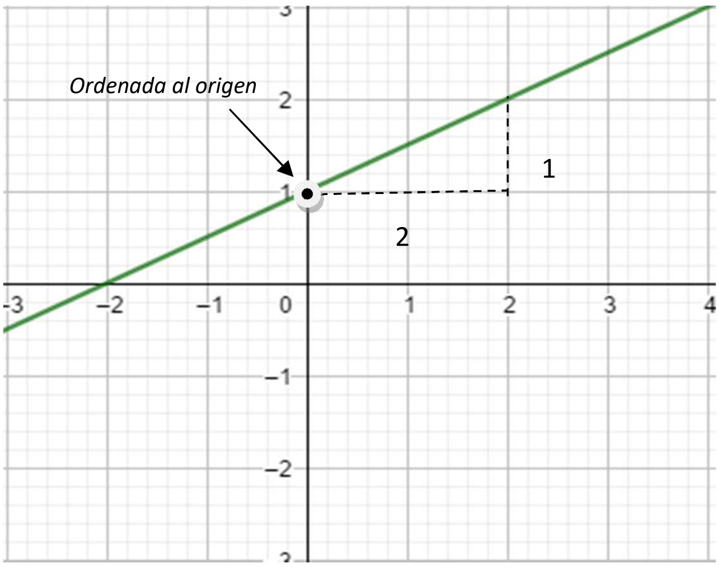
- Resuelva los ítems restantes.

Función Lineal – Afín

Una función f de la forma $f(x)\ =\ mx\ + n$ se llama ***función afín*** *(o también polinómica de primer grado)* porque su gráfica es la de la ecuación $y\ =\ mx\ +\ n$, que representa una recta con pendiente $\boldsymbol{m}$ y ordenada al origen n.

Ejemplo:

$$f(x)\ =\ \frac{1}{2}\,x\ +\ 1$$



Observaciones:

$f(x) = mx + n$ → **Función Afín**

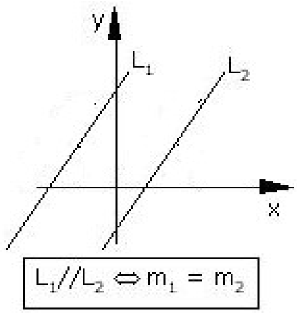
Las gráficas de las funciones afines **NO** necesariamente pasan por el origen ya que n puede tomar cualquier valor real

$f(x) = mx$ → **Función Lineal**

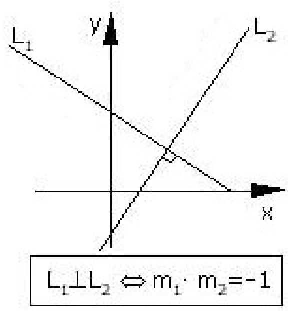
La gráfica de las funciones lineales pasan por el origen ya que $n = 0$.

Rectas paralelas y perpendiculares

- Dadas dos rectas $L_1(x) = m_1x + n_1$ y $L(x) = m_2x + n_2$, se dicen que son ***paralelas*** cuando sus pendientes son iguales, es decir, $m_1 = m_2$.



- Dadas dos rectas, $L_1(x) = m_1x + n_1$ y $L_2(x) = m_2x + n_2$,se dicen que son ***perpendiculares*** cuando sus pendientes son opuestas e inversas, es decir: $m_1 . m_2 = -1$, $m_2 = -\frac{1}{m_1}$



Ecuaciones de la recta

Dos puntos en el plano P $(P\ (x_1, y_1)\ )$ y $Q(x_2, y_2)$, determinan una única recta. Si queremos encontrar la ecuación de la recta que pase por esos puntos, podemos utilizar las siguientes ecuaciones:

- Si no conocemos su pendiente: $y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} . (x - x_1)$.
- Si conocemos su pendiente: $y - y_1 = m . (x - x_1)$.

Ejercicio N° 7: Dadas las siguientes rectas,

$$y_1 = -\frac{5}{2}x - 2$$

$$y_2 = 2x + 3$$

$$y_3 = \frac{5}{3}x$$

$$y_4 = -x + 4$$

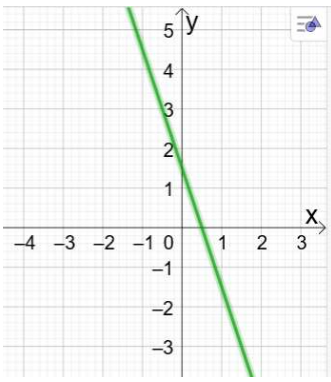
$$y_5 = -3x + \frac{3}{2}$$

$$y_6 = x - \frac{1}{2}$$

a) Represente gráficamente cada una de ellas.
b) Encuentre de forma analítica el cero y la ordenada al origen de cada una.
c) Halle la ecuación de una recta paralela y otra perpendicular en cada caso. Represente gráficamente.
d) Encuentre para cada recta, la paralela que pasa por el punto P de coordenadas $(-1, 5)$ y la perpendicular que pasa por el punto Q de coordenadas $(3, -2)$

Analizamos la $y_5 = -3x + \frac{3}{2}$**,** para que puedas guiarte en las resoluciones de otras funciones.

a) Para graficar rectas, basta con graficar dos puntos, por lo tanto si marcamos la ordenada al origen $n = 3/2$ en el eje de las ordenadas (eje y) y a partir de ella analizamos la pendiente que es $m = -3$ tenemos que trasladarnos verticalmente 3 unidades hacia abajo y trasladarnos horizontalmente 1 unidad a la derecha. De esa forma tendremos dos puntos que determinan la recta $y_5 = -3x + \frac{3}{2}$.



b) **Cero:** $-3x + \frac{3}{2} = 0$

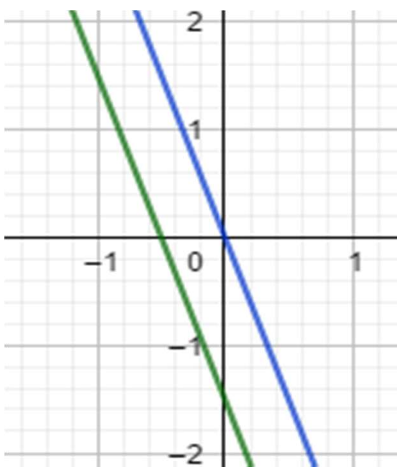
$$-3x + \frac{3}{2} - \frac{3}{2} = 0 - \frac{3}{2}$$
$$-3x = -\frac{3}{2}$$
$$-3x.(-\tfrac{1}{3}) = -\frac{3}{2}.(-\tfrac{1}{3})$$
$$x = \frac{1}{2}$$

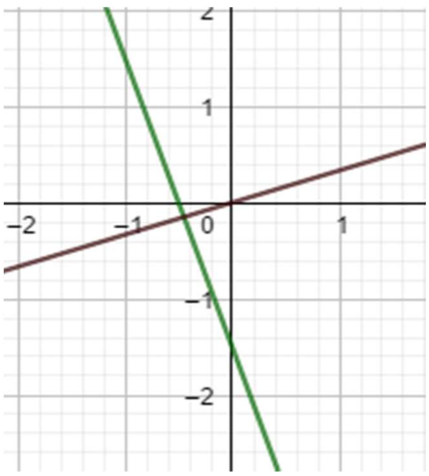
Ordenada de Origen:

$$y = -3.0 + \frac{3}{2}$$
$$y = \frac{3}{2}$$

c) Si tenemos en cuenta la teoría sobre rectas paralelas, elegimos una expresión que tenga la misma pendiente, podemos decir que una recta paralela puede ser: $y = -3x$

Si tenemos en cuenta la teoría sobre rectas perpendiculares, elegimos una expresión que tenga la pendiente opuesta y recíproca, podemos decir que una recta perpendicular puede ser: $y = \frac{1}{3}x$





d) Si utilizamos la expresión de la ecuación de la recta conociendo la pendiente y como debemos encontrar la paralela que pase por $P\ (-1, 5)$ realizamos:

$y - 5 = -3.[\,x - (-1)]$ sustituimos el punto en la expresión y la misma pendiente.

$y - 5 = -3.(x + 1)$ arreglamos convenientemente el SM, aplicamos propiedad distributiva SM.

$y - 5 + 5 = -3x - 3 + 5$ sumamos ambos miembros el opuesto de -5.

$y = 3x + 2$ Ecuación de la recta paralela.

Si utilizamos la expresión de la ecuación de la recta conociendo la pendiente y como debemos encontrar la perpendicular, (utilizamos la pendiente opuesta y recíproca), que pase por $Q\ (3, -2)$, realizamos:

$y - (-2) = \frac{1}{3}.(x - 3)$ sustituimos el punto en la expresión y la pendiente opuesta y recíproca.

$y + 2 = \frac{1}{3}\,x - 1$ arreglamos conveniente el PM aplicamos propiedad distributiva en el SM.

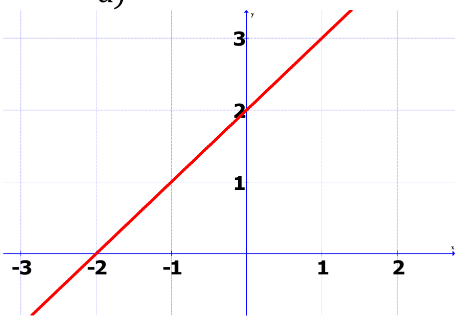
$y + 2 - 2 = \frac{1}{3}\,x - 1 - 2$ sumamos ambos miembros el opuesto de 2

$y = \frac{1}{3}\,x - 3$ Ecuación de la recta perpendicular

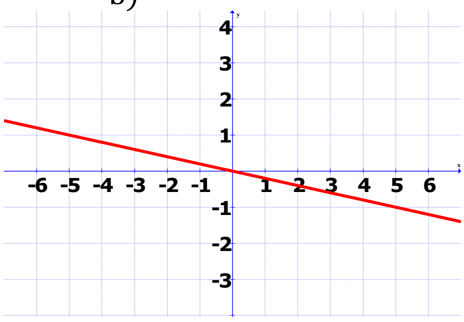
➢ Resuelva los ítems restantes.

Ejercicio N° 8: Dadas las siguientes funciones lineales representadas gráficamente:

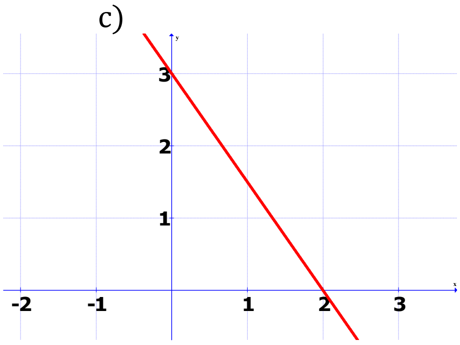
a)



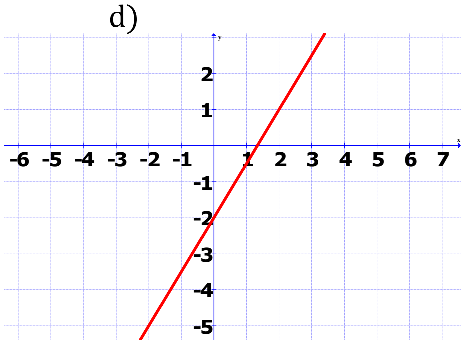
b)



c)



d)



a. Halle la expresión algebraica explícita de cada una de ellas.
b. Encuentre de forma analítica el cero y la ordenada al origen de cada función. Verifique gráficamente.
c. Halle, para cada una de ellas, la ecuación de la recta paralela que pase por el punto P de coordenadas $(2, 2)$ y la recta perpendicular que pase por el punto Q de coordenadas $(-3, -1)$Represente gráficamente.

Analizamos a1:

a) Desde la gráfica podemos determinar dos puntos de la recta, $(-2{,}0)$ y $(1{,}3)$ y debemos hallar ya ecuación explícita que pase por esos puntos.

Usamos la expresión de la ecuación de la recta desconociendo su pendiente, podemos usar cualquiera de los puntos, tenemos:

$y - 3 = \frac{3-0}{1-(-2)}\,.(x - 1)$ sustituimos los valores en la expresión.

