UNIVERSIDAD NACIONAL DE CUYO
Instituto de Ciencias Básicas
Licenciatura en Ciencias Básicas
Profesorado de Grado Universitario en Ciencias Básicas
Orientaciones: Biología, Física, Matemática y Química
(Plan de Estudios 2005-Ord. 129/04-C.S. y Ord 131/04-C.S.)

M 207 Medida e Integración - 2012

Profesor responsable: Pablo Alejandro Rocha
Profesora colaboradora: Virginia N. Vera de Serio

1 - Objetivos y Expectativas de Logro

- Estudiar los conceptos y propiedades de la teoría de la medida de Lebesgue.
- Comprender la teoría de la integral de Lebesgue.
- Relacionar la teoría de la integral y la teoría de la diferenciación de Lebesgue.
- Estudiar teoría de medida abstracta.
- Resolver tanto problemas teóricos como prácticos del Análisis Matemático.

2 - Contenidos Analíticos

Unidad 1: Medida exterior de Lebesgue en $\mathbb{R}^n$.
Rectángulo n-dimensional. Volumen. Rectángulo abierto. Unión casi disjunta. Estructura de conjuntos abiertos en $\mathbb{R}$. Conjuntos abiertos en $\mathbb{R}^n$. El conjunto de Cantor. Medida exterior de un conjunto en $\mathbb{R}^n$. Propiedades de la medida exterior.

Unidad 2: Medida de Lebesgue.
Conjuntos medibles. Medida de Lebesgue. Propiedades. Invariancia de la medida de Lebesgue. Sigma-álgebra de Lebesgue. Conjuntos de Borel. Sigma-álgebra de Borel. Ejemplo de Vitali de un conjunto no medible.

Unidad 3: Funciones medibles.
Función característica. Función escalera. Función simple. Función medible. Propiedad en casi todo punto. Aproximación por funciones simples. Aproximación por funciones escaleras. Teorema de Egorov. Teorema de Lusin. Convergencia en medida. Relación entre convergencias.

Unidad 4: Integral de Lebesgue.
Integral de Lebesgue, definición y propiedades básicas. Teorema de convergencia. Espacio L^1. Completitud de L^1. Familias densas en L^1: funciones escaleras, funciones simples, funciones continuas de soporte compacto. Teorema de Riemann-Lebesgue. Producto convolución. Teorema de Fubini. Aplicaciones.

Unidad 5: Diferenciación e Integración.
Diferenciación de la integral. Función maximal de Hardy-Littlewood. El teorema de Diferenciación de Lebesgue. Conjunto de Lebesgue. Núcleos y aproximaciones de la identidad. Funciones de variación acotada. Funciones absolutamente continuas. Diferenciabilidad de funciones de salto.

Unidad 6: Espacio L^2 y espacios de Hilbert.
Espacio L^2, norma, producto interior, completitud, separabilidad. Espacios de Hilbert. Ortogonalidad. Base ortonormal. Desigualdad de Bessel. Igualdad de Parseval. Proceso de Gram-Schmidt. Espacios pre-Hilbert. Operadores acotados. Funcional lineal. Teorema de representación de Riesz. Espacio dual.

Unidad 7: Espacios L^p.
Espacios L^p, propiedades. Exponentes conjuugados. Desigualdad de Holder. Desigualdad de Minkowski. Espacio normado, espacio de Banach. Separabilidad. Continuidad en norma L^p. Familias densas en L^p. Clases l^p. Dual de L^p. Convergencia débil.

Unidad 8: Medidas abstractas.
Sigma álgebra. Medida. Espacio de Medida. Espacio sigma finito. Medida de conteo. Medida exterior abstracta. Conjuntos medibles en el sentido de Caratheodory. Espacio de medida completo. Sigma-álgebra de Borel. Medida exterior métrica. Estructura de conjuntos medibles. Álgebra de conjuntos, premedida. Extensión de premedida a medida. Funciones medibles, propiedades. Convergencia en casi todo punto, en medida. Propiedades de convergencia de sucesión de funciones.

Unidad 9: Integral en espacios de medida abstracta.
Integral, definición y propiedades. Lema de Fatou. Teorema de la convergencia monótona. Teorema de la convergencia dominada. Espacios L^p. Medida producto. Teorema general de Fubini. Aplicación a Coordenadas polares. Integral de Lebesgue-Stieltjes. Delta de Dirac.

Unidad 10: Teorema de Radon-Nikodym.
Medidas con signo, medidas complejas. Variación total. Medidas absolutamente continuas. Medidas mutuamente singulares. Teorema de Radon-Nikodym. Aplicaciones.

3 - Bibliografía

Básica:

R. L. Wheeden and A. Zygmund, *Measure and Integral: An Introduction to Real Analysis,* M. Dekker, 1977. ISBN 0824764994, 9780824764999.

Complementaria:

N. Fava y F. Zo, *Medida e Integral de Lebesgue,* Instituto Argentino de Matemática, Red Olímpica. Colección Textos Universitarios, 1996. ISBN 9879072162, 9789879072165.

H. L. Royden, *Real Analysis,* 3 Ed., Prentice Hall, 1988. ISBN 0-02-404151-3.

W. Rudin, *Real and Complex Analysis,* McGraw-Hill. International Editions: Math. Series, 1987. ISBN 0070542341, 9780070542341.

E. Stein and R. Shakarchi, *Real Analysis: measure theory, integration, and Hilbert spaces, Vol. 3,* Princeton Univ. Press, 2005. ISBN: 9780691113869.

4 - Metodología de enseñanza y de evaluación durante el cursado

Las clases son de carácter teórico-práctico. Los profesores imparten la mayor parte de los desarrollos teóricos. Los alumnos deben resolver los ejercicios planteados por sí mismos con entrega semanal escrita de trabajos prácticos; sus soluciones serán corregidas por los docentes, pudiendo acceder a clases semanales de consultas.

El proceso de evaluación es de carácter continuo a través de la corrección de los trabajos prácticos. El alumno para ser considerado regular debe aprobar el $100^o/_o$ de los trabajos prácticos. Si el alumno no aprueba todos los trabajos prácticos, debe rendir una evaluación recuperatoria final escrita, en la última semana de clases. Esta evaluación escrita es individual y se aprueba con un puntaje mínimo del $60^o/_o$. Se considera, entre otros, la precisión de la respuesta, el correcto uso de los términos técnicos, la fundamentación adecuada de la respuesta, la coherencia en la exposición y desarrollo del escrito y el procedimiento en la resolución del planteo.

5 - Condiciones de regularidad tras el cursado

Son requisitos para que el alumno sea considerado regular:
- registrar presencia activa en al menos $80^o/_o$ de las clases teóricas, y
- haber aprobado todos los trabajos prácticos escritos, o la evaluación recuperatoria final.

6 - Sistema de aprobación y promoción de la asignatura

Un alumno regular aprueba la asignatura rindiendo y aprobando un examen final oral. La nota del alumno regular surge considerando todos los aspectos relativos a su desempeño durante el cursado de la asignatura así como el desarrollo del examen final oral.

Los alumnos libres, para la aprobación de la asignatura, deberán cumplir con el requisito adicional de rendir un examen escrito previo sobre problemas del tipo de los propuestos en los trabajos prácticos y/o en el recuperatorio. Los alumnos libres deberán aprobar dicha evaluación escrita con un mínimo de $60^o/_o$; si el examen escrito es aprobado deberán, además, rendir un examen final oral convencional, en las fechas que oportunamente determine el Instituto.