$y - 3 = \frac{3}{3} \cdot (x - 1)$ resolvemos buscando la pendiente

$y - 3 = 1.(x - 1)$ aplicamos propiedad distributiva

$y - 3 = x - 1$

$y - 3 + 3 = x - 1 + 3$ sumamos ambos miembros el opuesto de - 3

$\boldsymbol{y = x + 2}$ Ecuación de la recta

b) *Ceros*: $x + 2 = 0$

$x - 2 + 2 = 0 + 2$

$x = 2$

Ordenada al origen:

$y = 0 + 2$

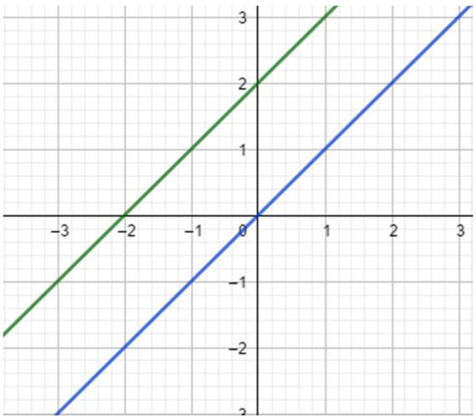
$y = 2$

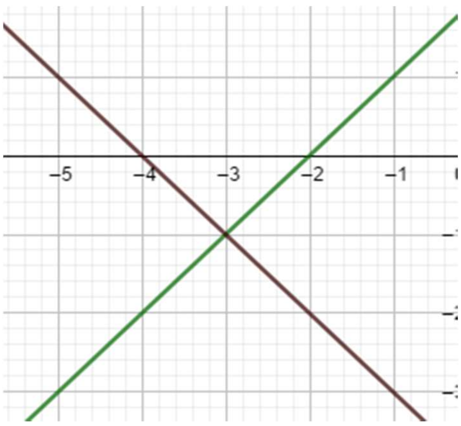
c) Determinamos la ecuación de una recta *paralela* que pase por el punto $P\ (2, 2)$, al ser paralela la pendiente será 1 y utilizando la ecuación de una recta conociendo su pendiente tenemos que es: $y - 2 = x - 2$

$$y = x$$

Determinamos la ecuación de una recta p*erpendicular* que pase por el punto $Q(-3, -1)$, al ser paralela la pendiente será (-1) y utilizando la ecuación de una recta conociendo su pendiente tenemos que: $y + 1 = -(x + 3)$

$$y = -x - 4$$





➢ Resuelva los ítems restantes.

Ejercicio N° 9: Dados los puntos $A(0,3)$ y $B(-4\,,0)$:

a. Representarlos en el gráfico, identificando cada uno de ellos.
b. Trazar la recta que une A y B.
c. A partir del gráfico , completar la siguiente tabla:

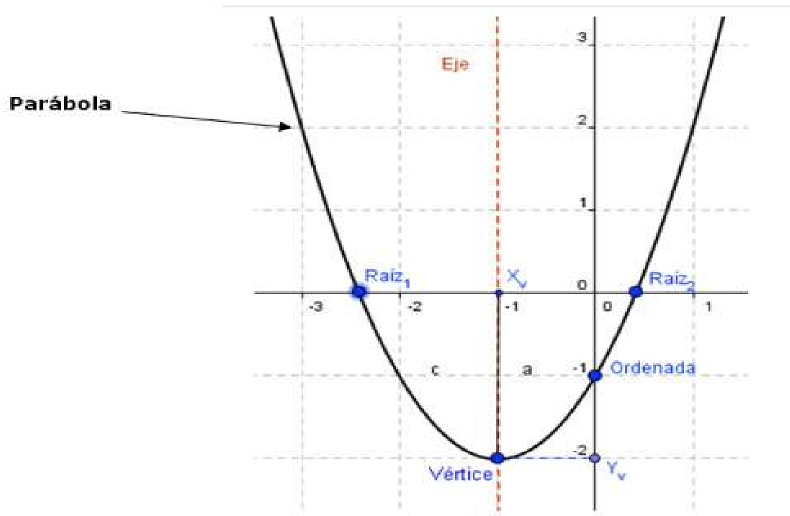
Ecuación	Pendiente	O. al origen	Cero	E. de una recta perpendicular

d. Representar gráficamente la recta perpendicular que fue elegida en el inciso anterior.

Función cuadrática

Una función cuadrática es una función de la forma $\boldsymbol{f(x) = ax^2 + bx + c}$, donde a, b y c son números reales, con a distinto de cero ($a \neq 0$).

La gráfica de una función cuadrática es una **parábola**.

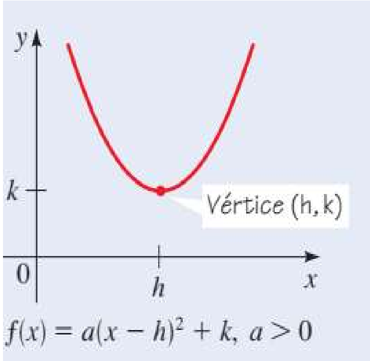


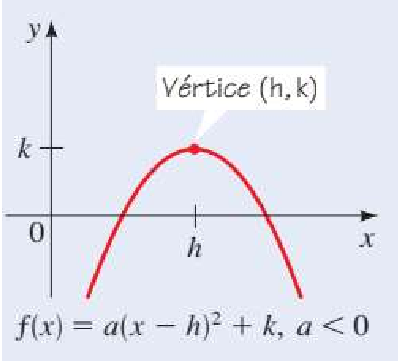
FORMA ESTÁNDAR O CANÓNICA

Una función cuadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ se puede expresar en la **forma estándar o canónica**:

$$\boldsymbol{f(x) = a.(x-h)^2 + k}$$

completando el cuadrado. La gráfica de f es una parábola con vértice $V(h, k)$, la parábola se abre hacia arriba si $a > 0$ o hacia abajo si $a < 0$.

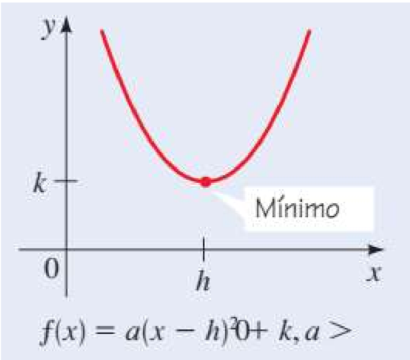


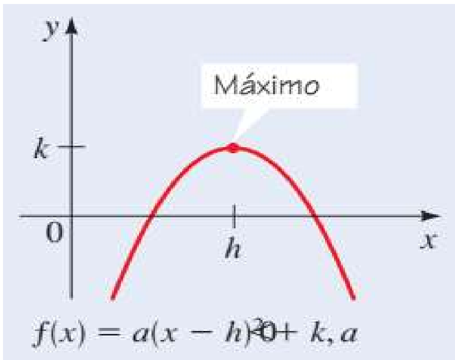


VALORES MÁXIMOS Y MÍNIMOS

Sea f una función cuadrática con la forma estándar $f(x) = a.(x-h)^2 + k$ el valor máximo o mínimo de f en $x = h$.

- Si $a > 0$, entonces el valor mínimo de f es $f(h) = k$
- Si $a < 0$, entonces el valor mínimo de f es $f(h) = k$





El valor máximo o mínimo de una función cuadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ ocurre en

$$x = -\frac{b}{2.a}$$

- Si $a > 0$, entonces el valor mínimo es $f(-\frac{b}{2.a})$.
- Si $a < 0$, entonces el valor máximo es $f(-\frac{b}{2.a})$.

FORMA FACTORIZADA

Se llama expresión **factorizada** de la función cuadrática a aquella que se forma en función de los ceros:

$$\boldsymbol{f(x) = a.(x - x_1).(x - x_2).}$$

Para encontrar las raíces de una función cuadrática podemos utilizar la siguiente expresión o fórmula:

$$x_1, x_2 = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4.a.c}}{2.a}$$

$\Delta = b^2 - 4.a.c$, a esta expresión se lo llama **discriminante**, nos brinda información respecto sus ceros o raíces.

- Si $b^2 - 4.a.c > 0$, se obtiene *dos raíces* reales diferentes.
- Si $\mathrm{b}^2 - 4.a.c = 0$, se obtiene *dos raíces* reales e iguales.
- Si $\mathrm{b}^2 - 4.a.c < 0$, *no tiene raíces* reales en el conjunto de los números reales.

Ejercicio N° 10: Dadas las siguientes funciones cuadráticas,

$y_1 = -x^2 - 3x + 4$

$y_2 = -2x^2 + 2x + 12$

$y_3 = -2x^2 - 3x + 2$

$y_4 = -x^2 + 5x$

$y_5 = x^2 - 3x + 4$

$y_6 = -x^2 + 16$

$y_7 = -x^2 + 2x - 5$

a) Halle el vértice, el eje de simetría, la ordenada al origen y los ceros (si existen)
b) Represente gráficamente.
c) Halle la forma canónica y factorizada.

Realizamos el análisis para la primer función cuadrática: $y_1 = -x^2 - 3x + 4$

a)

Ceros o Raíces:

$-x^2 - 3x + 4 = 0$ sus coeficientes son: $a = -1 \quad b = -3 \quad c = 4$

Usando la fórmula:

$$x_1, x_2 = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4.a.c}}{2.a}$$

Obtenemos las raíces:

$$x_1, x_2 = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4.(-1).4}}{2.(-1)} = \frac{3 \pm \sqrt{9+16}}{-2} = \frac{3 \pm \sqrt{25}}{-2} = \frac{3 \pm 5}{-2}$$

$x_1 = \frac{3+5}{-2} = \frac{8}{-2} = -4$

Entonces las raíces son: $x_1 = -4 \;\; y \;\; x_2 = 1$

$x_2 = \frac{3-5}{-2} = \frac{-2}{-2} = 1$

Gráficamente serán los puntos de coordenadas $A(-4{,}0) y\ B(1{,}0)$

<u>Vértice:</u>

Como el vértice es un punto en su representación gráfica, debemos calcular las siguientes coordenadas, $V\ (h, k)$. Para encontrar h debemos determinar:

$$h = -\frac{b}{2.a}$$

Con los datos de este ejercicio obtenemos lo siguiente:

$$h = -\frac{b}{2.a} = -\left(\frac{-3}{2.(-1)}\right) = -\left(\frac{-3}{-2}\right)$$

$$h = -\frac{3}{2}$$

Luego calculamos $y_1\left(-\frac{3}{2}\right) = k$

$$k = -(-\frac{3}{2})^2 - 3.(-\frac{3}{2}) + 4$$

$$k = -\frac{9}{4} + \frac{9}{2} + 4$$

$$k = \frac{25}{4}$$

Entonces el vértice es:

$$V\left(-\frac{3}{2}, \frac{25}{4}\right)$$

<u>Eje de simetría</u>

Para obtener el eje de simetría debemos utilizar la ecuación $x = h$

Continuando con el ejercicio tenemos que: $x = -\frac{3}{2}$

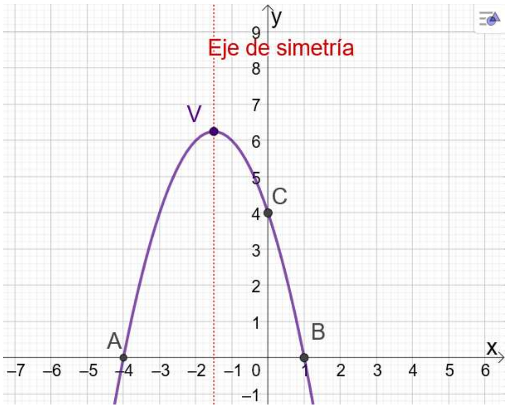
<u>Ordenada al origen</u>

Debemos evaluar a la función en $x = 0$:

$$y_1 = -0^2 - 3.0 + 4$$
$$y_1 = 4$$

Es decir que el punto en donde la gráfica corta el eje de ordenadas tiene coordenadas $C(0, 4)$.

b) Realizamos la gráfica e indicamos en ella los resultados anteriores:



c) Su forma ***canónica*** teniendo cuenta la expresión $\boldsymbol{f(x) = a.(x - h)^2 + k}$

en donde $V\ (h, k)$ es el vértice de la parábola, entonces en nuestro ejercicio tenemos:

$$V\left(-\frac{3}{2}, \frac{25}{4}\right) \longrightarrow y_1 = -1.[x - (-\tfrac{3}{2})]^2 + \frac{25}{4}$$

$$y_1 = -1.(x + \frac{3}{2})^2 + \frac{25}{4}$$

$$y_1 = -(x + 3/2)^2 + \frac{25}{4}$$

Teniendo en cuenta que, la expresión **factorizada** de la función cuadrática es aquella que se forma en función de los ceros: $\boldsymbol{f(x) = a.(x - x_1).(x - x_2)}$**,**

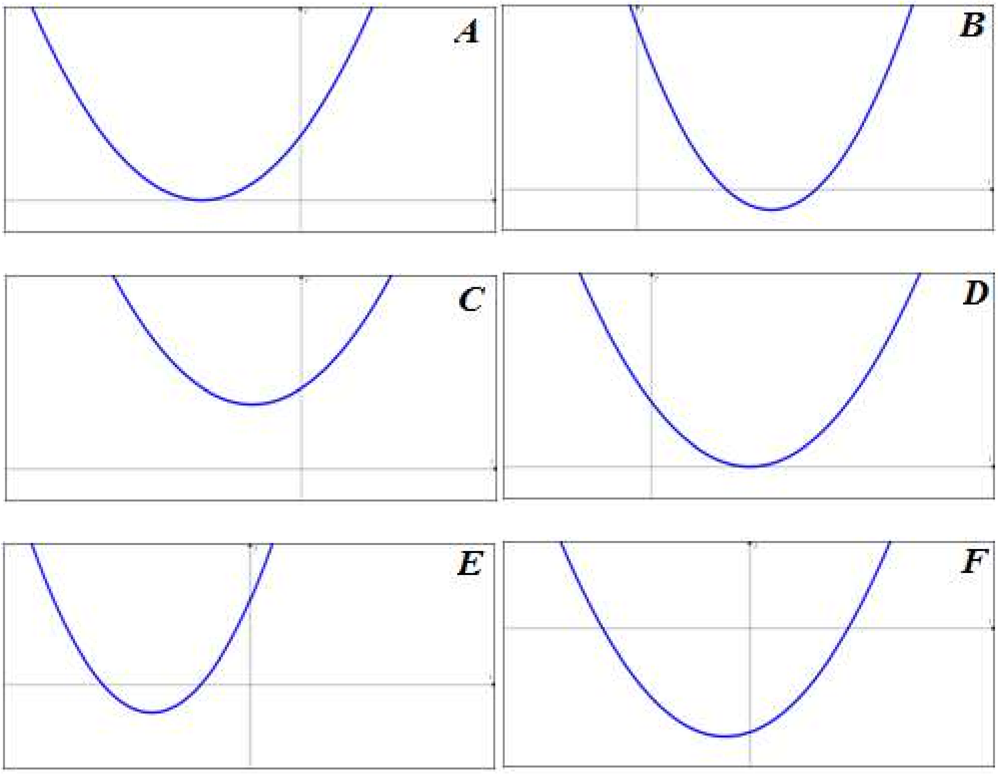
Como hemos analizado anteriormente las raíces son: $x_1 = -4\ \ y\ \ x_2 = 1$, por lo tanto la forma factorizada y_1 es:

$$y_1 = -1.[x - (-4)].(x - 1)$$

$$y_1 = -(x + 4).(x - 1)$$

- Resuelva los ítems restantes.

Ejercicio N° 11: Relaciona cada una de las gráficas de las siguientes funciones cuadráticas con la expresión algebraica correspondiente, a partir del cálculo de la discriminante.



I	$= x^2 + x - 6$	IV	$y_4 = x^2 + 2x + 5$
II	$= x^2 + 4x + 3$	V	$y_5 = x^2 + 4x + 4$
III	$= x^2 - 6x + 8$	VI	$y_6 = x^2 - 4x + 4$

Teniendo en cuenta que:

- Si $b^2 - 4.a.c > 0$, se obtiene *dos raíces* reales diferentes.
- Si $\mathrm{b}^2 - 4.a.c = 0$, se obtiene *dos raíces* reales e iguales.

  Si $\mathrm{b}^2 - 4.a.c < 0$, *no tiene raíces* reales en el conjunto de los números reales.

Trabajamos con la primera función: $y_1 = x^2 + x - 6$, teniendo en cuenta sus coeficientes analizamos el discriminante:

$$1^2 - 4.1.(-6) = 25$$

Al tener un número mayor que cero, sabemos que tiene dos raíces reales diferentes, podemos calcularlas como:

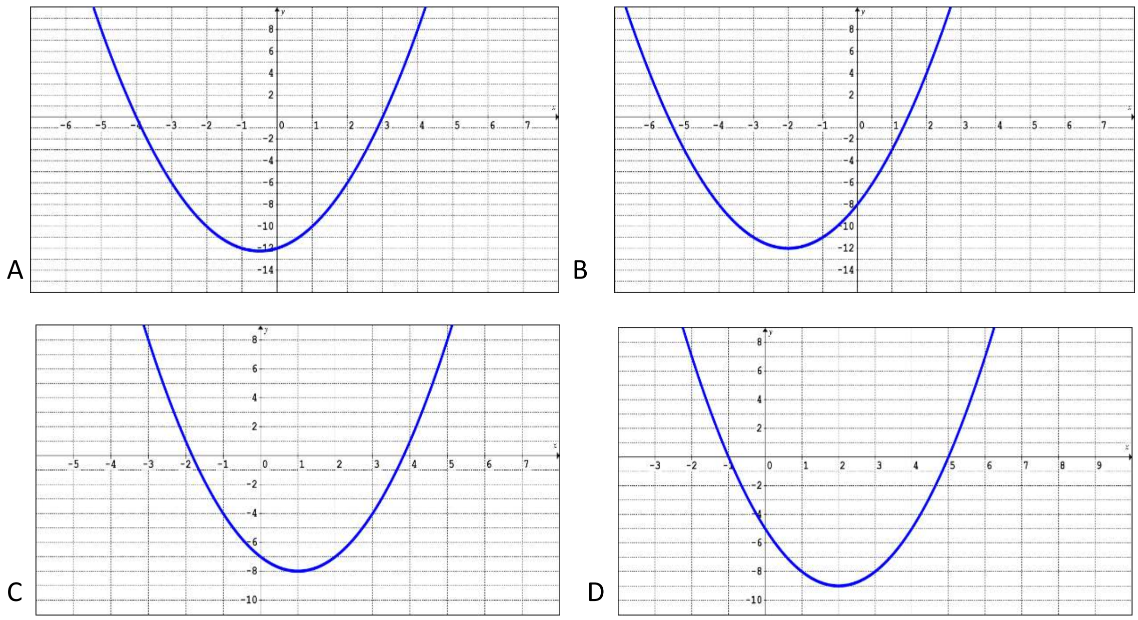
$x_1, x_2 = \frac{-1 \pm\sqrt{1^2 - 4.1.(-6)}}{2.1} = \frac{-1 \pm\sqrt{25}}{2} = \frac{-1 \pm 5}{2}$

$x_1 = -3$ y $x_2 = 2$

Como las raíces nos indican los cortes de la parábola con el eje de las abscisas tenemos que la gráfica de $y_1 = x^2 + x - 6$ es la F.

➢ Resuelva los ítems restantes

Ejercicio N° 12: Halla, a partir de las siguientes representaciones gráficas, la expresión algebraica correspondiente, considerando en todos los casos el coeficiente principal *a* = 1.



Para poder encontrar las expresiones de las siguientes gráficas podemos recurrir a información brindada por las misma, pudiendo identificar, sus ceros, vértice, ordenada al origen o a la combinación de estos elementos.

Analizamos la gráfica **A:**

Teniendo en cuenta la información de la primera gráfica y teniendo en cuenta que $a = 1$:

Los ceros o raíces son: $x_1 = -4$ y $x_2 = 3$, sabiendo que la expresión factorizada es:

$y = a.(x - x_1).(x - x_2)$

$y = [x - (-4)](x - 3)$ sustituimos los ceros en la expresión factorizada.

$y = (x + 4).(x - 3)$ aplicamos la propiedad distributiva.

$y = x^2 - 3x + 4x - 12$ operamos los términos semejantes.

Luego la expresión algebraica que buscamos es : $y = x^2 + x - 12$ **.**

➢ Resuelva los ítems restantes

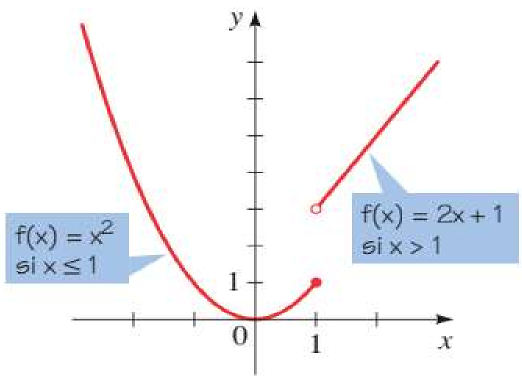
¿Hay otras funciones?...

Funciones definidas por partes:

Una función por partes se define mediante fórmulas distintas en diferentes partes de su dominio. Como se puede esperar, la gráfica de tal función consiste en trozos.
Vemos un ejemplo:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \leq 1 \\ 2x + 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Analizamos:
Si $x \leq 1$, entonces vale $f(x) = x^2$, la parte de la gráfica a la izquierda de $x = 1$.
Si $x > 1$, entonces vale $f(x) = 2x + 1$, de modo que la parte de la gráfica a la derecha de $x = 1$.
El punto sólido en $(1, 1)$ indica que este punto está incluido en la gráfica; el punto abierto en $(1, 3)$ indica que este punto está excluido de la gráfica.
Su gráfica es:



Ejercicio 13: Represente gráficamente cada una de las funciones definidas por partes.

a. $f(x) = \begin{cases} 0 & si\ x < 2 \\ 1 & si\ x \geq 2 \end{cases}$

b. $f(x) = \begin{cases} 1 - x & si\ x < -2 \\ 5 & si\ x \geq -2 \end{cases}$

c. $f(x) = \begin{cases} x & si\ x \leq 0 \\ x + 1 & si\ x > 0 \end{cases}$

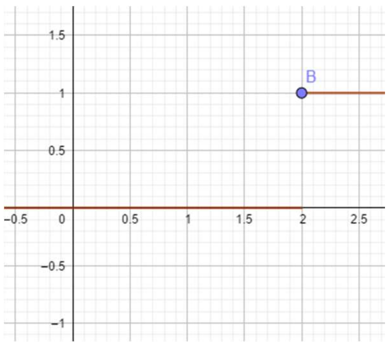
d. $f(x) = \begin{cases} 2x + 3 & si\ x < -1 \\ 3 - x & si\ x \geq -1 \end{cases}$

e. $f(x) = \begin{cases} 2 & si\ x < -1 \\ x^2 & si\ x \geq -1 \end{cases}$

f. $f(x) = \begin{cases} -x & si\ x \leq 0 \\ 9 - x^2 & si\ 0 < x \leq 3 \\ x - 3 & si\ x > 3 \end{cases}$

Analizamos la primera función:

a) $f(x) = \begin{cases} 0 & si\ x < 2 \\ 1 & si\ x \geq 2 \end{cases}$



➤ Resuelva los incisos faltantes.

Ejercicio N° 14: Represente gráficamente cada una de las siguientes funciones.

a. $y_1 = \sqrt{x}$

b. $y_2 = |x|$

c. $y_3 = \dfrac{1}{x}$

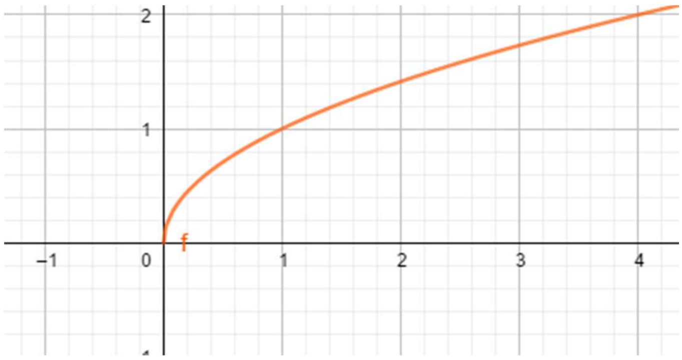
d. $y_4 = \sqrt{3x - 2}$

e. $y_5 = |2x - 1|$

f. $y_6 = \dfrac{x + 1}{x - 3}$

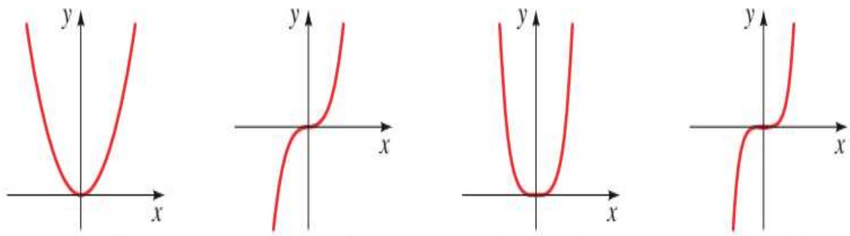
Realizamos la gráfica de una de las funciones de ejemplo:

$y_1 = \sqrt{x}$



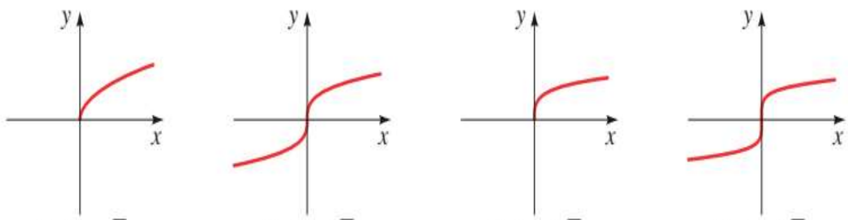
Te mostramos algunos modelos de otras funciones:

Funciones exponenciales
$f(x) = x^n$



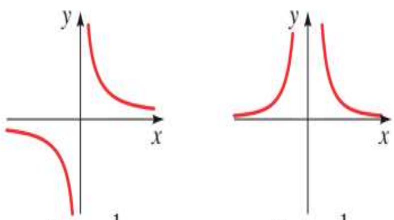
$f(x) = x^2$ $f(x) = x^3$ $f(x) = x^4$ $f(x) = x^5$

Funciones de raíz
$f(x) = \sqrt[n]{x}$

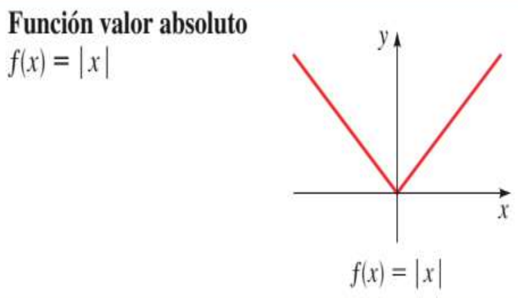


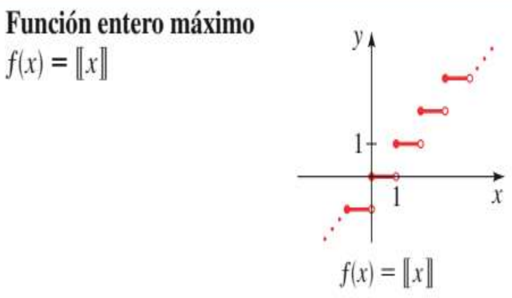
$f(x) = \sqrt{x}$ $f(x) = \sqrt[3]{x}$ $f(x) = \sqrt[4]{x}$ $f(x) = \sqrt[5]{x}$

Funciones recíprocas
$f(x) = 1/x^n$



$f(x) = \frac{1}{x}$ $f(x) = \frac{1}{x^2}$



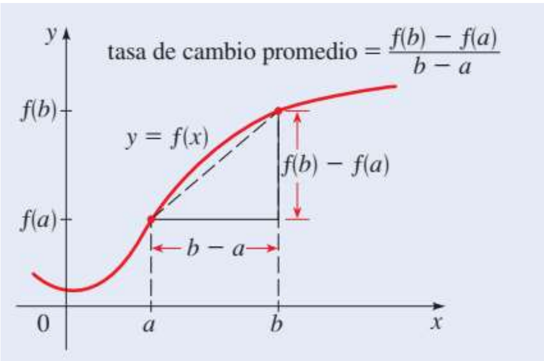


Tasa de tasa promedio

La **tasa de cambio promedio** de la función $y = f(x)$ entre $x = a$ y $x = b$ es:

$$Tasa\ de\ cambio\ promedio = \frac{cambio\ en\ y}{cambio\ en\ x} = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

La tasa de cambio promedio es la pendiente de la **recta secante** entre $x = a$ y $x = b$ en la gráfica de f, es decir, la recta que pasa por $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$.



Ejercicio N° 15: Dada una función, determine la tasa de cambio promedio de la función entre los valores dados de la variable:

a. $f(x) = x + x^4\ ; x = 1, x = 3$
b. $f(x) = 3x^2\ ; x = 2, x = 2 + h$
c. $f(x) = 4 - x^2\ ; x = 1, x = 1 + h$
d. $g(x) = \frac{1}{x}\ ; x = 1, x = a$
e. $g(x) = \frac{2}{x+1}\ ; x = 0, x = h + 1$

Realizamos el primero como ejemplo.

$a)\ f(x) = x + x^4 \qquad x = 1, x = 3$

$f\ (3)\ =\ 3\ +\ 3^4\ =\ 3\ + 81\ =\ 84$ evaluamos en la función en 3.

$f\ (1) = 1 + 1^4 = 1 + 1 = 2$ evaluamos en la función en 1.

Entonces:

$$tasa\ promedio\ de\ cambio\ = \frac{84-2}{3-1} = \frac{82}{2} = 41$$

➢ Resuelva los ítems restantes

Veamos un ejemplo para tener en cuenta.

Si $f(x) = 2x^2 + 3x - 1$, evalúe lo siguiente.

a) $f(a)$ b) $f(-a)$

c) $f(a + h)$ d) $\dfrac{f(a + h) - f(a)}{h}$, $h \neq 0$

Resolvemos :

a) $f(a) = 2a^2 + 3a - 1$

b) $f(-a) = 2(-a)^2 + 3(-a) - 1 = 2a^2 - 3a - 1$

c) $f(a + h) = 2(a + h)^2 + 3(a + h) - 1$

$= 2(a^2 + 2ah + h^2) + 3(a + h) - 1$

$= 2a^2 + 4ah + 2h^2 + 3a + 3h - 1$

d) Con los resultados de los incisos c) y a), se tiene

$$\frac{f(a + h) - f(a)}{h} = \frac{(2a^2 + 4ah + 2h^2 + 3a + 3h - 1) - (2a^2 + 3a - 1)}{h}$$

$$= \frac{4ah + 2h^2 + 3h}{h} = 4a + 2h + 3$$ ■

Ejercicio N° 16: Halle $f(a)$, $f(a + h)$ y el cociente de diferencias $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$, donde $h \neq 0$

a. $f(x) = 3x + 2$
b. $f(x) = x^2 + 1$
c. $f(x) = 5$
d. $f(x) = \frac{1}{x+1}$
e. $f(x) = \frac{x}{x+1}$
f. $f(x) = \frac{2x}{x-1}$

Realizamos el ejercicio a) $f(x) = 3x + 2$

$f\ (a)\ =\ 3a\ + 2$ evaluamos la función por *a*

$f\ (a\ + h)\ =\ 3a\ +\ 3h\ + 2$ evaluamos la función por *a +h*

La consigna dice $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$, donde $h \neq 0$, utilizamos lo obtenido anteriormente,

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \frac{3a + 3h \cancel{+}2-(3a \cancel{+2})}{h} = \frac{3\cancel{a}+ 3\cancel{h}+2-\cancel{3}a-2}{\cancel{h}} = \frac{3h}{h} = 3$$

- Resuelva los incisos faltantes, y los próximos ejercicios para poder en práctica el concepto de tasa de cambio.

Ejercicio N° 17: Si $f(x) = x^3$, evalúe el cociente de diferencias $\frac{f(2+h)-f(2)}{h}$ y simplifique su respuesta.

Ejercicio N° 18: Crecimiento y disminución poblacional. En la tabla presentada a continuación, se muestra la población de una pequeña comunidad costera para el periodo 1997-2006. Las cifras refieren al primero de enero de cada año citado.

Año	Población
1997	624
1998	856
1999	1336
2000	1578
2001	1591
2002	1483
2003	994
2004	826
2005	801
2006	745

De acuerdo con los valores de la tabla, responda:

a. ¿Cuál fue la tasa de cambio promedio de la población entre 1998 y 2001?
b. ¿Cuál fue la tasa de cambio promedio de la población entre 2002 y 2004?
c. ¿Para qué periodo la población fue creciente?
d. ¿Para qué periodo la población fue decreciente?

TRANSFORMACIÓN DE FUNCIONES

Una función simple (lo que de ahora en más llamaremos **FUNCION ORIGINAL**) puede ser transformada a través de diferentes operatorias.
Las transformaciones que estudiaremos a continuación son: **DESPLAZAMIENTOS**, **ESTIRAMIENTOS** y **REFLEXIONES.** Los desplazamientos de una función pueden ser de dos maneras diferentes **DESPLAZAMIENTOS HORIZONTALES y DESPLAZAMIENTOS VERTICALES**. Los **ESTIRAMIENTOS** se pueden dar a través de multiplicar a la variable independiente de mi función por un coeficiente $k \in \mathbb{R}$; o multiplicar a la variable dependiente por dicho coeficiente.
Por último, las **REFLEXIONES** pueden darse al reflejar (Se imagina la existencia de un espejo en dicho eje) la función respecto del $eje\ x$ o respecto del $eje\ y$.
A continuación, pasaremos a detallar cada una de las transformaciones.

Desplazamiento vertical y horizontal

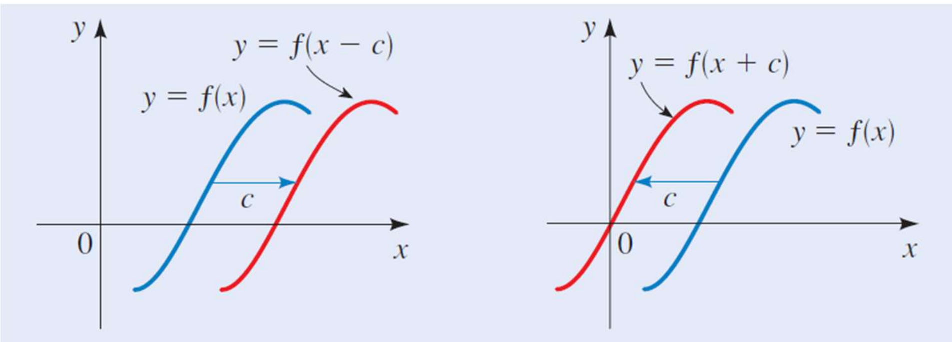
Las traslaciones pueden ser *horizontales o verticales.* Una función se traslada **HORIZONTALMENTE** cuando la variable independiente x está afectada por una suma de un número $k \in \mathbb{R}$.

Si se suma un número real positivo ($k > 0$) a x, la función se desplaza (traslada) ***hacia la izquierda DE LA FUNCIÓN ORIGINAL***, es decir, en sentido contrario al signo de la operación realizada.

En cambio, si se suma un número real negativo ($k < 0$) a la variable independiente x, la función se traslada ***hacia la derecha DE LA FUNCIÓN***, es decir, en sentido contrario al signo de la constante.

Suponga que se conoce la gráfica de $f(x)$. Como se emplea lo antes descripto para obtener las gráficas trasladadas:

$$y = f(x - c) \qquad e \qquad y = f(x + c)\ donde\ c > 0, o\ \ sea\ es\ un\ \mathbb{R}\ positivo$$



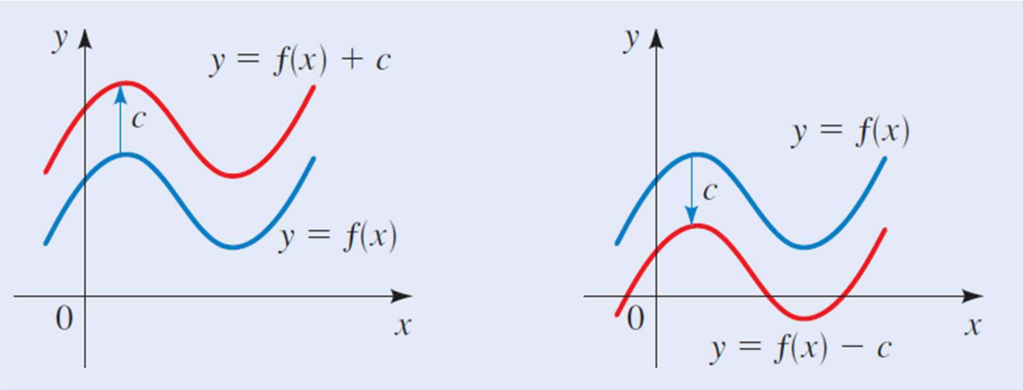
Una función se traslada **VERTICALMENTE** cuando la variable dependiente y está afectada por una suma o resta de un número $k > 0, k \in \mathbb{R}$.

Si se <u>suma</u> a y un número $k > 0, k \in \mathbb{R}$, la función se desplaza (traslada) ***hacia arriba***, es decir, sube k valores respecto del eje de abscisas.

En cambio, si se <u>resta</u> un número $k > 0, k \in \mathbb{R}$, a la variable dependiente y, la función se traslada ***hacia abajo***, es decir, baja k valores respecto del eje de abscisas.

Suponga que se conoce la gráfica de la función original $f(x)$. Como se emplea lo antes descripto para obtener las gráficas trasladadas:

$$y = f(x) + c \qquad e \qquad y = f(x) - c \;\; donde\; c > 0, o \;\; sea\; es\; un\; \mathbb{R}\; positivo$$

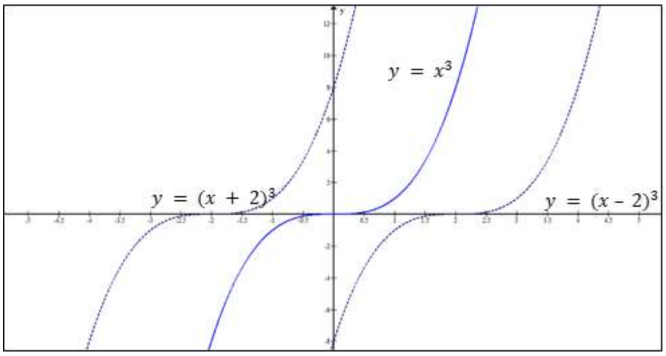


<u>Ejemplos:</u> Traslación vertical y horizontal

Tomaremos como función original, la función real $y = x^3$ .La compararemos con las funciones $y = (x + 2)^3$ e $y = (x - 2)^3$ y grafiquemos.
Analíticamente, resolvamos la función:

Solución:

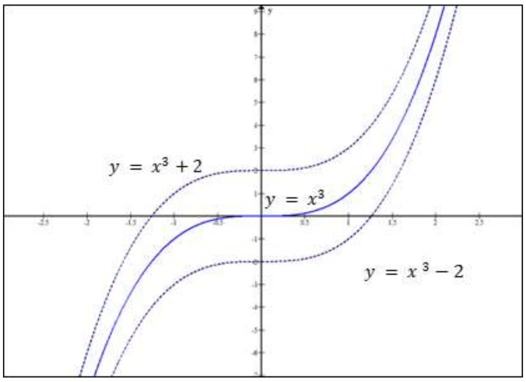
$$\begin{aligned} y = (x+2)^3 &= (x+2) * (x+2)^2 && \longrightarrow \quad \textit{Por factorización} \\ &= (x+2) * (x^2+4x+4) = && \longrightarrow \quad \textit{Por trinomio cuadrado perfecto} \\ &= x^3+4x^2+4x+2x^2+8x+8 = && \longrightarrow \quad \textit{Por prop. distributiva} \\ y &= x^3+6x^2+12x+8 = \end{aligned}$$



Ahora resolvamos con la misma función original, sus traslaciones verticales

$$y = x^3 + 2 \text{ e } y = x^3 - 2 ;$$

notemos que para ellas no debemos recurrir a la factorización ya que la ecuación se obtiene en forma directa. Grafiquemos



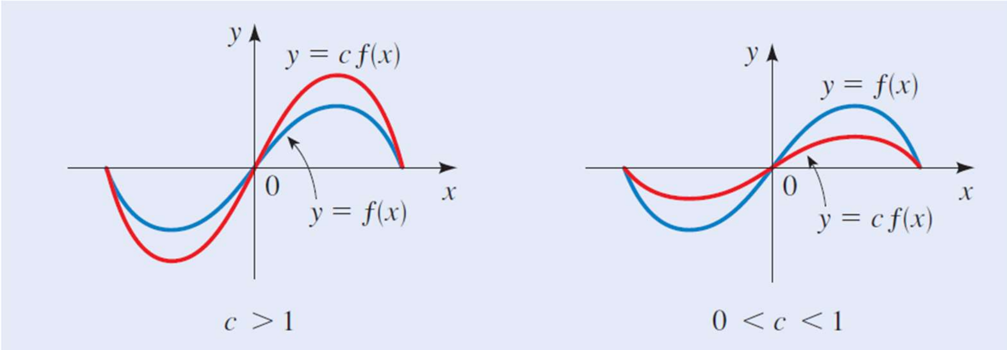
Estiramientos (contracción o expansión)

El estiramiento de una función puede presentarse de cuatro formas distintas, si lo vemos de esta forma, existe la posibilidad de que la función se **EXPANDA O CONTRAIGA VERTICALMENTE** o puede sufrir una **EXPANSIÓN O CONTRACCIÓN HORIZONTAL.**

Una función sufre una *expansión* cuando el coeficiente principal de la misma es superior a 1, $k > 1$, y por el contrario, sufre una *contracción* cuando el coeficiente principal está en un intervalo entre 0 y 1; $0 < k < 1$.

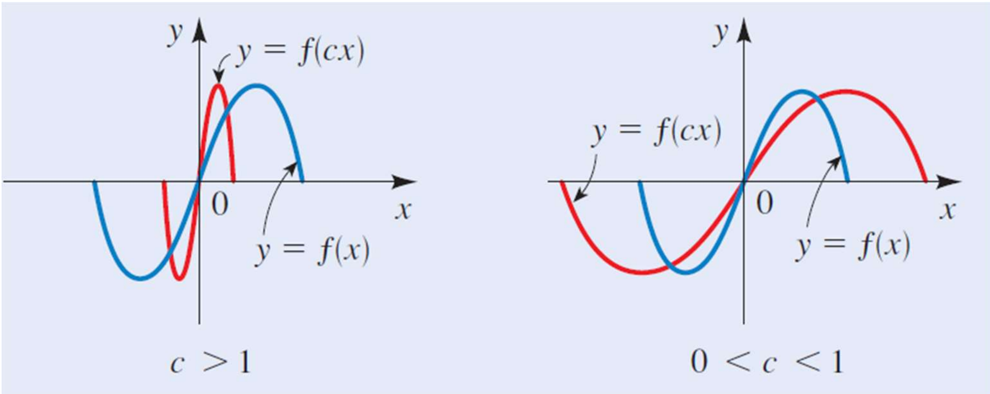
La *EXPANSIÓN O CONTRACCIÓN VERTICAL* implica que mi variable dependiente es multiplicada por un coeficiente $k \in \mathbb{R}$, siempre que se cumplan las condiciones que ya mencionamos. Entonces:

- ✓ Si $y = k * f(x)$ $cuando\ k > 1$ la función se **EXPANDE** acercándose al eje de ordenadas.
- ✓ Si $y = k * f(x)$ $cuando\ 0 < k < 1$ la función se **CONTRAE** alejándose del eje de ordenadas.



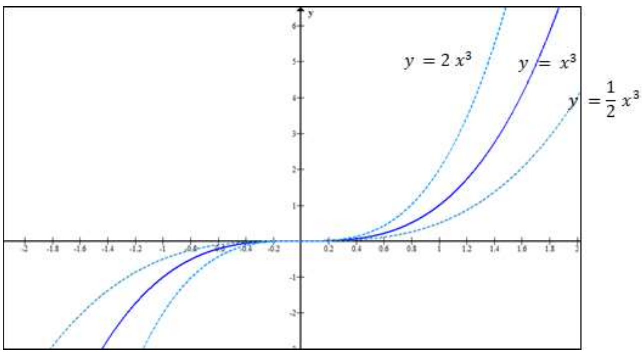
La *EXPANSIÓN O CONTRACCIÓN HORIZONTAL* implica que la variable independiente es multiplicada por un coeficiente $k \in \mathbb{R}$, siempre que se cumplan las condiciones que ya mencionamos. Entonces:

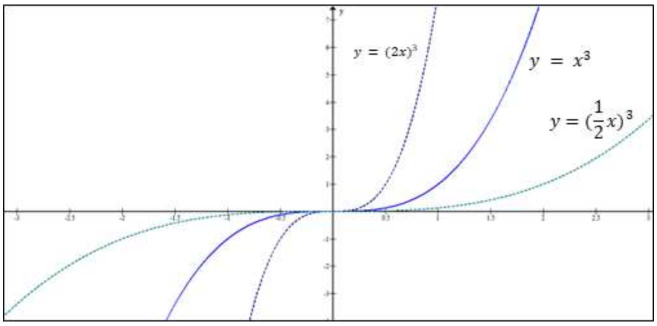
- ✓ Si $y = f(k * x)$ $cuando\ k > 1$ la función se **CONTRAE** alejándose del eje de abscisas.
- ✓ Si $y = f(k * x)$ $cuando\ 0 < k < 1$ la función se **EXPANDE** acercándose al eje de abscisas.



Ejemplos: Estiramientos

Tomaremos como función original, la función real $y = x^3$ .La compararemos con las funciones; $y = 2\,x^3$; $y = \frac{1}{2}\,x^3$; $y = (2x)^3$; $y = (\frac{1}{2}x)^3$



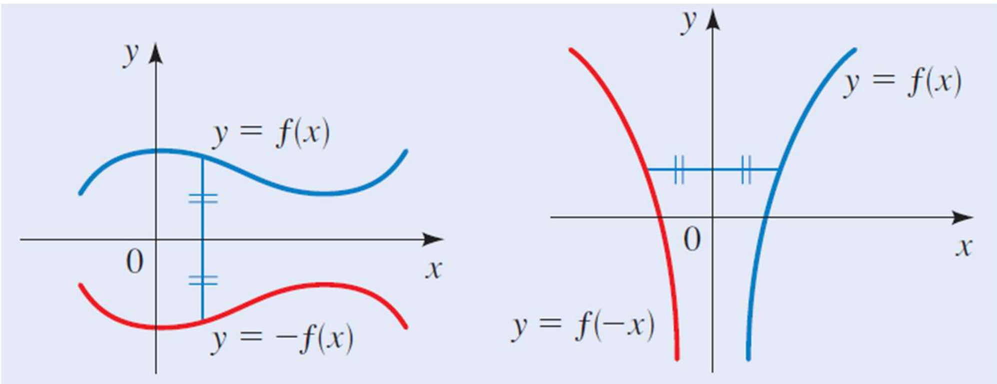


Reflexión

Una función sufre una *reflexión* cuando su variable dependiente o la independiente se multiplican por un $k \in \mathbb{R}, y\ además\ k < 0$; es decir cambian de signo: el eje trabaja como un espejo.

Una **REFLEXIÓN RESPECTO DEL EJE DE ORDENADAS**, implica que, si yo tengo una función $f(x)$ con coordenadas $(x; y)$ de cada uno de sus puntos, al ser reflejada mi nueva función tendrá coordenadas $(-x;\ y)$. Por tanto, como ya dijimos las coordenadas de mi nueva función "***cambian de signo***", solo el eje de abscisas.

Una **REFLEXIÓN RESPECTO DEL EJE DE ABSCISAS**, implica que, si yo tengo una función $f(x)$ con coordenadas $(x; y)$ de cada uno de sus puntos, al ser reflejada mi nueva función tendrá coordenadas $(x;\ -y)$. Por tanto, como ya dijimos las coordenadas de mi nueva función "***cambian de signo"***, solo el eje de ordenadas.



- ✓ Si $y = k * f(x)\ \ cuando\ k < 0$ la función se *REFLEJA RESPECTO DEL EJE DE ABSCISAS*, y se redefine como $y = -f(x)$
- ✓ Si $y = f(k * x)\ \ cuando\ k < 0$ la función *REFLEJA RESPECTO DEL EJE DE ORDENADAS*, y se redefine como $y = f(-x)$.

Ejemplos: Reflexiones

Tomaremos como función original, la función real $y\ = \sqrt{x}$. Ahora reflejemos la misma respecto de ambos ejes, encontrando $y\ = -f(x) =\ -(\sqrt{x}); y\ = f(-x) =\ \sqrt{-x}$.

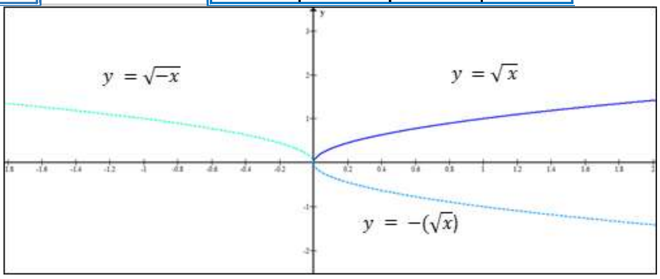
NOTA: Nótese la importancia del paréntesis en este caso.

Solución:

Para ejemplificar mejor usaremos la herramienta de tabla de valores

x	*f(x)*	*-f(x)*
0	0,00	0
1	1,00	-1
2	1,41	-1,41
3	1,73	-1,73
4	2,00	-2
5	2,24	-2,24
6	2,45	-2,45

x	*-x*	*f(x)*	*f(-x)*
0	0	0,00	0,00
1	-1	1,00	1,00
2	-2	1,41	1,41
3	-3	1,73	1,73
4	-4	2,00	2,00
5	-5	2,24	2,24
6	-6	2,45	2,45



NOTA: Una función puede presentar combinaciones de más de una transformación.

Ejemplo: Combinación de traslaciones

Resuelva la siguiente función mediante trasformación de la función original.

$$g(x) = 1 - 2(x-3)^2$$

Solución:

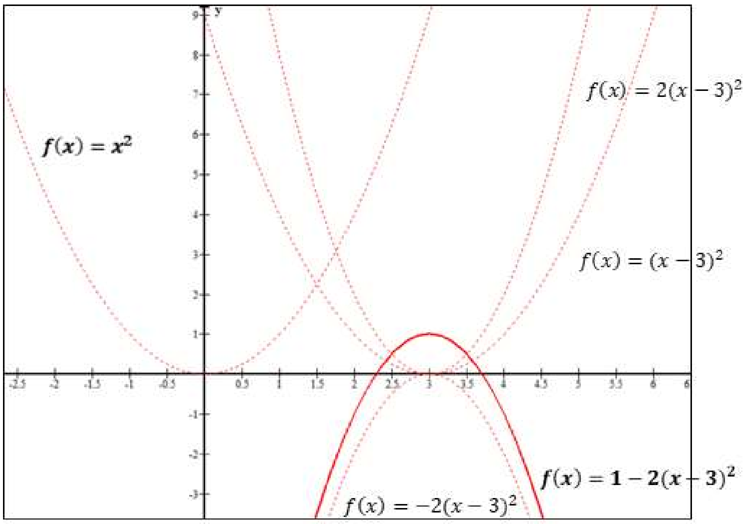
Procedimiento de resolución:

1. Identifiquemos la función original: para ello busquemos la variable independiente……

   $(x-3)^2$

   Véase que el paréntesis esta elevado al cuadrado; y hay una traslación. Quitando la traslación vemos que $\boldsymbol{f(x) = x^2}$.
2. Fíjense que ya identificamos una transformación, TRASLACIÓN HORIZONTAL de 3 unidades a la derecha.
3. EXPANCIÓN en 2 unidades acercándose al eje de ordenadas.
4. REFLEXIÓN, respecto del eje de abscisas.
5. DESPLAZAMIENTO VERTICAL de 1 unidad hacia arriba.

Gráfica:



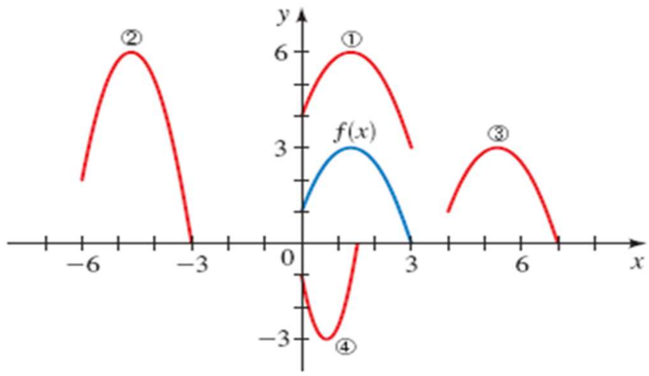
Resumiendo:

EXPRESIÓN	TRANSFORMACIÓN
$g(x) = f(x+k)$	La gráfica de la función **g** se desplaza **k** unidades hacia la izquierda respecto de la gráfica de la función f.
$g(x) = f(x-k)$	La gráfica de la función **g** se desplaza **k** unidades hacia la derecha respecto de la gráfica de la función f.
$g(x) = f(x) + k$	La gráfica de la función **g** se desplaza **k** unidades hacia arriba respecto de la gráfica de la función f.
$g(x) = f(x) - k$	La gráfica de la función **g** se desplaza **k** unidades hacia abajo respecto de la gráfica de la función f.
$g(x) = k * (f(x))$ $k > 1$	La gráfica de la función **g** se alarga verticalmente por k, respecto de la gráfica de la función f, alejándose del **eje** x (Expansión)
$g(x) = k * (f(x))$ $0 < k < 1$	La gráfica de la función **g** se acorta verticalmente por **k**, respecto de la gráfica de la función **f**, acercándose al **eje x (Contracción)**
$g(x) = f(k * x)$ $k > 1$	La gráfica de la función **g** se acorta horizontalmente por **k**, respecto de la gráfica de la función **f**, acercadose al **eje y (Contracción)**
$g(x) = f(k * x)$ $0 < k < 1$	La gráfica de la función **g** se alarga horizontalmente por **k**, respecto de la gráfica de la función **f**, alejandose al **eje y (Expande)**
$g(x) = -f(x)$	La gráfica de la función **g** se refleja respecto de del **eje x**.
$g(x) = f(-x)$	La gráfica de la función **g** se refleja respecto del **eje y.**

Ejercicio 19: Teniendo como referencia la representación de $y = f(x)$; relacione cada gráfica con la ecuación correspondiente.

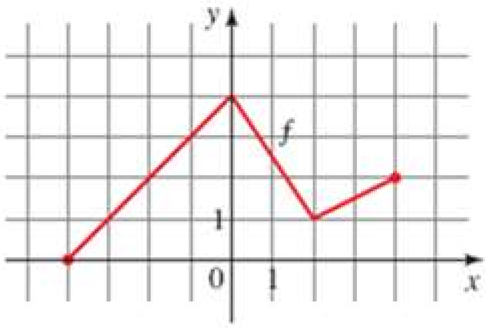
a) $y = f(x - 4)$ **b)** $y = f(x) + 3$

c) $y = 2f(x + 6)$ **d)** $y = -f(2x)$



Ejercicio 20: Transformación de funciones

Dada la representación gráfica de $y = f(x)$.



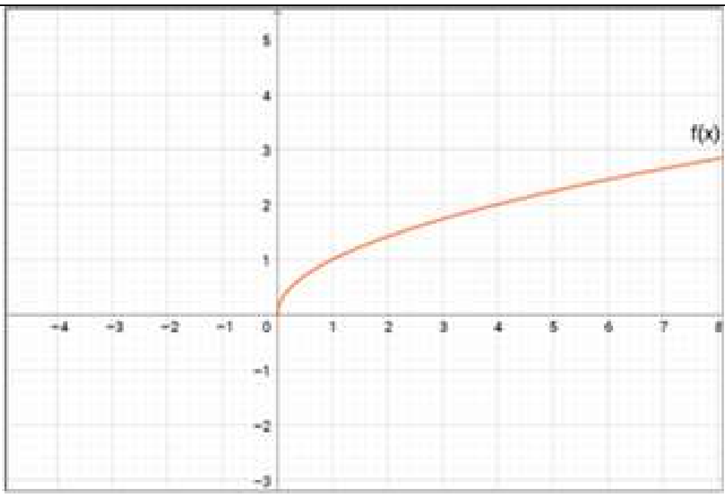
Bosqueje las gráficas de las siguientes funciones:

a. $y = f(x - 2)$
b. $y = f(x) - 2$
c. $y = 2f(x)$
d. $y = -f(x) + 3$
e. $y = f(-x)$
f. $y = \frac{1}{2}f(x - 1)$

Ejercicio 21: Transformación de funciones

A partir del gráfico de la función $f(x) = \sqrt{x}$, represente gráficamente las siguientes funciones e indicar si se produce desplazamiento y/o una reflexión (respecto del eje x o del eje y)

a. $g(x) = \sqrt{-x}$
b. $h(x) = -\sqrt{x} + 3$
c. $i(x) = \sqrt{x + 4} - 1$



Ejercicio 22: Transformación de funciones

Bosqueje la gráfica de cada una de las siguientes funciones, no mediante la representación de puntos, sino a partir de las transformaciones generadas por cambio en los valores de los parámetros.

a. $f(x) = (x - 2)^2$
b. $f(x) = (x + 7)^2$
c. $f(x) = -(x + 1)^2$
d. $f(x) = 1 - x^2$
e. $f(x) = x^3 + 2$
f. $f(x) = -x^3$
g. $f(x) = 1 + \sqrt{x}$
h. $f(x) = 2 - \sqrt{x + 1}$

MODELADO DE FUNCIONES

Muchos de los procesos estudiados en las ciencias básicas y sociales requieren entender como varia una cantidad respecto a otra. Hallar una función que describe la dependencia de una cantidad en otra se llama *modelado*. Se aprenderá, como hallar modelos que se pueden construir con propiedades geométricas o algebraicas del objeto bajo estudio.

Los pasos que debemos seguir para modelar una situación problema y expresarla a través de una función son:

1. Exprese el modelo en palabras. Identifique la cantidad que quiere modelar y exprésela, en palabras, planteando el problema a través de una oración, como una función de otras cantidades.
2. Elija la variable. Identifique las variables empleadas distinguiendo en cada caso cual es la variable dependiente y cuál es la independiente.
3. Establezca el modelo. Exprese la función en el lenguaje del algebra al escribirla como una expresión algebraica, y escribir la variable dependiente como función de la independiente elegida en el paso 2.
4. Use el modelo. Emplee la función para contestar las preguntas que le plantea el problema.

Ejemplo: Modelado de Funciones

Un niño arroja una piedra hacia arriba con una velocidad de 29,4 m/s. Su compañerito que vive en un departamento en el quinto piso (20 metros) ve pasar la piedra dos veces.

a) ¿En qué instantes pasa por su vista la piedra?

b) ¿Cuál es la altura máxima que alcanza la piedra?

La ecuación de distancia (en este caso altura h) en función del tiempo para tiro vertical y caída libre (movimientos rectilíneos uniformemente variados) son según la Física:

$$h = h_0 + v_0 t + \frac{1}{2} g t^2$$

Para nuestro caso:

$h_0 = 0$

$v_0 = 29{,}4\ m/s$

$g = -9{,}8\ m/s^2\ (negativa\ por\ ser\ contraria\ a\ v_0)$

Por ello la ecuación que rige nuestra situación problema será:

$$h = 0 + 29{,}4\frac{m}{s}.t + \frac{1}{2}(-9{,}81m/s^2)t^2$$

Solución:

Procedimiento de resolución:

1. Leemos la situación problema. Luego de la lectura, analizamos cuales son las variables en juego (en muestro caso son la altura de la piedra y el tiempo)
2. Identificamos cual es la variable dependiente y cual la independiente. (la variable dependiente es la altura y la independiente es el tiempo; ya que la altura depende del tiempo que trascurre)
3. Expresamos la relación entre las variables como una expresión algebraica.

$$h = 0 + 29{,}4\frac{m}{s}.t + \frac{1}{2}(-9{,}81m/s^2)t^2$$

4. Respondemos las incógnitas que se nos plantean.

i. ¿En qué instantes pasa por su vista la piedra? Sabemos desde el planteo del problema que el amiguito se encuentra a 20 m de altura, luego debemos igualar la ecuación a 20 y despejar el tiempo, para encontrar la respuesta.

$$20 = 29{,}4\frac{m}{s}.t + \frac{1}{2}(-9{,}81m/s^2)t^2$$

$$-4{,}91t^2 + 29{,}4t - 20 = 0$$

Los tiempos son $t_1 = 0{,}78 \quad y \quad t_2 = 5{,}20$

ii. ¿Cuál es la altura máxima que alcanza la piedra? Lo que me está pidiendo es el vértice de la parábola, particularmente el valor de la h_v.

$$t_v = \frac{-29{,}4}{2(-4{,}91)} = 3$$

$$-4{,}91(3^2) + 29{,}4\,.\,3 - 20 = 112$$

La altura máxima a la que llego la piedra es $112\ m$.

Ejercicio 23: Modelado de funciones

Empleando funciones lineales y cuadráticas, modela cada una de las diez situaciones planteadas a continuación; y responde las respectivas preguntas:

1. Una represa, cuya capacidad es de 364 millones de litros de agua tiene una filtración. Desde el primer día del mes pierde agua de manera uniforme, a razón de 14 millones de litros diarios aproximadamente.

a) Hallar la función que describe la cantidad de agua que permanece en la represa cada día.
b) Graficar esta función.
c) ¿En cuántos días se vaciará la represa en caso de que no se solucione el problema?

2. Jorge es programador en una empresa de electricidad. Debe obtener una función que le permita calcular el precio que debería abonar un usuario, conociendo su consumo mensual. Para ello cuenta con el valor del cargo mínimo ($78), y el precio por cada 100 kW ($54,75)

a. Expresar el precio por consumo de energía a través de una función lineal.
b. Graficar esta función.
c. ¿Ante qué consumo el precio superará los $114?

3. Se sabe que la función de producción P(x) de un artículo es lineal, donde x es el dinero invertido. Si se invierten $10000, se producen 92 artículos; si se invierten $50500, se producen 497 artículos.

a. Escribe la función de producción.
b. Si se desean producir 145 artículos, ¿cuál debe ser la inversión?
c. Si la inversión es de $8000, ¿cuál será la cantidad de artículos producida?

4. A Un objeto es lanzado hacia arriba. La altura en función del tiempo viene dada por la siguiente expresión:

$$y(t) = -4.9t^2 + 20t + 4$$

a. Calcular en que instante el objeto cae al suelo.
b. Determinar la posición inicial del objeto.
c. Determinar el dominio natural y contextual de la función altura $y(t)$.

5. La velocidad con la que un automóvil realiza un recorrido entre dos ciudades puede representarse a través de una parábola que relaciona velocidad (medida en km/h) con distancia (medida en km). Se sabe que se inicia el recorrido en el kilómetro 4 y finaliza el mismo (llega a destino) en el kilómetro 28. Considerar a = -3/2.

a. Determinar la función que relaciona la velocidad con la distancia recorrida.
b. Determinar el nivel máximo de velocidad y el kilómetro en el que se alcanza.
c. Hallar el kilómetro en el que se alcanza una velocidad de 196 km/h.
d. Hallar la velocidad que se alcanza en el kilómetro 20.

6. Se sabe que el crecimiento vegetativo que se observa en una cierta especie de gusanos está representado por una función cuadrática. Se conoce que, tomando como día cero el de iniciación del proceso reproductivo, la cantidad máxima de gusanos que resultan es de 2.025 a los 45 días de iniciado el proceso. Considerar a= -1

a. ¿Cuántos días después de haberse iniciado el proceso se produce la extinción de los mismos?
b. ¿Cuál es el número de gusanos a los diez días del inicio del proceso?
c. ¿A los cuántos días el número de gusanos alcanza las 656?

7. Un fabricante de relojes para taxis ha estimado que sus beneficios pueden deducirse de acuerdo con la siguiente función:

$$B(x) = -x^2 + 100x + 2400$$

En ella, x representa la cantidad de relojes que fabrica y vende al mes, mientras que B indica el beneficio que obtiene.

a. ¿Qué cantidad de relojes debe vender para obtener el máximo beneficio? ¿Cuál es ese beneficio?
b. ¿Entre qué dos cantidades debe vender a fin de no tener pérdidas?
c. ¿Cuál es el beneficio que logra el fabricante al vender 30 relojes?
d. ¿Qué cantidad de relojes debe vender si quiere obtener beneficios por $3.300?

8. La siguiente función determina la cantidad de pacientes que ingresan en un hospital después de x días del 1º de junio en el que empieza una epidemia de gripe.

$$P(x) = -5x^2 + 300x + 3500$$

En ella, P(x) es el número de pacientes y x representa el tiempo transcurrido desde el inicio de la epidemia, expresado en días.

a) ¿Cuál es el día en el que ingresan más pacientes?
b) ¿Cuál es la cantidad máxima que ingresó durante la epidemia?
c) ¿Cuántos pacientes ingresaron el día 06 de julio?
d) ¿Qué día ingresaron 6875 pacientes?

9. Se sabe que la función de producción $P(x)$ de un artículo es lineal, donde x es el dinero invertido. Si se invierten \$10000, se producen 92 artículos; si se invierten \$50500, se producen 497 artículos.

a. Escribe la función de producción.
b. Si se desean producir 145 artículos, ¿cuál debe ser la inversión?
c. Si la inversión es de \$8000, ¿cuál será la cantidad de artículos producida?

10. A Un objeto es lanzado hacia arriba. La altura en función del tiempo viene dada por la siguiente expresión:

$$y(t) = -4.9t^2 + 20t + 4$$

a. Calcular en que instante el objeto cae al suelo.
b. Determinar la posición inicial del objeto.
c. Determinar el dominio natural y contextual de la función altura $y(t)$.

ÁLGEBRA DE LAS FUNCIONES

Al igual que los números, las funciones se pueden *sumar, restar, multiplicar y dividir* (restringiendo el dominio a aquellos valores para los cuales no anulen el denominador), y así obtener otras funciones.

Si f y g son dos funciones definidas para los conjuntos **A y B**, para cada x que pertenece al dominio "**DE AMBAS**", se definen las funciones resultantes de realizar las operaciones mediante las expresiones:

$$f(x) + g(x) = (f + g)(x) = h(x) \;\; \Rightarrow \;\; Dom\, h = Domf \cap Domg$$

$$f(x) - g(x) = (f - g)(x) = h(x) \;\; \Rightarrow \;\; Dom\, h = Domf \cap Domg$$

$$f(x) * g(x) = (f * g)(x) = h(x) \;\; \Rightarrow \;\; Dom\, h = Domf \cap Domg$$

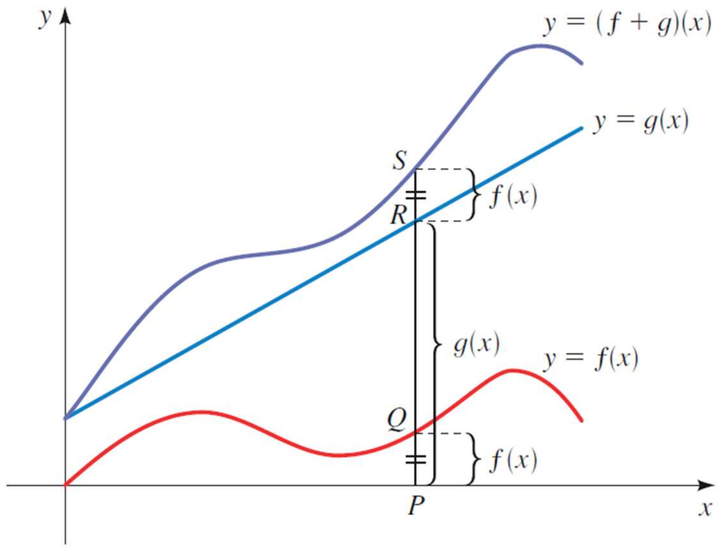
$$f(x)/g(x) = (f/g)(x) = h(x) \;\; \Rightarrow \;\; Dom\, h = \{x | x \in Domf \cap Domg \; y \; g(x) \neq 0\}$$

Así, si el dominio de **f es A** y el dominio de **g es B**, entonces el dominio de h es la intersección de estos dominios, es decir, A ∩B.

Las funciones también se pueden multiplicar por constantes: si "k" es un número real, entonces la función $k.f$ está definida para toda x en el dominio de f mediante:

$$k\, f(x) = h(x) \;\; \Rightarrow \;\; Dom\, h = Domf$$

Para el proceso de graficación de una **suma o resta** de funciones, se deben sumar o restar respectivamente los valores de $x \in Dom\ f\ y\ g$ que se corresponden con cada coordenada y, la suma de estos



Ejemplo: **Algebra de las Funciones**

Dadas las siguientes funciones $f(x) = \sqrt{x+2}$ y $g(x) = \frac{x}{x-3}$ realice las operaciones de $f + g; f - g; f.g; g/f$

Solución:

Como primera medida debemos encontrar $Dom\ f\ y\ Dom\ g$ para poder hallar la intersección de ambos dominios

$$x + 2 = 0 \Rightarrow x = -2 \quad \therefore Dom\ f = (-2, \infty)$$
$$x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3 \quad \therefore Dom\ g = \mathbb{R} - \{3\}$$

La intersección de los dominios será por tanto $Dom\ h = [-2,3) \cup (3, \infty)$

$$\sqrt{x+2} + \frac{x}{x-3} = \frac{(x-3) * \sqrt{x+2} + x}{x-3} = h(x)$$

Por M. C.D

$$\sqrt{x+2} - \frac{x}{x-3} = \frac{(x-3) * \sqrt{x+2} - x}{x-3}$$

Por tratarse de un producto simplifico la expresión $(x-3)$

$$\sqrt{x+2} * \frac{x}{x-3} = \frac{x * \sqrt{x+2}}{x-3}$$

Reescribimos la ecuación

$$h(x) = g(x)/f(x) = \frac{\frac{x}{x-3}}{\sqrt{x+2}} = \frac{x}{(x-3) * \sqrt{x+2}}$$

$$\Rightarrow Dom\ h = (-2,3) \cup (3, \infty)$$

Para resolver la división nos valemos de esta propiedad:

$$\frac{a/b}{c} = \frac{a}{b} . \frac{1}{c} = \frac{a}{bc}$$

Ejercicio 24: Álgebra de las funciones

Calcule las funciones $f+g, f-g, fg, f/g$. Analice de las funciones originales y las resultantes: dominio, ceros, ordenada al origen.

a. $f(x) = x - 3;\ g(x) = x^2$

b. $f(x) = \sqrt{4 - x^2};\ g(x) = \sqrt{x + 1}$

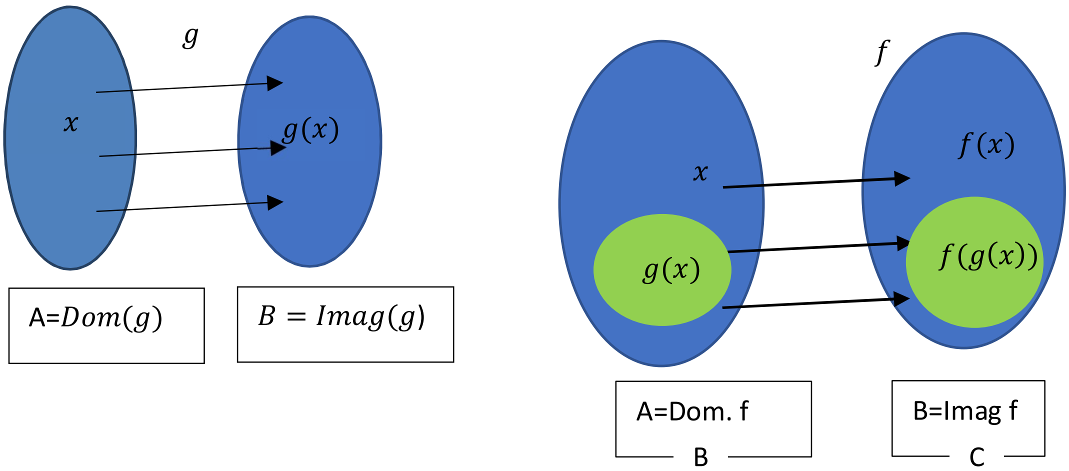
c. $f(x) = \frac{2}{x};\ g(x) = \frac{4}{x+4}$

COMPOSICIÓN DE FUNCIONES

Sean las funciones g y f, donde g está definida de A en B y f de B en C, la composición $\boldsymbol{fog}$ es una nueva función, tal que:

El dominio de $\boldsymbol{fog}$ consiste en todos los números x del dominio de g para los cuales $g(x)$ está en el dominio de f, es decir: $Imag\ (g) \subseteq\ Dom(f)$.
El dominio de la función compuesta es el dominio de la primera función aplicada (g) y el conjunto imagen de la función compuesta está incluido en el conjunto imagen de la segunda función (f).

Apliquemos el concepto de conjunto aprendido en la primera unidad, para entenderlo mejor:



Simbológicamente a la composición de dos funciones las expresamos:

$$f \circ g(x) = f(g(x))$$

NOTA: Existe un caso muy particular de composición de funciones que estudiaremos más adelante, cuando conozcamos el concepto de función inversa.

Ejemplo: Composición de Funciones

Si se tiene que componer $f \circ g = f(g(x))$, ambas definidas de $R\ a\ R$, siendo

$g(x) = x^2$ y $f(x) = x - 4$

Solución:

Primero encontremos el dominio de ambas y la imagen de g

$$Por\ ser\ una\ funcion\ polinomica\ el\ D\ (g) = \mathbb{R}\ y\ su\ I\ (g) = \mathbb{R}^{+} = (0, \infty)$$

$$D(f) = \mathbb{R}$$

Pero ahora debemos encontrar los valores de la imagen de g que, incluido al dominio de f, es decir el subconjunto la imagen de g cuyos elementos pertenecen al dominio de f.

$$Dom\ f\big(g(x)\big) = \mathbb{R}^{+}$$

Ahora realicemos la composición y veamos si podemos afirmar lo obtenido de forma analítica:

1. Primero identifiquemos bien cuál es la función para componer $f(x) = x - 4$ y cuál es la función dentro de la composición $g(x) = x^2$.
2. Ahora debemos remplazar la variable independiente de f por la función g; reescribiendo:

$$Si\ f(x) = x - 4\ \Rightarrow f\big(g(x)\big) = x^2 - 4$$

Revisando el dominio de la función que obtuvimos vemos que su dominio es

$$Dom\ f\big(g(x)\big) = \mathbb{R}^{+}$$

Ejercicio 25: Composición de funciones

Encuentre las funciones $fog\ y\ \ gof$. Analice de las funciones originales y las resultantes: dominio, ceros, ordenada al origen

a. $f(x) = 2x + 3;\ g(x) = 4x - 1$
b. $f(x) = 6x - 5;\ g(x) = \frac{x}{2}$
c. $f(x) = x^2;\ g(x) = x + 1$
d. $f(x) = x^3 + 2;\ g(x) = \sqrt[3]{x}$

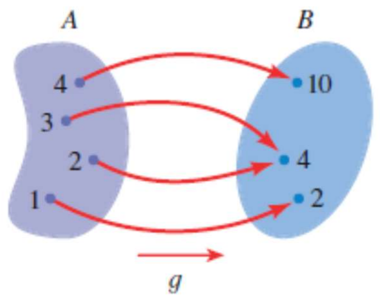
CLASIFICACIÓN DE FUNCIONES EN SURYECTIVAS, INYECTIVAS Y BIYECTIVAS

Hasta ahora, al analizar relaciones, hemos analizado solamente lo que ocurre en el conjunto de partida o primer conjunto (Dom). No nos ha preocupado ver qué pasa en el segundo conjunto, conjunto de llegada (Imag). Como el primer análisis ha permitido determinar cuáles de las relaciones son funciones, el análisis seguirá solamente para aquellas que son funciones.

Funciones suryectivas:

También denominadas *suprayectiva o sobreyectiva.*
Una f una función definida de $A\ en\ B$ es suryectiva "**SÍ Y SÓLO SÍ**", todos los elementos del conjunto B tienen, por lo menos una pre-imagen en A.

Dicho de otro modo, a cada elemento del conjunto B de la función le corresponde **"AL MENOS UN"** elements del dominio de la misma.



Un ejemplo sencillo de función suryectiva es la función

$$f(x) = x^2$$

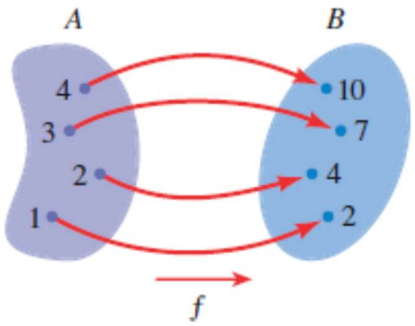
Ya que como vemos la $Imag\ (f) = \mathbb{R}^+$ y su $Dom(f) = \mathbb{R}$.

$$\forall\ y \in Imag(f)\ \exists\ al\ menos\ un\ x_1\ y\ x_2$$

En palabras; para todos los valores de y que pertenecen a la imagen de f, existen al menos dos valores de x que pertenecen al Dom de f , y se corresponden en coordenadas con dicha y .

Funciones Inyectivas:

Una f una función definida de $A\ en\ B$ es inyectiva, **"SÍ Y SÓLO SÍ"** todo par de elementos distintos del dominio tiene imágenes distintas. Es decir, cada elemento del conjunto de llegada es imagen "**DE UN SOLO"** elemento del dominio de f.



Un ejemplo sencillo de función suryectiva es la función

$$f(x) = x$$

Ya que como vemos la $Imag\ (f) = \mathbb{R}$ y su $Dom(f) = \mathbb{R}$.

$$\forall\ y \in Imag(f)\ \exists\ uno\ y\ solo\ un\ x$$

En palabras; para todos los valores de y que pertenecen a la imagen de f, existen uno y solo un valor de x que pertenecen al Dom de f , y se corresponden en coordenadas con dicha y .

Funciones biyectivas:

Si **una función** es *Suryectiva e Inyectiva* a la vez, decimos que la función es biyectiva y decimos que la función es **"UNO A UNO".**

Ejemplo:

Analicemos la biyectividad de la siguiente función $f(x) = \frac{x+4}{x-6}$. El $Dom(f) = \mathbb{R} - \{6\}$

Solución:

Procedimiento de resolución

1. Tomamos dos valores arbitrarios $x_1\ y\ x_2$, debemos probar que $f(x_1) = f(x_2)$.
2. Reemplazamos tanto $x_1\ como\ \ x_2$ en $f(x)$.

$$f(x_1) = \frac{x_1 + 4}{x_1 - 6} \qquad f(x_2) = \frac{x_2 + 4}{x_2 - 6}$$

3. Igualamos ambas expresiones y procedemos a despejar los correspondientes $x_1\ y\ x_2$, de la igualación.

$$f(x_1) = \frac{x_1+4}{x_1-6} = \frac{x_2+4}{x_2-6} = f(x_2)$$

$$\frac{x_1 + 4}{x_1 - 6} = \frac{x_2 + 4}{x_2 - 6}$$

$$(x_1 - 6)\frac{x_1 + 4}{x_1 - 6} = \frac{x_2 + 4}{x_2 - 6}(x_1 - 6)$$

Multiplicamos ambos miembros por la expresión$(x_1 - 6)$

$$= x_1 + 4 = \frac{x_2 + 4}{x_2 - 6}(x_1 - 6)$$

Simplificamos

$$(x_2 - 6)(x_1 + 4) = \frac{x_2 + 4}{x_2 - 6}(x_1 - 6) * (x_2 - 6)$$

Multiplicamos ambos miembros por la expresión$(x_2 - 6)$

$$(x_2 - 6)(x_1 + 4) = (x_2 + 4)(x_1 - 6)$$

$$x_2x_1 - 6x_1 + 4x_2 - 24 = x_2x_1 - 6x_2 + 4x_1 - 24$$

Realizamos la distributiva que corresponde

$$-6x_1 + 4x_2 = -6x_2 + 4x_1$$

Agrupamos

$$-6x_1 - 4x_1 = -6x_2 - 4x_2$$

$$x_1(-6 - 4) = x_2(-6 - 4)$$

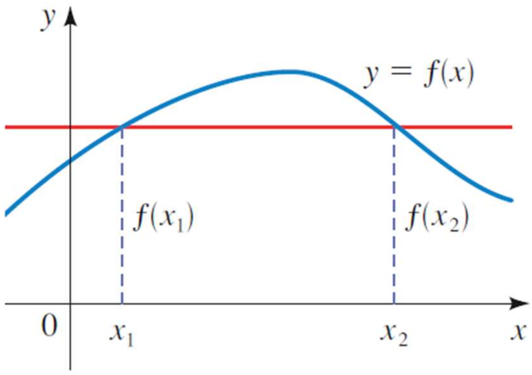
Factorizamos

$$x_1 = x_2$$

Luego podemos afirmar que la función es uno a uno.

Prueba de la recta horizontal

Una función es uno a uno si y solo si ninguna recta horizontal cruza su gráfica más de una vez.



FUNCIÓN INVERSA

Dada una relación $\mathbb{R}$ que aplica A en B, se llama **relación inversa** de $\mathbb{R}$ y se designa $\mathbb{R}^{-1}$, a otra relación tal que para cada par ordenado (x, y) que verifica a $\mathbb{R}$, el par ordenado (y, x) verifica a $\mathbb{R}^{-1}$. Las funciones biyectivas; son importantes porque son precisamente las funciones que poseen funciones inversas de acuerdo con la siguiente definición:

Definición:

Sea f una función **biyectiva** con dominio A y rango B. Entonces su función inversa f^{-1} tiene dominio B y rango A; y está definida por:

$$f^{-1}(y) = x \Leftrightarrow f(x) = y$$

De la definición de función inversa podemos deducir que

$$Dom(f) = Imag(f^{-1}) \quad y \quad Imag(f) = Dom(f^{-1})$$

Esta afirmación es otra manera de comprobar de forma sencilla que obtuvimos la función inversa correcta de nuestra función original.

Ejemplo: Función inversa

Usemos el ejemplo de función uno a uno y calculemos su función inversa.

$$f(x) = \frac{x+4}{x-6}$$

Solución:

Procedimiento de resolución

1. Comprobamos que la función sea biyectiva
2. Ponemos la función, como expresión de dos variables

$$y = \frac{x+4}{x-6}$$

3. A este paso, existen dos formas resolverlo, nosotros solo aplicaremos uno:
   i. Cambio las variables de posición, opero matemáticamente y despejo.
   ii. Opero matemáticamente, despejo y cambio las variables de posición.

$$y = \frac{x+4}{x-6}$$

$$(x-6)y = (x+4)$$ → Me deshago del denominador multiplicando y dividiendo

$$(xy-6y) = (x+4)$$ → Aplico distributiva

$$xy - x = 4 - 6y$$ → Agrupo los términos con x de un lado y los sin x del otro

$$x(y-1) = 4-6y$$ → factorizo

$$x = \frac{4-6y}{(y-1)}$$ → despejo

$$y = f^{-1}(x) = \frac{4-6x}{(x-1)}$$

Una propiedad importante de las funciones que poseen inversas es que:

Si realizamos la composición de una función y su inversa; o viceversa. Obtendremos como resultado la función identidad $(y = x)$

$$f[f^{-1}(x)] = x \qquad y \qquad f^{-1}[f(x)] = x$$

Ejercicio 26: Inversa de una función

Encuentre la función inversa de f en los casos que sea posible. Analice de la función y de su inversa, en caso de que corresponda: dominio, imagen, ceros, ordenada al origen, indeterminaciones y signos. Represente gráficamente ambas funciones en un mismos sistema de coordenadas. (En los casos donde no puede obtenerse la inversa justifique por qué no es posible.)

a) $f(x) = 2x + 1$

b) $f(x) = 6 - x$

c) $f(x) = \frac{x}{2}$

d) $f(x) = \frac{1}{x^2}$

Ejercicios adicionales

1. Calcule las funciones $f+g, f-g, fg, f/g$. Analice de las funciones originales y las resultantes: dominio, ceros, ordenada al origen, indeterminaciones, positividad y negatividad.

a. $f(x) = x^2 + 2x - 5;\ g(x) = 3x^2 - 1$

$b.\ f(x) = \sqrt{9 - x^2};\ g(x) = \sqrt{x^2 - 4}$

$c.\ f(x) = \frac{2}{x+1};\ g(x) = \frac{x}{x+1}$

2. Encuentre la función inversa de f en los casos que sea posible. Analice de la función y de su inversa, en caso de que corresponda: dominio, imagen, ceros, ordenada al origen, indeterminaciones y signos. Represente gráficamente ambas funciones en un mismo sistema de coordenadas. (En los casos donde no puede obtenerse la inversa justifique por qué no es posible.)

a) $f(x) = \frac{1+3x}{5-2x}$

b) $f(x) = 5 - 4x^3$

c) $f(x) = \sqrt{2 + 5x}$